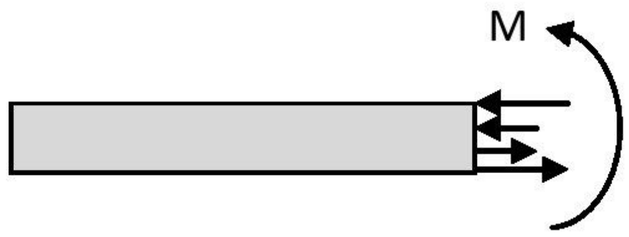
خمش

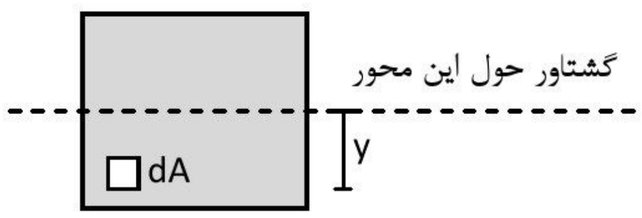
در تیر تحت خمش خالص تنش وجود دارد ولی برآیند این تنش‌ها روی سطح مقطع صفر است.



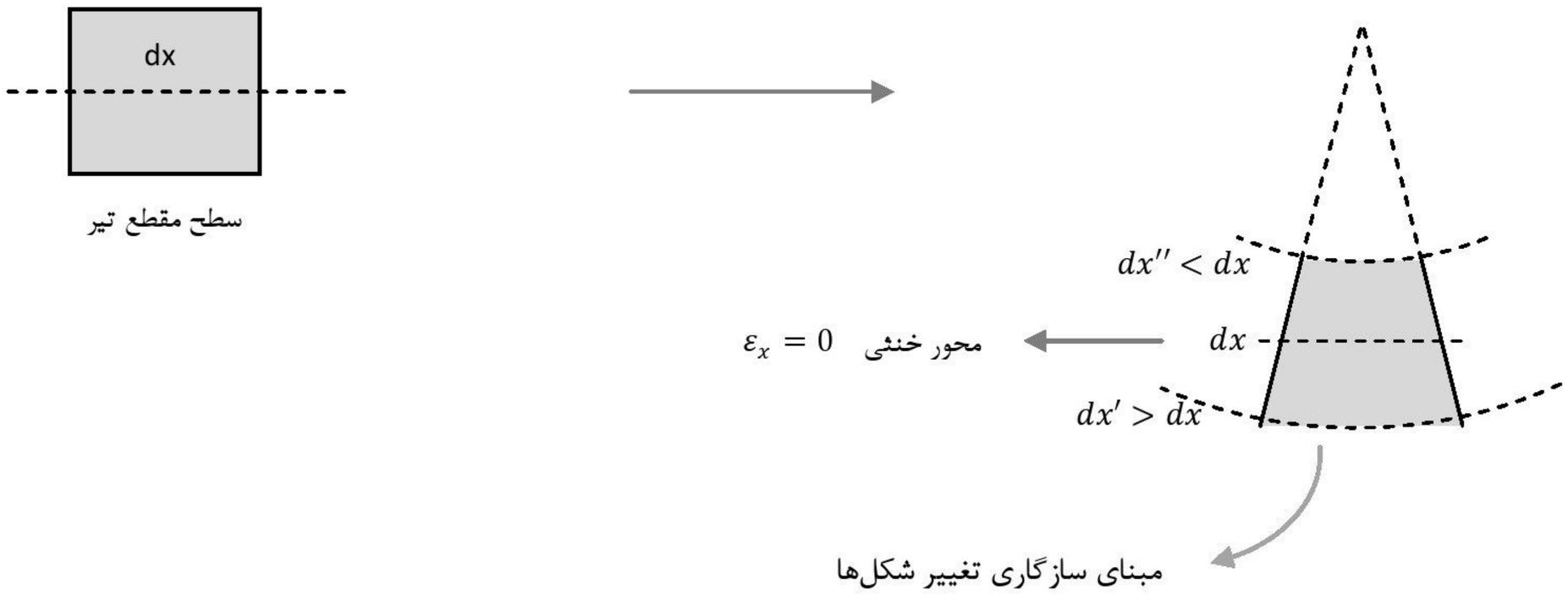
معادلات تعادل:

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

$$M = \int_A (\sigma dA) y$$



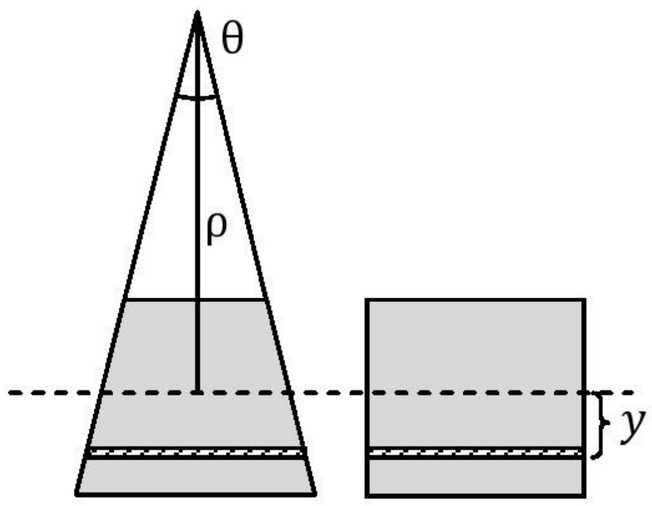
بر اثر خمش، تیر همواره شکل منحنی به خود می‌گیرد گه در dx طول خیلی کوچک می‌توان آن را قسمتی از دایره در نظر گرفت.



فرضیات:

۱) هر سطح مقطعی که مسطح بوده بعد از اعمال خمش مسطح باقی می‌ماند

۲) هر مقطعی که قبل از تغییر شکل بر محور تیر عمود بوده بعد از آن هم عمود باقی می‌ماند.



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad \rightarrow$$

میزان کرنش که در آن y فاصله تا محور خنثی و ρ شعاع خمیدگی است.

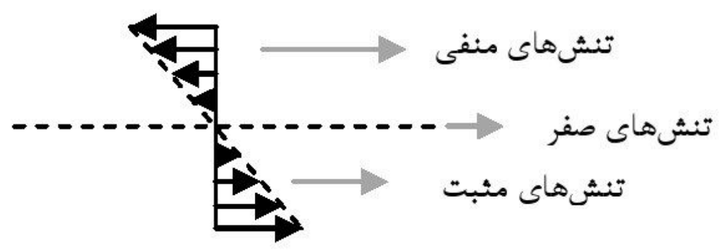
$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho}$$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A -\frac{Ey}{\rho} dA = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{E}{\rho}\int y dA = 0$$

$\int ydA$ بیان‌گر گشتاور اول سطح است که وقتی صفر شود نشان می‌دهد محور از مرکز سطح گذشته است.

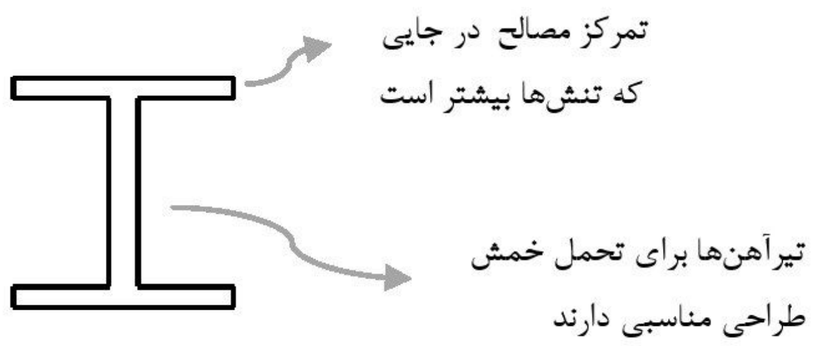
$$M = \int_A (\sigma dA)y = \int_A -\frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho}\underbrace{\int y^2 dA}_{\text{ممان اینرسی}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = -\frac{EI}{\rho}} \longrightarrow \quad \sigma_x = -\frac{yM}{I}$$

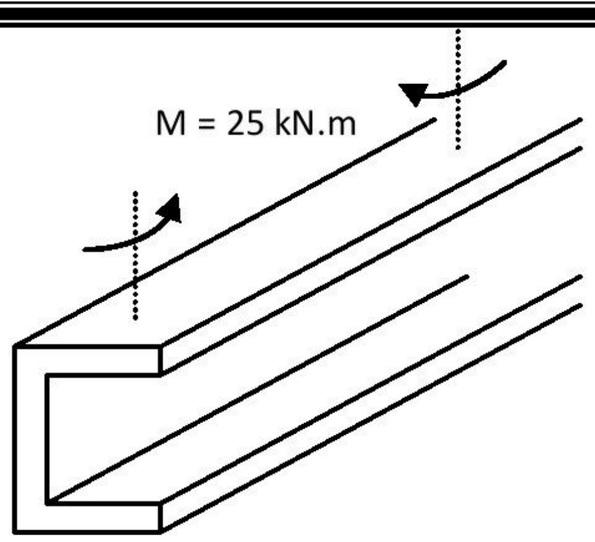
تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله y از محور قرار دارد از این رابطه محاسبه می‌شود که با فاصله از محور رابطه خطی دارد.



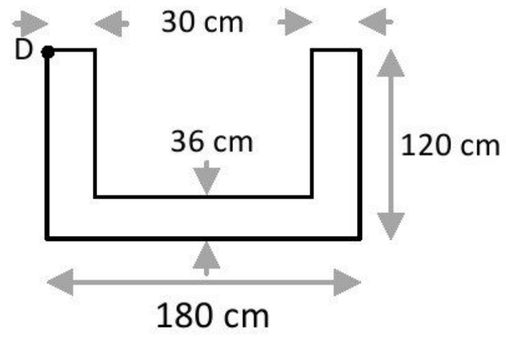
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\ C}{I} = \frac{M_{max}}{I/C} = \frac{M_{max}}{S}$$

S : مدول خمشی مقطع





❖ ***مثال.*** *تنش نقطه* D *را در تیر مقابل بیابید.*



$$Ay_c = \int ydA$$

$$y_c = \frac{\left(180 \times 36 \times \frac{36}{2}\right) + 2\ \left(30 \times 84 \times \left[\frac{84}{2} + 36\right]\right)}{(180 \times 120) - (120 \times 84)} = 44.25\ mm \quad \rightarrow \quad \text{محل محور خنثی}$$

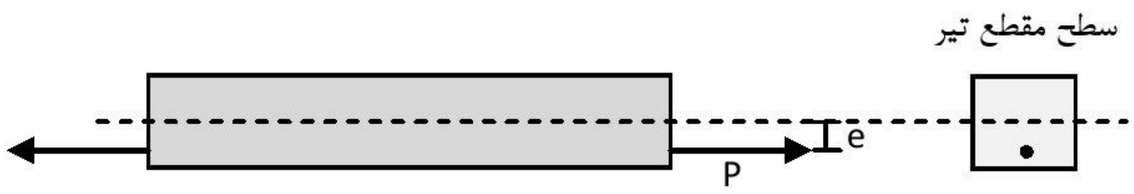
$$I = \frac{180 \times 36^3}{12} + 180 \times 36 \times (26.25)^2 + 2\left[\frac{30 \times 84^3}{12} + 30 \times 84 \times 33.75^2\right]$$

$$I = 13869000\ mm^4$$

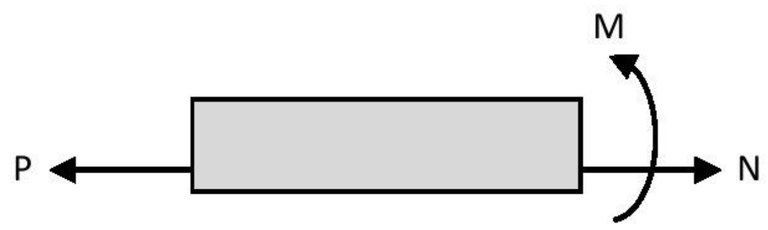
$$\sigma_D = \frac{25 \times 10^3 \times 10^3 \times 75.75}{13869000} = 136.5\ \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_D = 136.5\ MPa$$

بارگذاری محوری خارج از مرکز:

بار محوری گذرنده از مرکز جرم تنها ایجاد کشش یا فشار می کند. در صورتی که بار محوری خارج از مرکز که گذرنده از مرکز جرم نباشد، علاوه بر تنش نرمال، ایجاد خمش نیز می‌کند.



برای تحلیل تیر فوق :



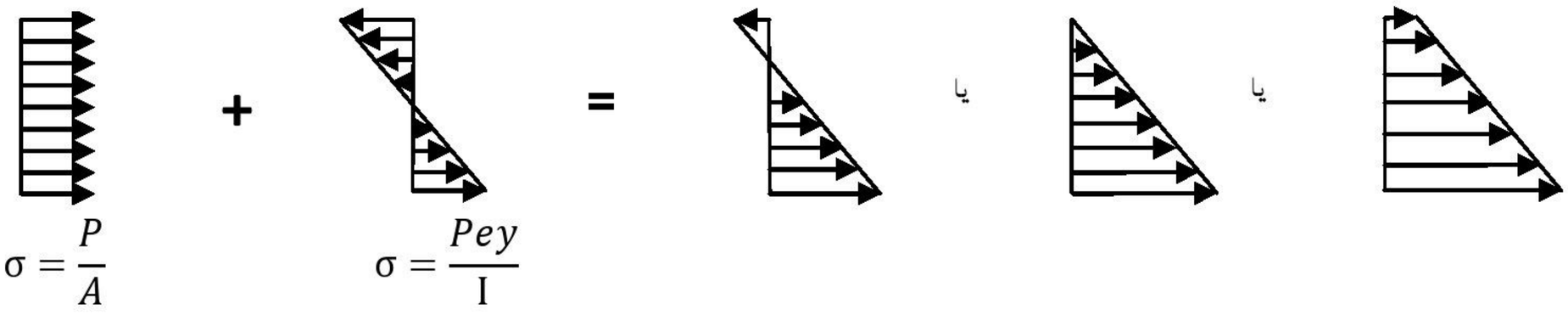
معادلات تعادل : $N = P$

$$M = P \times e \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

از آنجا که $\sigma = \frac{My}{I}$ داریم :

$$\sigma = \frac{Pey}{I}$$

تنش حاصل از نیروی محوری تنش حاصل از گشتاور خمشی



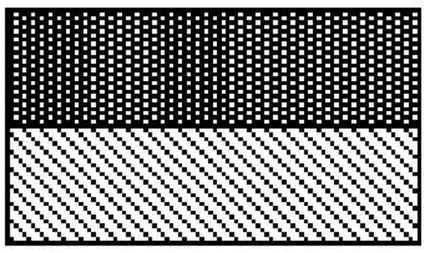
P $\qquad$ Pey

$\sigma = \frac{P}{A}$ $\qquad$ $\sigma = \frac{Pey}{I}$

بسته به مقدار عددی تنش‌ها، یکی از سه حالت زیر حاصل می‌شود.

خمش عضوهایی که از چند ماده ساخته شده‌اند:

رابطه $\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$ از اصل سازگاری بدست آمده و به جنس جسم بستگی ندارد.



$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = E\varepsilon_2 \end{cases}$ بسته به اینکه المان مورد نظر در کدام قسمت جسم واقع است . $\rightarrow$

$$N = \int_A \sigma_T dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{A_1} -\frac{E_1 y_1}{\rho} dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y_2}{\rho} dA = 0$$

$$-\frac{E_1}{\rho}\int y_1 dA - \frac{E_2}{\rho}\int y_2 dA = 0 \qquad (\int y dA = Q)$$

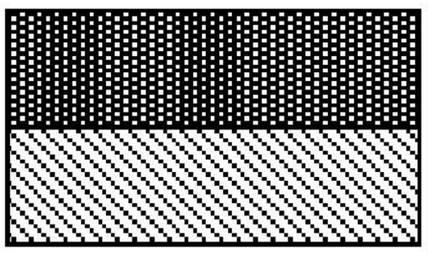
$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0$ $\qquad \rightarrow \qquad$ از حل این معادله، مکان محور خنثی جسم به دست می‌آید.

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 y_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 y_2 dA = -\frac{E_1}{\rho}\int {y_1}^2 dA - \frac{E_2}{\rho}\int {y_2}^2 dA$$

$M = -\frac{E_1}{\rho} I_1 - \frac{E_2}{\rho} I_2 \quad \rightarrow$ I_1 : گشتاور دوم سطح اول نسبت به محور خنثی که در بالا مکان آن محاسبه شد.

روش مقطع معادل :

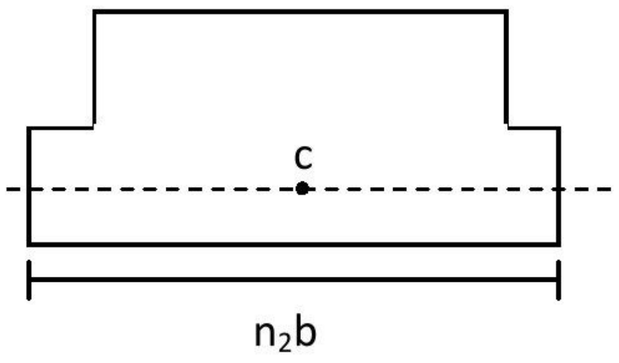
هرگاه مقطع تیر ما از چند جنس مختلف باشد، یکی از مقاطع را مبنا قرار می‌دهیم و طول بقیه را به نسبت E هایشان تغییر می‌دهیم. مقطع بدست آمده را مقطع معادل می‌گوییم. پس از آن کافیست محور خنثی و ممان اینرسی مقطع معادل را بدست آوریم.



$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 Q_1 + \frac{E_2}{E_1} E_1 Q_2 = 0\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = n_2$$

$$Q_1 + n_2 Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1' + Q_2' = 0 \quad \rightarrow \quad Q'' = 0$$

رابطه بالا نشان‌دهنده همان محور خنثی گذرنده از مرکز جرم مقطع جدید است.



$$\frac{E_1}{E_1} = n_1 = 1\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = n_2\,, \qquad \frac{E_3}{E_1} = n_3\,, \quad \ldots$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{My}{I'} \\ \sigma_2 = n_2 \frac{My}{I'} \end{cases}$$

I’ ممان اینرسی مقطع جدید است

نحوه توزیع تنش در عضوهای چند ماده‌ای (در قسمت فصل مشترک برش ایجاد می‌شود) :