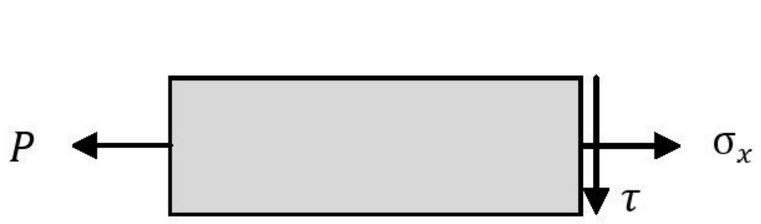
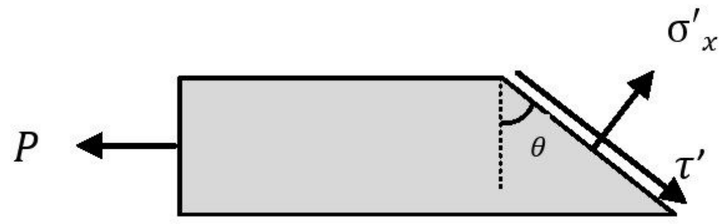
تحلیل تنش‌ها در صفحه:

تنش حاصل از کشش، فشار و پیچش را بررسی کردیم. باید دقت کنیم که برای طراحی‌ها تنش در هر سطحی که ماکسیمم است نباید از حد مجاز بیشتر شود. بین تنش‌ها در سطوح مختلف روابط ریاضی برقرار است که به کمک آنها می توان تنش در هر سطح و مقدار ماکسیمم آن‌ها را پیدا کرد.





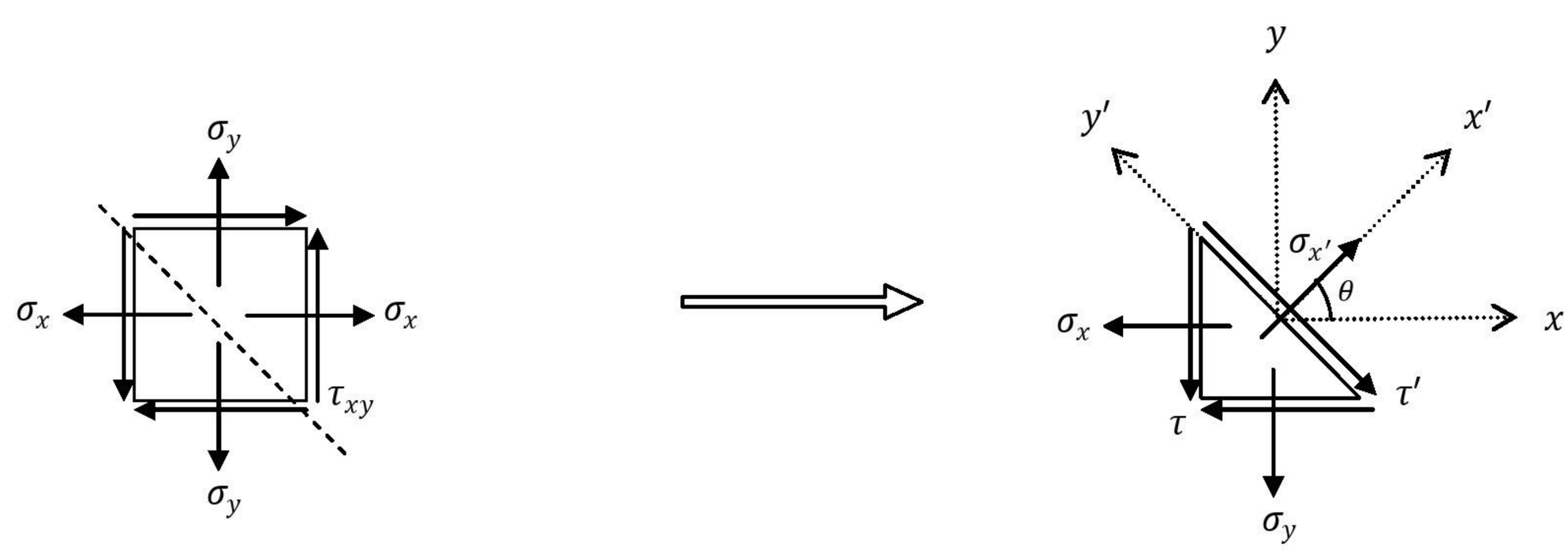
$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\theta \xrightarrow{max} \cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0$$

$$\tau' = \frac{P'}{A'} = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta \xrightarrow{max} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\tau'_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

بررسی تنش‌های مسطحه به کمک **دایره‌ی مور**:



$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow \sigma_{x'}A - \sigma_x(A\cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(A\sin\theta)\cos\theta = 0$$

$$\xrightarrow{yields} \sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow \tau'A - \sigma_x(A\cos\theta)\sin\theta + \sigma_y(A\sin\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(A\sin\theta)\cos\theta = 0$$

$$\xrightarrow{yields} \tau' = (\sigma_x - \sigma_y)\cos\theta\sin\theta - \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی روابط را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

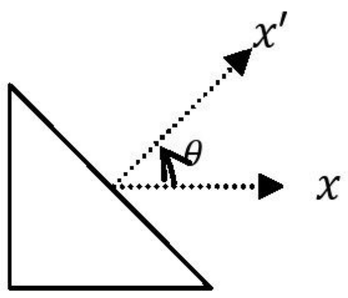
$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$

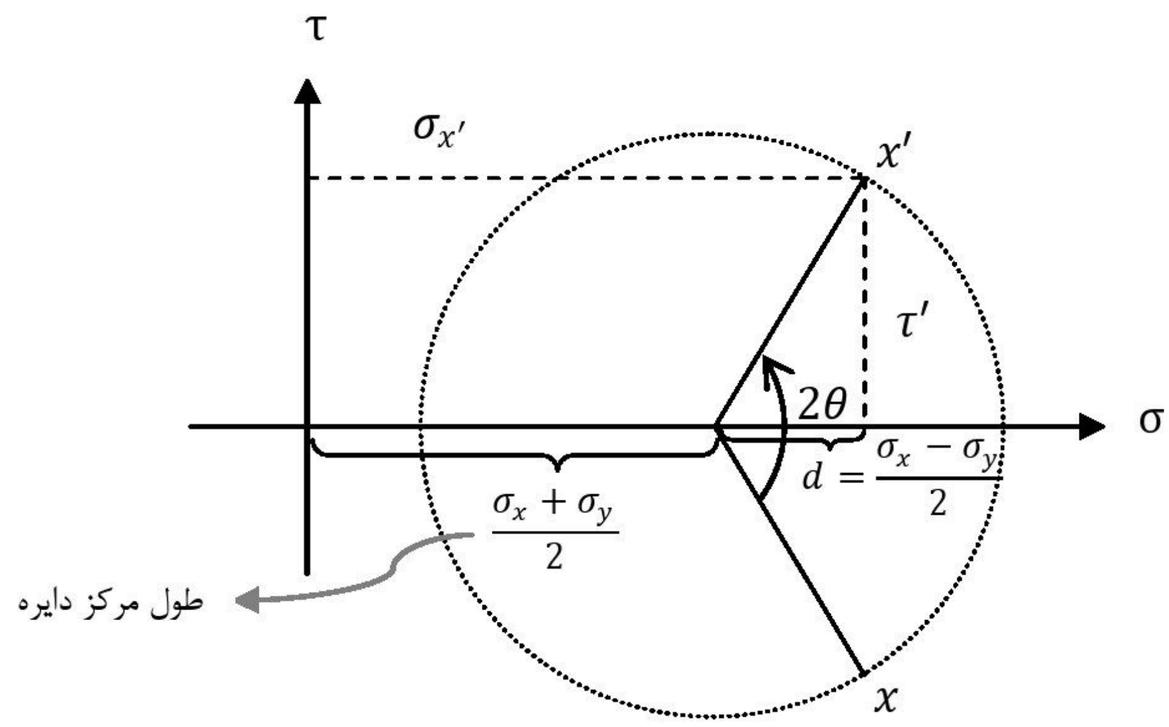
برای حالتی که $\tau_{xy} = 0$ است:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

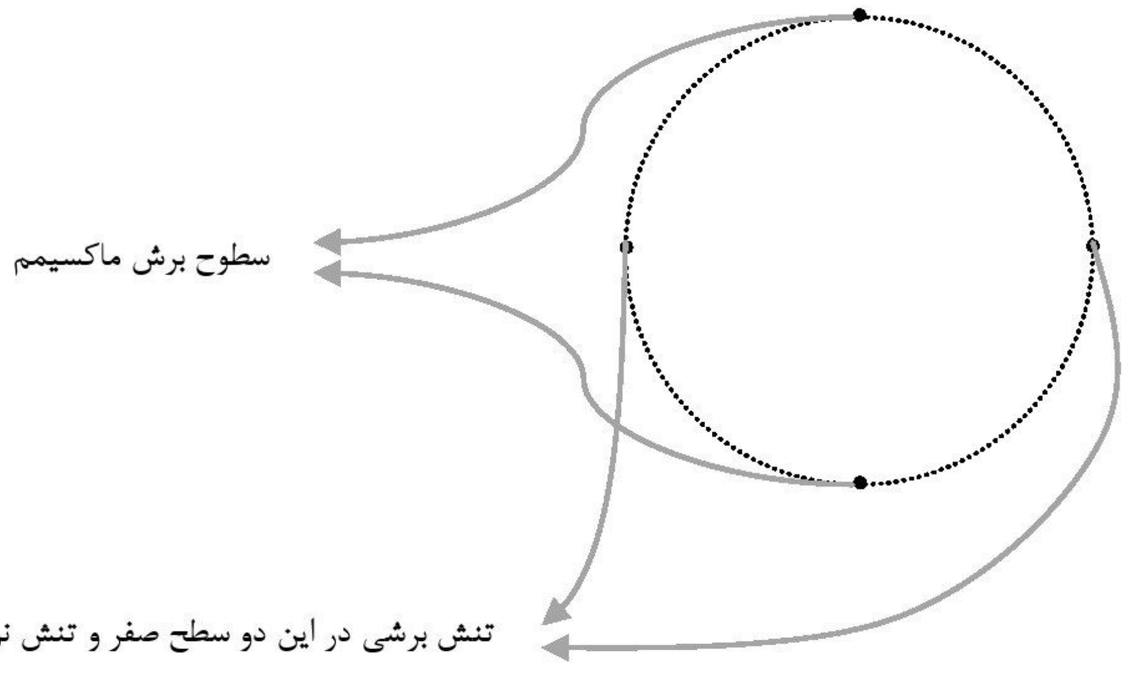
با مقایسه با معادلات $\begin{cases} X = X_c + R\cos\alpha \\ Y = Y_c + R\sin\alpha \end{cases}$ می‌توان σ' و τ' را روی دایره نظیر کرد.



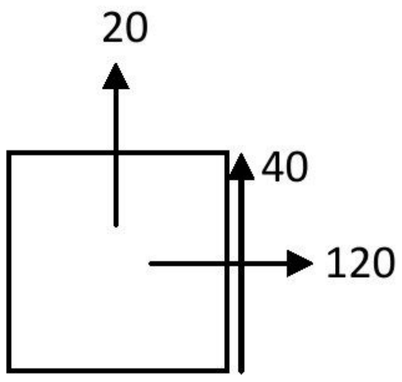


دقت شود که هر نقطه روی دایره نظیر یک سطح است و عرض از مبدأ مرکز دایره همواره صفر است.

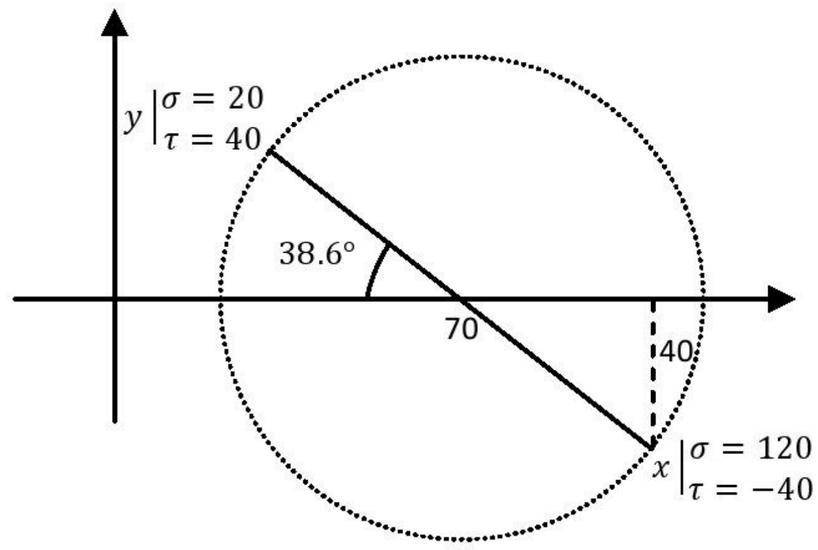
نکته : سطوح و محورهای اصلی:

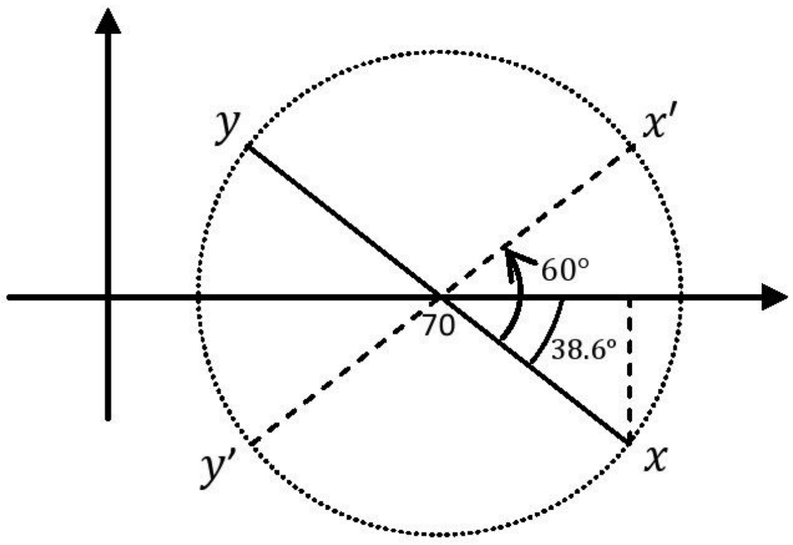


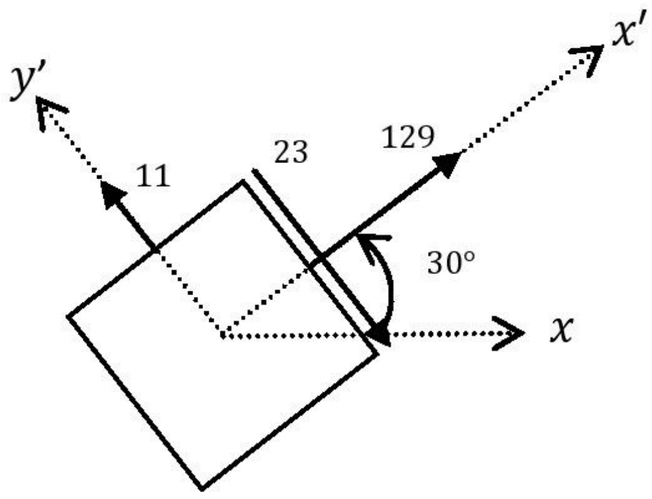
❖ ***مثال.*** *اگر سطوح را ۳۰ درجه دوران دهیم تنش و کرنش‌های جدید را محاسبه کنید.*



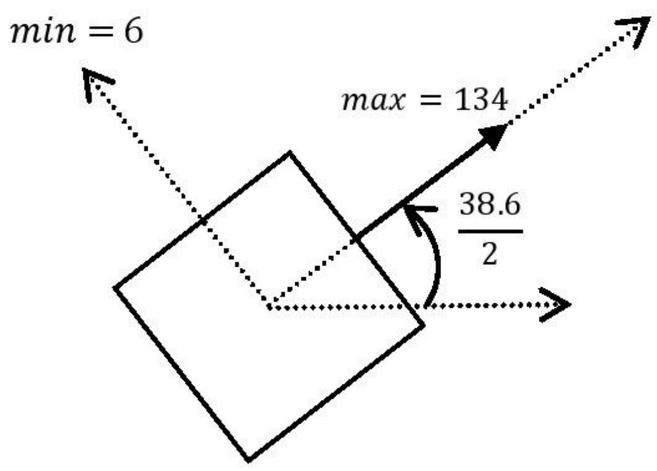
نکته: برای تعیین علامت τ دقت شود که پادساعت‌گرد نظیر عدد منفی در دایره است و برعکس.





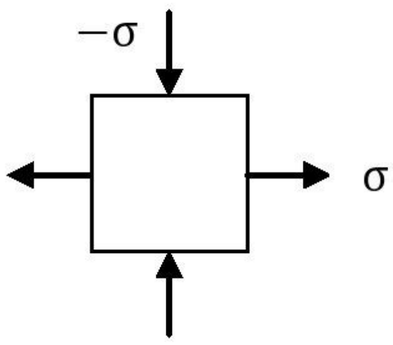


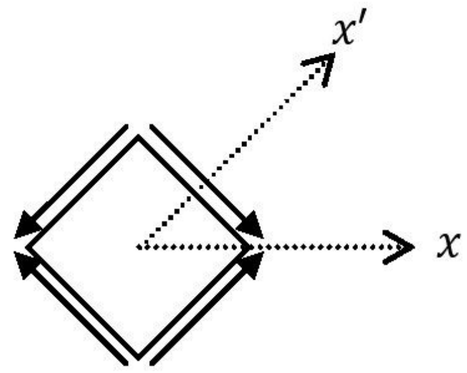
دراین مثال سطوح اصلی و تنش‌هایشان:

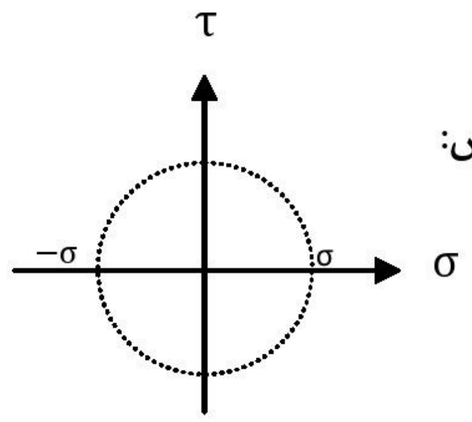


بررسی دایره‌های خاص:

۱) برش خالص:

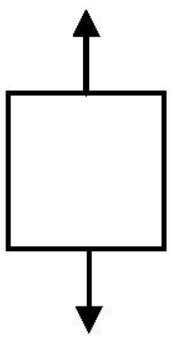


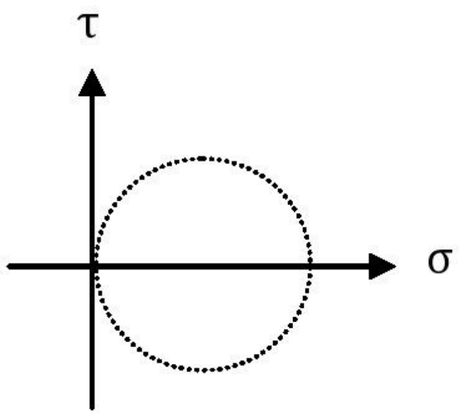




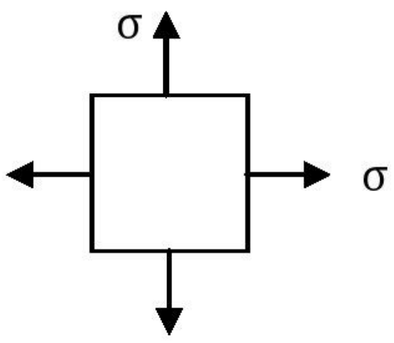
در حالت برش خالص هیچ تنش نرمالی وجود ندارد.

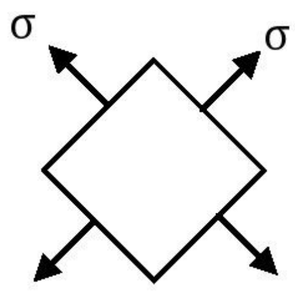
۲) تنش یک‌محوری:

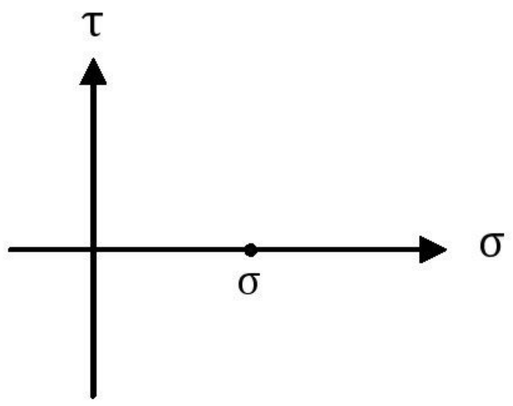




۳) تنش هیدرواستاتیکی:





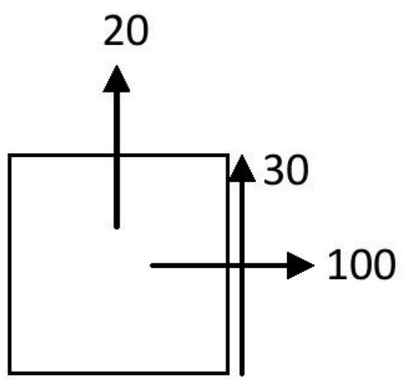


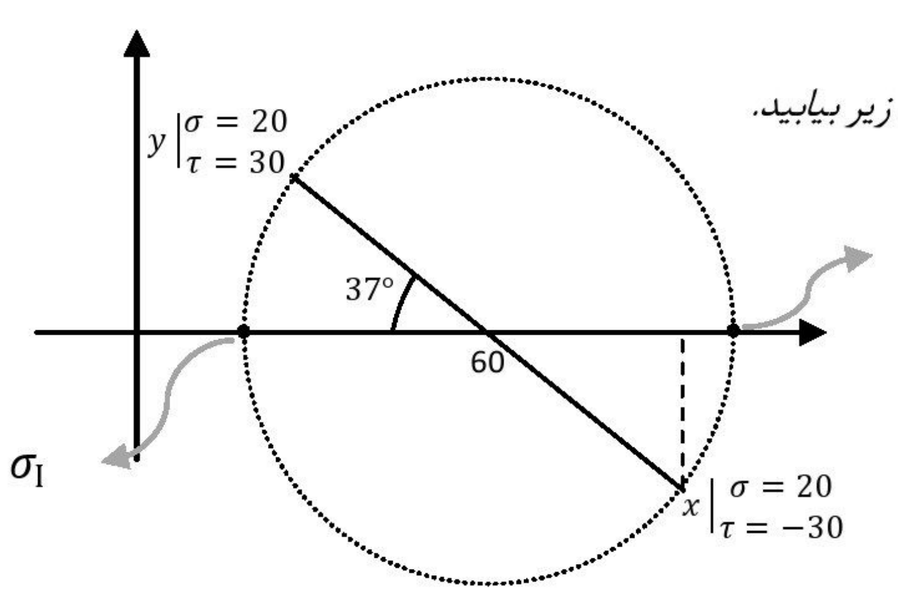
- هرگاه تنش‌ها در همه سطوح با هم برابر و تنش برشی صفر باشددر این حالت تغییر زاویه تأثیری بر مقدار تنش ندارد.

$$d = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y$$

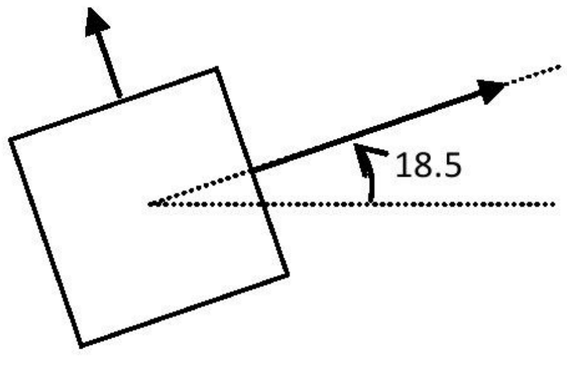
$$\begin{cases} d = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ 2\sigma_c = \sigma_x + \sigma_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_c + d\cos 2\theta \\ \sigma_y = \sigma_c - d\sin 2\theta \end{cases}$$

❖ ***مثال.****تنش‌های اصلی را برای سطح زیر بیابید.*





$\sigma_{II} = 110\ ,\ \sigma_I = 10$

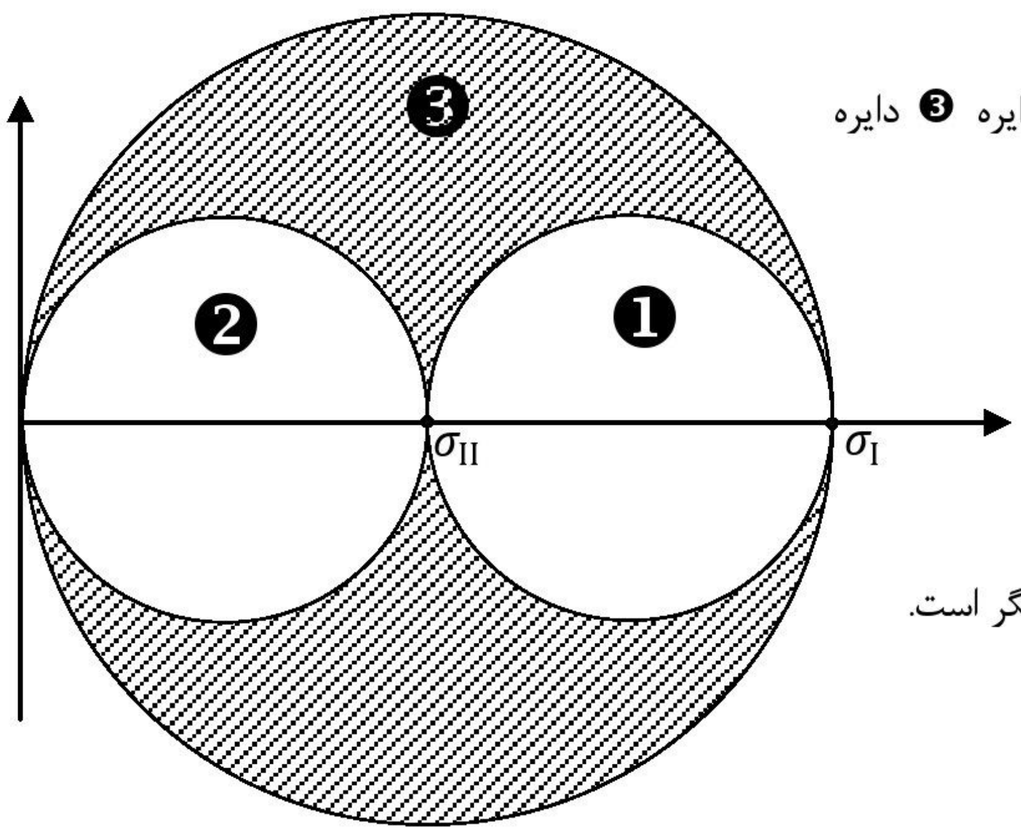


برای پاسخ به این پرسش که اگر تنش های چندمحوری داشته باشیم یا تنش های عمودی و برشی هم زمان اعمال شوند چه زمانی تسلیم رخ می‌دهد، فرضیه‌های زیادی وجود دارد :

- *فرضیه تنش اصلی ماکسیمم* : هرگاه تنش اصلی به میزان تنش مجاز برسد تسلیم رخ می‌دهد.
- *فرضیه تنش برشی ماکسیمم* : هرگاه تنش برشی به میزان تنش مجاز برسد تسلیم رخ می‌دهد.
- *فرضیه ماکسیمم انرژی* : هرگاه انرژی ذخیره‌شده به حد معینی برسد تسلیم رخ می‌دهد.
- *فرضیه انرژی هیدرواستاتیکی*

معمولاً برای مصالح ترد از فرضیه تنش برشی ماکسیمم و برای مصالح نرم از فرضیه انرژی استفاده می‌شود.

شکل کامل دایره مور برای بررسی تنش‌های ماکسیمم:

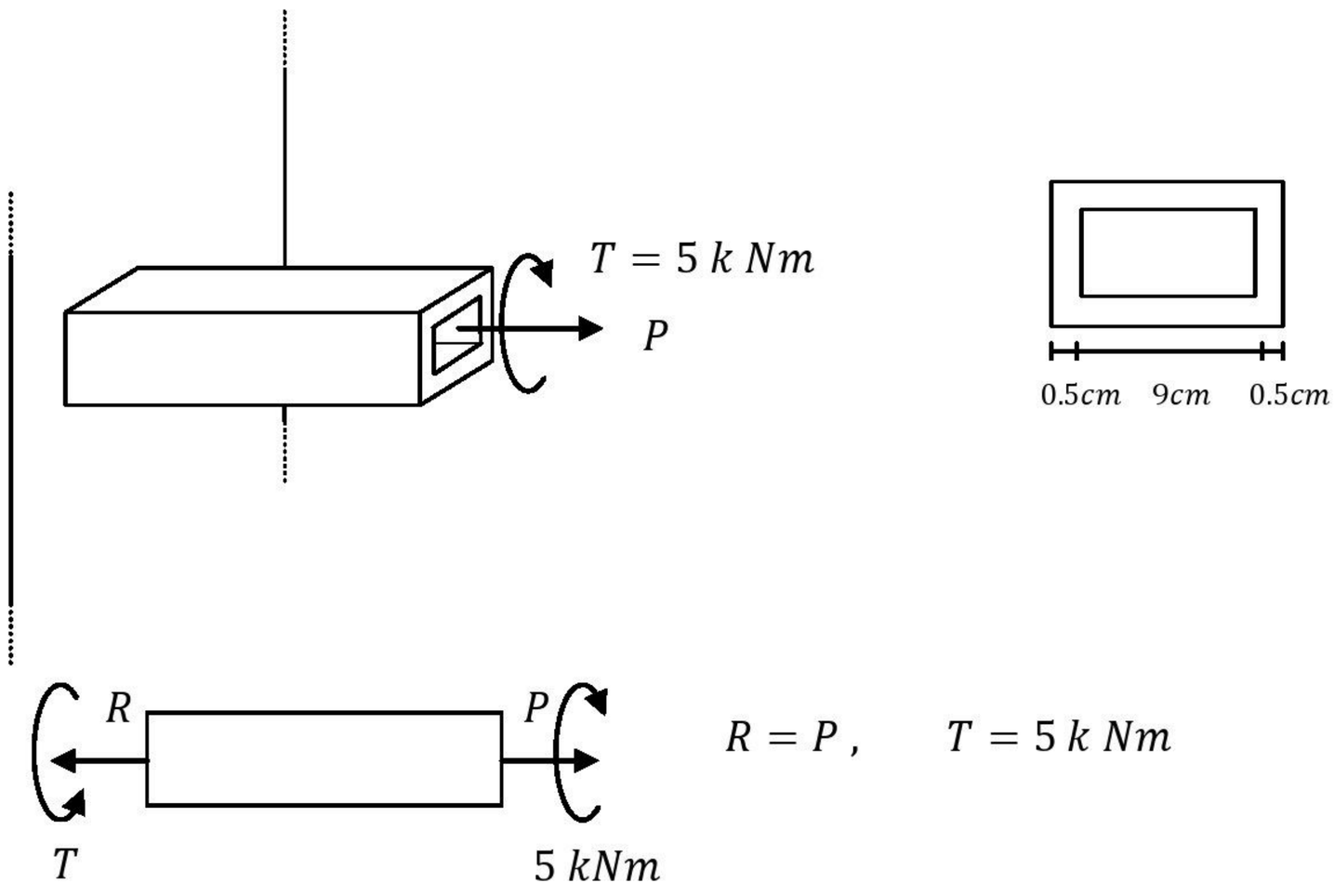


دایره ❶ دایره اصلی، دایره ❷ دایره بین نقطه صفر و σ_{II} و دایره ❸ دایره بین نقطه صفر و σ_I است.

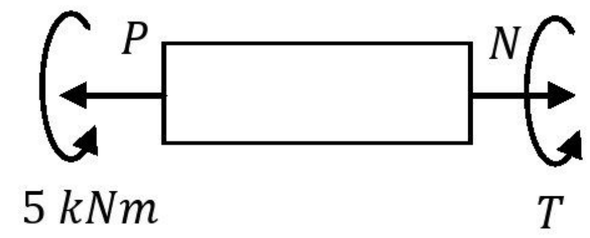
طبق این دایره، هرگاه سطح مورد نظر موازی محورها باشد، روی دایره حرکت می کنیم ولی نقاط هاشورخورده بیان گر مکان هندسی تمام سطوح مورب ممکن که بتوان برش زد می‌باشد.

نکته: دو دایره ❷ و ❸ حاصل از دوران حول دو سطح اصلی دیگر است.

❖ ***مثال.*** *بار* P *را طوری تعیین کنید که بر اساس فرضیه برش ماکسیمم تنش برشی ماکسیمم از* 80 MPa *تجاوز نکند.*



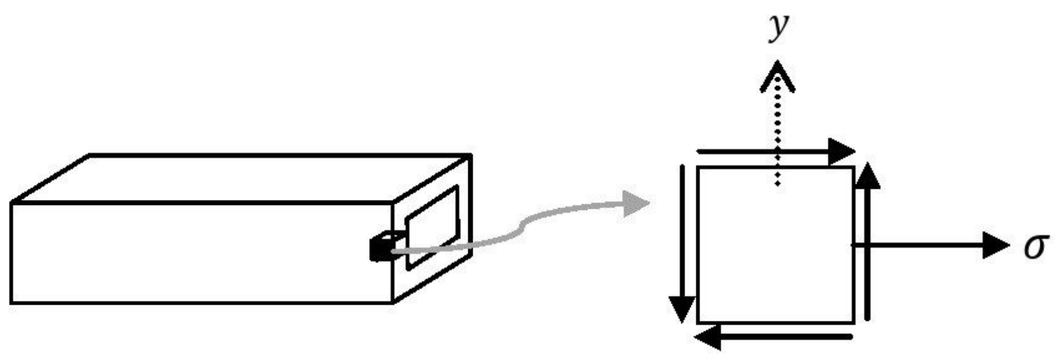
$R = P\ ,\qquad T = 5\ k\ Nm$

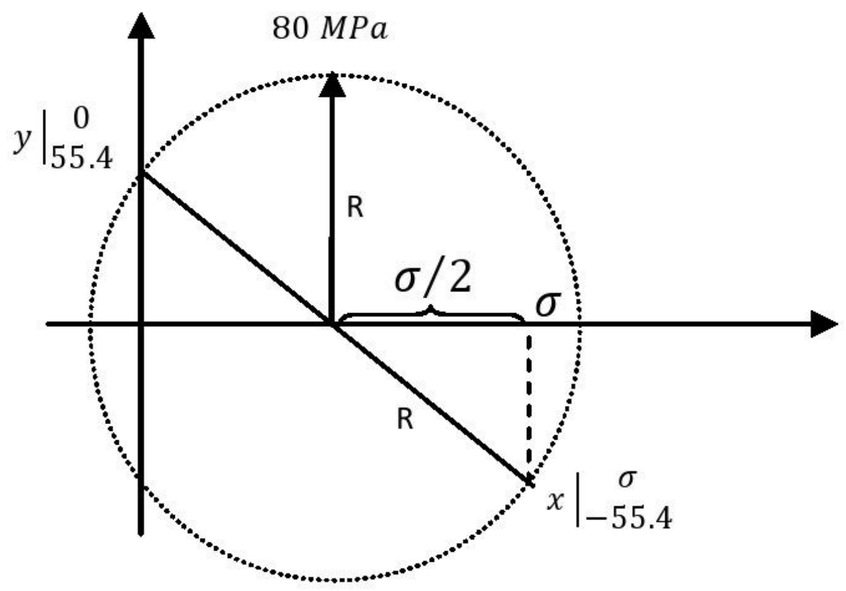


$$N = P, \qquad T = -5\ k\ Nm$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \ \rightarrow \ \sigma = \frac{P}{19 \times 10^{-4}}$$

$$f = \tau t \ \rightarrow \ \tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{5\times10^3}{2(9.5\times9.5)\times10^{-4}\times0.5} = 55.4\ MPa$$





$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (55.4)^2} \quad \rightarrow \quad R = \tau_{max} = 80\ MPa \quad \rightarrow \quad \sigma = 115.43\ MPa$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \rightarrow \quad P = 219\ kN$$