جزوه دینامیک

فهرست

فصل اول:
سینماتیک نقاط مادی

حرکت مستقیم الخط

سرعت لحظه اي : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

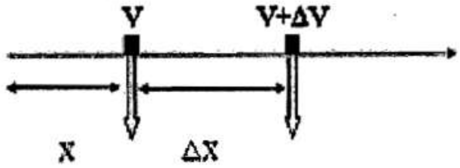
سرعت متوسط : $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

سیستم/واحد	جرم	طول	زمان	نیرو
SI	Kg	m	s	$Kg.m/s^2$
FPS	$lb.s^2/ft$	Ft	s	lb

$Slug = lb\,.\,s^2/ft$, $g = 32.2\ ft/s^2$, $1ft = 12\ inch$, $1\ inch = 1'' = 2.54\ cm$, $1ft = 1' = 30\ cm$

$x =$ موقعیت $\quad v =$ سرعت

$a =$ شتاب



شتاب لحظه ای $= a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

شتاب متوسط $= \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{((v+\Delta v)-v)}{(t+\Delta t)-t}$

$\Delta t \to 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x},\ v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}\ ,\ a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx}\ , vdv = adx$$

حرکت مستقیم الخط یکنواخت: (a= 0)

$a = 0 \Rightarrow v =$ ثابت $\Rightarrow x = x_0 + vt$, $\quad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow vdt = dx \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^{x} dx$

حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت: (a:ثابت)

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow adt = dv \Rightarrow \int_0^t adt = \int_{v_0}^{v} dv \Rightarrow at = v - v_0 \to v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_x^{x_0} dx \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0\ + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

حرکت نقطه مادی

۱- اگرشتاب تابع زمان باشد:

$$a=f(t)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow f(t)dt=dv\Rightarrow\int_0^t f(t)dt=\int_{v_0}^{v}dv\Rightarrow v=g(t)$$

$$v=g(t),v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^t vdt=\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t g(t)dt\Rightarrow x=h(t)$$

۲- اگر شتاب تابع مکان باشد:

$$a=f(x)\quad,\quad adx=vdv=f(x)dx=vdv\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{v_0}^{v}vdv=\frac{1}{2}(v^2-{v_0}^2)\Rightarrow v=g(x)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g(x)\Rightarrow\frac{dx}{g(x)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{g(x)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=h(x)\Rightarrow x=j(t)$$

۳- اگر شتاب تابع سرعت باشد:

$$a=f(v)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}=f(v)\Rightarrow\frac{dv}{f(v)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dv}{f(v)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=g(v)\Rightarrow v=h(t)$$

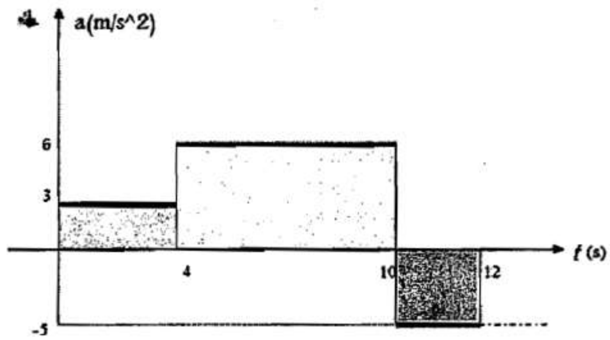
$$vdv=adx\Rightarrow vdv=f(v)dx\Rightarrow\int_{v}^{v}\frac{vdv}{f(v)}=\int_{x_0}^{x}dx\Rightarrow x=j(v),\quad v=h(t)=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int h(t)dt=\int dx$$

۴- ارتباط بین معادله و سرعت و شتاب:

$$a=\frac{dv}{dt}\rightarrow dv=adt\ ,\ \int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t}^{t_2}adt\Rightarrow V_2-V_1=\int_{t_1}^{t_2}adt\ ,\ a=\frac{dv}{dt}\ ,\ v=\frac{dx}{dt}\ ,\ v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2}adt$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}vdt$$

مثال: مطلوب است نمودار منحنی $x\text{-}t$, $v\text{-}t$ در بین $0<t<20$ وهمچنین سرعت وموقعیت نقطه مادی درزمان $t=12\ (s)$ و مسافت طی شده تا $12\ s$. ($x_0=0$ و $v_0=-18m/s$)



$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v_4}dv=\int adt\Rightarrow v_4=v_0+12=-18+12=-6\ \ m/s$$

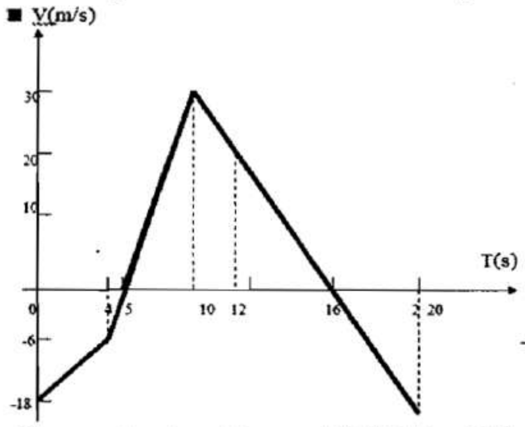
$$v_{10}=v_4+6(6)=-6+36=30\ \ m/s\Rightarrow v_{12}=v_{10}+2(-5)=30-10=20\ \ m/s\Rightarrow\qquad\Rightarrow$$

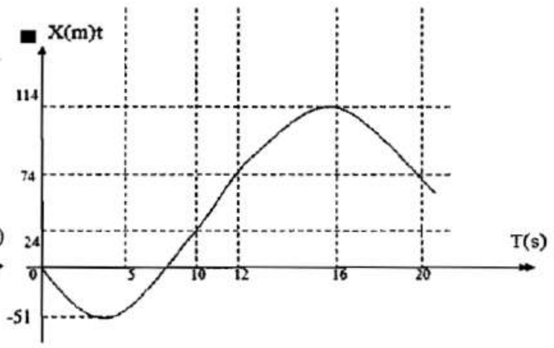
$$v_{20}=v_{12}+8(-5)=-20\ \ m/s$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow\int_{x_0=0}^{x_4}dx=\int_0^{20}vdt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4=x_0+\int_0^{u}vdt=0-\frac{1}{2}(18+6)(4)=-48m\ ,\ x_5=x_4+\frac{1}{2}(6)(-1)=-51\ m\ ,\ x_{10}=x_5+\frac{1}{2}(30)(5)=24\ m$$

$$x_{12}=x_{10}+\frac{1}{2}(30+20)(2)=74m, x_{16}=x_{12}+\frac{1}{2}(20)(4)=114m\quad ,\quad x_{20}=x_{16}+\frac{1}{2}(4)(-20)=74\ m$$





t=12:   مسافت طی شده = 74+51+51 = 176 m

$$vdv=adx\quad ,\quad \frac{1}{2}(v^2-v_0{}^2)=\int adx\quad ,\quad v=(v_0{}^2+2\int adx)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: با توجه به نمودار v-x، مطلوبست ترسیم نمودار a-x و زمان لازم برای رسیدن به موقعیت $x=400\ (m)$

$$0\le x\le 200\Rightarrow v=0.2x+10\Rightarrow\quad a=v\frac{dv}{dx}=(0.2x+10)(0.2)$$

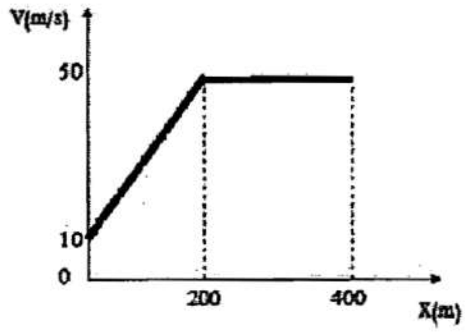
$$\Rightarrow\quad a=0.04x+2\quad ,\quad v=0.2x+10$$

$$200\le x\le 400\Rightarrow v=50\quad ,\quad a=50(0)=0$$

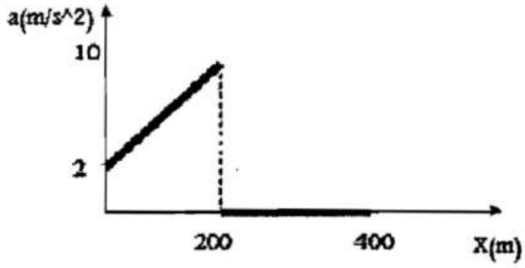
$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow\int_0^{t}dt=\int_0^{200}\frac{dx}{0.2x+10}$$

$$x(m)\Rightarrow t=\frac{1}{0.2}Ln(0.2x+10)_0^{200}$$

$$t=5[Ln(40+10)-Ln(10)]\Rightarrow t=8.05(s)$$



$$dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow\int_{8.05}^{t}dt=\int_{200}^{400}\frac{dx}{50}\Rightarrow t-8.05=\frac{x}{50}]_{200}^{400}\ \rightarrow t=12\ \ .05(s)$$



حرکت نسبی چندین نقطه مادی

موقعیت مطلق نقطه $x_B = B$ ، موقعیت مطلق نقطه $x_A = A$

$x_{B/A} = x_B - x_A$ ، موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه $A = x_{B/A} = x_B - x_A$

سرعت نسبی نقطه A نسبت به B

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A}) = \frac{d}{dt}(x_B) - \frac{d}{dt}(x_A) = \dot{x}_{B/A} = \dot{x}_B - \dot{x}_A \Rightarrow v_{B/A} = v_B - v_A \quad :$$

سرعت مطلق $B = v_B = v_{B/A} + v_A$

$$\frac{d}{dt}(v_{B/A}) = \frac{d}{dt}(v_B) - \frac{d}{dt}(v_A) \Rightarrow \ddot{x}_{B/A} = \ddot{x}_B - \ddot{x}_A \quad , \quad a_B = a_{B/A} + a_A$$

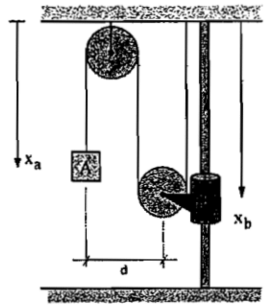
شتاب مطلق $B = a_B = a_{B/A} + a_A$

حرکت وابسته چند جرم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب داریم:

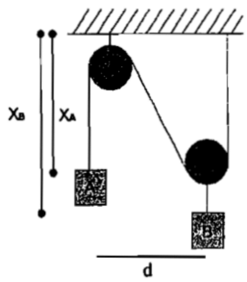
$L=$ ثابت , $(x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$

$x_A + 2x_B = c'$, $v_A + 2v_B = 0$, $a_A + 2a_B = 0$



توجه : جهت مثبت را به سمت پایین گرفتیم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم:



$L=$ ثابت , $L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$

$[d =$ ثابت $, \dot{d} = 0 \ , \ \ddot{d} = 0]$

$$\dot{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_A + \frac{1}{2}(d^2 + x_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B.\dot{x}_B) + \dot{x}_B$$

$\ddot{L} = 0$

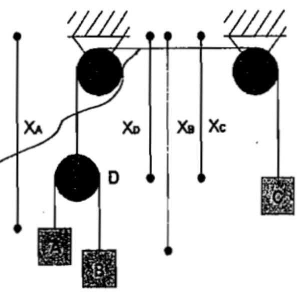
$L_1 + x_A + C_1$, $L_2 = \sqrt{d^2 + x_B^2}$, $L_3 = x_B - C_3$

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم:

$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1$, $x_A + x_B - 2x_D = C_1$, $x_D + x_C = C_2$

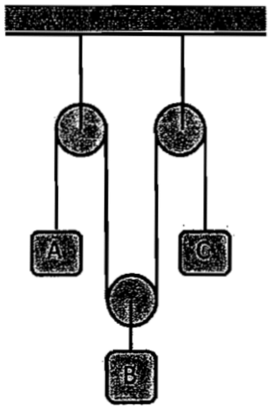
$v_A + v_B - 2v_D = 0$, $v_D + v_C = 0$

$a_A + a_B - 2a_D = 0$, $a_D + a_C = 0$



این طول همواره ثابت است

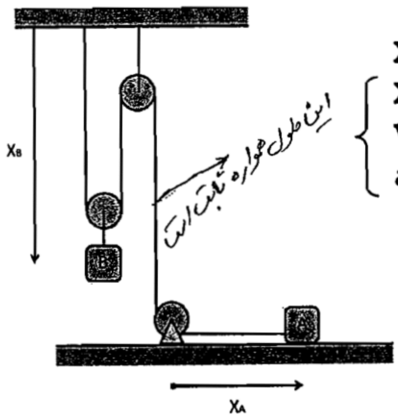
مثال :



$$X_A + X_B + X_B + X_C = Cte$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + 2X_B + X_C = Cte \\ V_A + 2V_B + V_C = 0 \\ a_A + 2a_B + a_C = 0 \end{array} \right.$$

مثال :



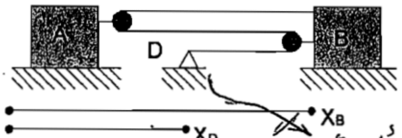
$$X_B + X_B + C1 + X_A = Cte$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + 2X_B = Cte \\ V_A + 2V_B = 0 \\ a_A + 2a_B = 0 \end{array} \right.$$

مثال: اگر $V_B = 18\ m/s$ (ثابت و در جهت x) مطلوبست:

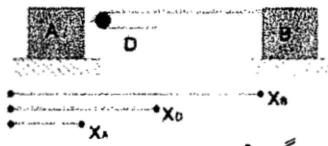
الف) سرعت بلوک A ب) سرعت نقطه D کابل

ج) سرعت نسبی A نسبت به B



مبدأ را جای ثابت می‌گیریم.

حل:



$(x_B - x_A) + (x_B - x_A) + x_B = C \quad , \quad 3x_B - 2x_A = C \quad , \quad 3V_B - 2V_A = 0$

$V_A = 1.5V_B = 3/2(18) = 27\ m/s \Rightarrow V_A = 27\ m/s \rightarrow$

$(x_B - x_A) + (x_D - x_A) = c_1 \quad , \quad x_B + x_D - 2x_A = c_1 \quad , \quad V_B + V_D - 2V_A = 0$

$18 + V_D - 2(27) = 0 \Rightarrow V_D = 36\ m/s \rightarrow$

روش دیگر:

$(x_B - x_D) + x_B = c_2$

در واقع از هر قسمت به دلخواه مورد نیاز مناسب می‌توان نخ را قطع کرد و روابط را نوشت

$2x_B - x_D = c_2$

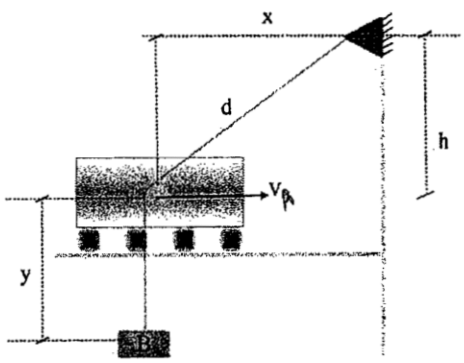
$2V_B - V_D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_D = 2V_B = 36\ m/s \rightarrow$

$V_{A/B} = V_A - V_B = [\,27 \rightarrow\,] - [\,18 \rightarrow\,] = 9\ m/s \rightarrow$

مثال: مطلوب است سرعت B نسبت به A

$V_A = ?$

$V_B = ?$



حل:

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = [V_A \leftrightarrow] + [V_{B/A} \updownarrow] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$V_A = \dot{x}$$

$$L = d + y \quad \text{ثابت} \quad \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = |v_{B/A}| = |\dot{d}| \qquad d = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{d} = \frac{x\dot{x}}{d}$$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{d}\right)^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{d^2}}$$

$$V_B = \dot{x}\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)} \qquad V_B = V_A\sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}}$$

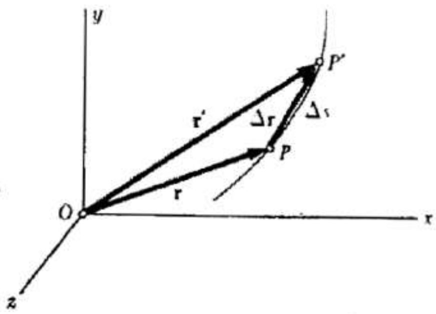
حرکت منحنی الخط

سرعت متوسط:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{d\vec{r}}{ds})(\frac{ds}{dt})$$

$$\vec{v} = (\frac{ds}{dt})(\frac{d\vec{r}}{ds}) \Rightarrow \vec{v} = (\frac{ds}{dt})\vec{e}_t$$

$\vec{e}_t = \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_t$ ار واحد مماس بر مسیر حرکت.

شتاب متوسط $= \vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

شتاب لحظه ای $= \vec{a} = \lim \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$0\Delta t \to$

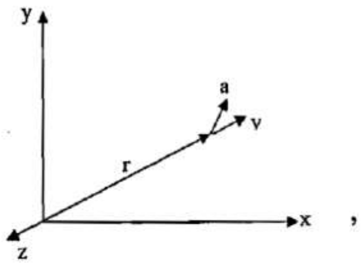
$\vec{r} =$ بردار موقعیت , $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} =$ سرعت نقطه , $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} =$ شتاب نقطه

مولفه های متعامد سرعت و شتاب

$$r = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k} =$ مولفه های بردار های واحد

$x = x(t)\ ,\ y = y(t), z = z(t)$



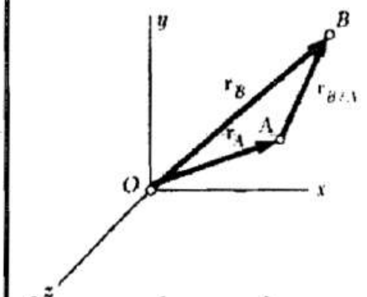
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d}{dt}(\vec{i}) + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d}{dt}(\vec{j}) + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d}{dt}(\vec{k})$$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$,

$v_z = \dot{z}$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

حرکت نسبی



موقعیت نقطه $\vec{r_A} = A$

موقعیت نقطه $\vec{r_B} = B$

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه A $= \vec{r_B} - \vec{r_A} = \vec{r}_{B/A}$

$\Rightarrow \vec{r_B} = \vec{r_A} + \vec{r}_{B/A}$

سرعت نسبی نقطه B نسبت به A :

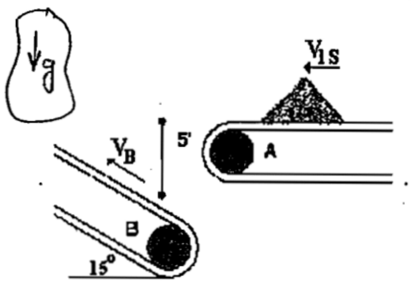
شتاب نسبی نقطه B نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

* **مثال:** سرعت نسبی شن و ماسه نسبت به تسمه B؟ ($V_{S/B}$ به هنگام ریختن روی تسمه)



$v_{1S} = 6\,ft/s \quad , \quad v_B = 8\,ft/s$

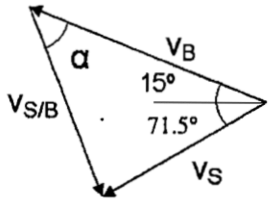
$\vec{v}_{S/B} = \vec{v}_S - \vec{v}_B$

$\vec{v}_s = \vec{v}_{sx} + \vec{v}_{sy} \qquad v_{sx} = 6\,ft/s \leftarrow \quad v_{sy} = \sqrt{2g(5)} = \sqrt{2(32.2)(5)} = 17.94\,ft/s \downarrow$

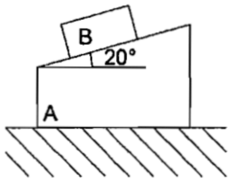
$\Rightarrow \vec{v}_{2S} = [6 \leftarrow] + [17.94 \downarrow] = 18.92\ ft/s$

$v_{2S/B} = \sqrt{v_B^2 + v_S^2 - 2v_B v_s \cos 86.5} = 20.01\,ft/s$

$$\frac{Sin(\alpha)^\circ}{18.92} = \frac{Sin(15+71.5)^\circ}{20.01} \Rightarrow \alpha = 70.69^\circ$$



مثال: بلوك A با شتاب ثابت $80mm/S^2$ به سمت چپ درحال حركت است و بلوك B باشتاب نسبي ثابت $120\,{mm}/{s^2}$ به سمت بالا روي بلوك A در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق B.

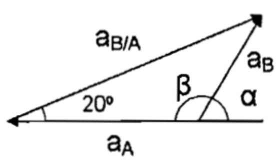


* وقتی دو جسم روی هم حرکت می‌کنند سرعت جسمی که روی دیگری است نسبی است.

حل:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_B = \sqrt{120^2 + 80^2 - 2(120)(80)\cos 20}$

$$\left.\begin{array}{l} a_B = 52.5\,{mm}/{s^2} \\ \dfrac{\sin\beta}{120} = \dfrac{\sin 20^\circ}{52.5} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 128.6^\circ \qquad \alpha = 51.4^\circ$$



مولفه‌های مماسی و نرمال

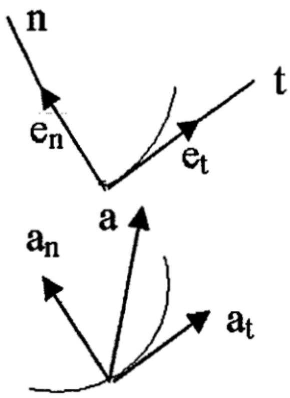
$\vec{e}_t =$ بردار واحد مماسي

$\vec{e}_n =$ بردار واحد عمودي

$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad , \qquad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \ , \ \vec{v} = v\vec{e}_t$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \ , \ \vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$

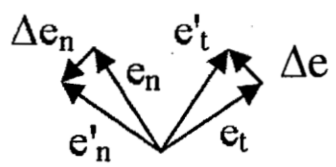
$$\frac{d_{\vec{e}t}}{dt} = (\frac{d_{\vec{e}t}}{d\theta})(\frac{d\theta}{ds})(\frac{ds}{dt}) \quad \boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$



شعاع خمیدگی:

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{d^2y / dx^2}$$

$$\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)}$$



$$\rightarrow\frac{de_t}{d\theta}=1\ \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\lim\frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}=1$$

$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n$ چون بر t عمود است و مقدار 1 را نيز داراست.

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v(\frac{d\vec{e}_t}{dt})=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v^2/\rho\,\vec{e}_n$$

با معادل گذاري $:a_n=\frac{v^2}{\rho}$

پس بهدست آورديم $:\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{v}{\rho}\vec{e}_n$

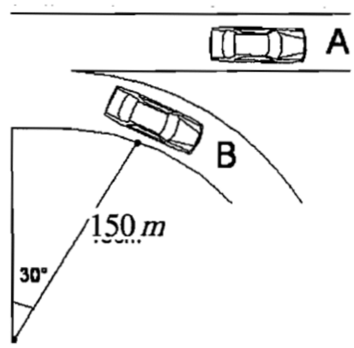
(در حركت مستقيم الخط يكنواخت)

$$\begin{cases}\vec{v}=v\vec{e}_t\\ \vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{cases}\qquad a=0\Rightarrow\ \begin{matrix}\frac{dv}{dt}=0\\ \frac{v^2}{\rho}=0\end{matrix}\qquad \begin{cases}\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n\\ \frac{d\vec{e}_n}{d\theta}=-\vec{e}_t\end{cases}$$

مثال:

$20.8m/s=v_A=\lfloor 75km/h\rightarrow\rfloor\qquad a_A=1.5m/s^2\qquad \vec{v}_{A/B}=?$

$11.1m/s=V_B=40km/h\qquad a_b=-8.9m/s^2\qquad \vec{a}_{A/B}=?$



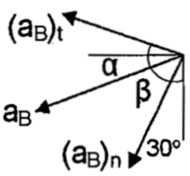
حل:

$V_A=20.8m/s$

$V_B=11.1m/s$

$\vec{V}_{A/B}=\vec{V}_A-\vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B}=[20.8\rightarrow]-[11.1]$



$$\vec{V}_{A/B}=\sqrt{(20.8)^2+(11.1)^2-2(20.8)(11.1)Cos30}\Rightarrow V_{A/B}=12.5m/s\ \frac{\sin\alpha}{11.1}=\frac{\sin 30}{45}\rightarrow\alpha=26.4°$$

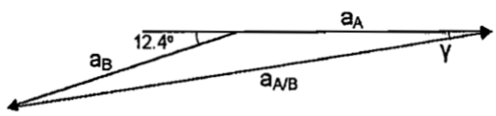
$(a_B)_t=0.9\,(a_B)_n=V^2/\rho=\frac{11.1^2}{150}=0.8m/s^2$

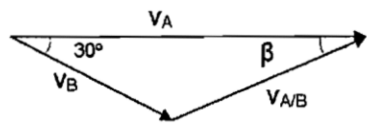
$\rightarrow a_B=1.2m/s^2\quad \beta=12.4°$

$a_{A/B}=\sqrt{(1.5)^2+(1.2)^2-2(1.5)(1.2)\,Cos167.6}=2.70m/s^2$

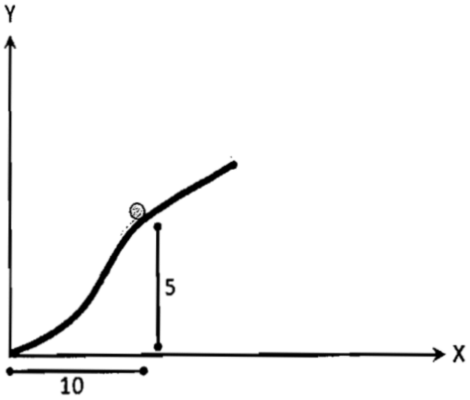
$\frac{\sin\gamma}{1.2}=\frac{\sin 167.6}{2.7}\rightarrow\boxed{\gamma=5.6°}$

$\boxed{\vec{a}_{A/B}=2.7}$





مثال : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطهء A ، 6m/s
و در حال افزایش با نسبت $2m/s^2$ است . مطلوبست : $\vec{V}_A$, $\vec{a}_A$



$$\begin{cases} y = (1/20)\,x^2 \\ dy/dx = (1/10)\,x \longrightarrow \\ d^2y/d^2x = (1/10) \end{cases}$$

at: $x=10$ $\qquad dy/dx = 1$

$\vec{V}_A = 6\,(m/s)$ $\;45^\circ$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_t = 2\ (m/s^2)$ $\;45^\circ$

$\rho = [1 + y'^2]^{3/2} / y'' = 28.28$

$\vec{a}_n = (v^2/\rho) = 1.27\ (m/s^2)$ $\;45^\circ$

$|a_A| = \sqrt{2^2 + 1.27^2}$

$\vec{a}_A = 2.37\ (m/s^2)$

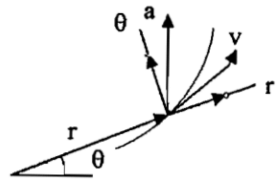
12.5°

(مختصات قطبی) مولفه‌های شعاعی و عرضی

$\theta =$ مختصات زاویه‌اي

$\vec{e}_r =$ بردار واحد شعاعي

$\vec{e}_\theta =$ بردار واحد عرضي



بردار موقعیت:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = d(r\vec{e}_r)/dt = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\,\vec{e}\,r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}}$$

$$\frac{d\vec{e}\,r}{dt} = (\frac{d\vec{e}\,r}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{rd\vec{e}\,r}{dt} = \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{v_\theta} = v_\theta\vec{e}_\theta \qquad \boxed{v_\theta = r\dot{\theta}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \;,\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}\,\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\,\theta\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$ ، شتاب زاویه‌اي : $\ddot{\theta} = \alpha\, rad/s^2$

مختصات استوانه‌ای

بردار موقعیت:

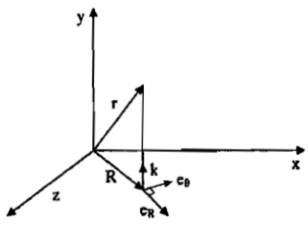
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z} = \mathrm{R}\,\vec{\mathrm{e}}_R + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ddt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{dd}{dt}(r\vec{e}_R) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{k}$$

$$v_R = \dot{R} \;,\; v_\theta = R\dot{\theta} \;,\; v_Z = \dot{z}$$



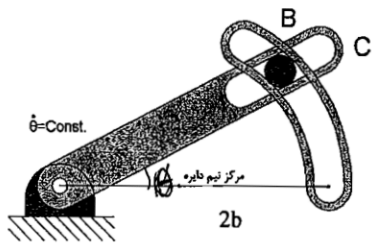
بردار شتاب:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \\ a_Z = \ddot{z} \end{cases}$$

مثال: سرعت و شتاب نقطه‌ي B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند بیابید.

حل:



$r = 2b\cos\theta$

$v_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(2b\cos\theta) = 2b(-\sin\theta)(\dot{\theta})$

$v_\theta = r\dot{\theta} = 2b\dot{\theta}\cos(\theta)$

$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot{\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = ?$

$\ddot{r} = 2b[(-\cos\theta)(\dot{\theta})^2 + (-\sin\theta)\ddot{\theta}] = -2b\dot{\theta}^2\cos\theta$

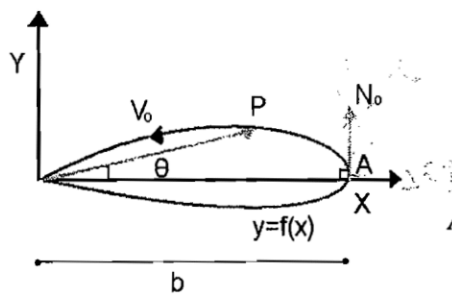
$a_r = -2b\dot{\theta}^2\cos\theta - 2b\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -4b\dot{\theta}^2\cos\theta$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -4b\dot{\theta}^2\sin\theta$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\dot{\theta}^2$

مثال: در مسیرداده شده، سرعت ثابت و برابر $v_\circ$ است مطلوبست شتاب متحرک در موقعیت A؟ ($R = b\cos 3\theta$)

حل:



$A = \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$ $\quad a_A \begin{cases} a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$

$R = b\cos 3\theta$ زیرا در A، θ صفراست.

$\dot{R} = b(-\sin 3\theta)(3)(\dot{\theta}) = -3b\dot{\theta}\sin 3\theta$

$\ddot{R} = -3b\ddot{\theta}\sin 3\theta - 9b\dot{\theta}^2\cos 3\theta$

$v_A = \begin{cases} v_r = \dot{R} = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} = v_\circ \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v_\circ}{b} \end{cases}$

@A

$(R=b) \rightarrow b\cos 3\theta = b$

$A \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\circ}{b}, R = b, \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\frac{v_\circ^2}{b}$

$\rightarrow \cos 3\theta = 1$

$a_A = a_r = -9\frac{v_\circ^2}{b} - b(\frac{v_\circ^2}{b^2}) \Rightarrow \boxed{a_A = -10\frac{v_\circ^2}{b}}$

$\rightarrow \cos 3\theta = \cos 2k\pi$

$\rightarrow 3\theta = 2k\pi$

$\rightarrow \sin 3\theta = \sin 2k\pi = 0$

So $\rightarrow \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\frac{v_\circ^2}{b}$

فصل دوم:
سینتیک نقطه مادي
(KINETICS)

حذف بخش‌ها

12.12
12.13

مکانیک فضایی

قانون کپلر

قوانین نیوتن

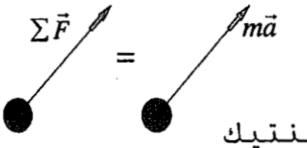
قانون اول : $\Sigma\vec{F}=0$

قانون دوم : $\sum\vec{F}=m\vec{a}$, $\quad \vec{F}=m\vec{a}\ ,\ \Sigma\vec{F}=\dfrac{d}{dt}(m\vec{v})\ ,\ \Sigma\vec{F}=m\vec{a}$

$\sum\vec{F}-m\vec{a}=0$

نیروي مؤثر یا نیروي اینرسي (شبه نیرو) $=ma$

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\qquad \Sigma\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$



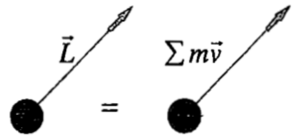
دیاگرام آزاد نیروها   دیاگرام سینتیك

اصل دالامبر

قانون دوم نیوتن باید نسبت به یك دستگاه مختصات ثابت باشد.

ممنتوم خطي ،یا اندازه حرکت خطي (Linear Momentum)

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum m\vec{v}=\vec{L}\\ \sum\vec{F}=\dot{\vec{L}}\end{array}}$$



واحد ممنتوم:

$kg\ \ m/s=(kg.m/s^2)s=N.s$ $\Leftarrow SI$

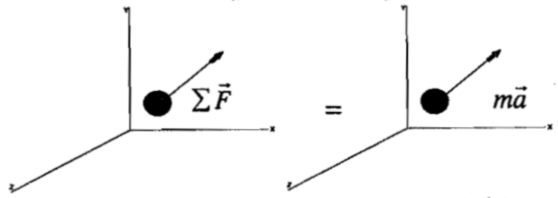
$Ib.s$ $\Leftarrow FPS$

مختصات سه بعدي کارتزین

$+\rightarrow \sum F_x=ma_x=m\ddot{x}$

$+\uparrow \sum F_y=ma_y=m\ddot{y}$

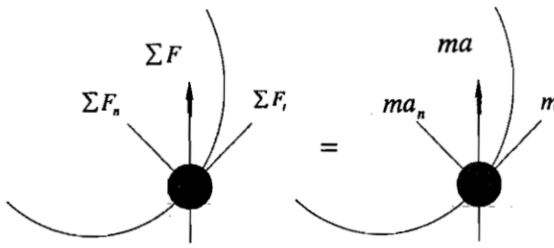
$+\swarrow \sum F_z=ma_z=m\ddot{z}$



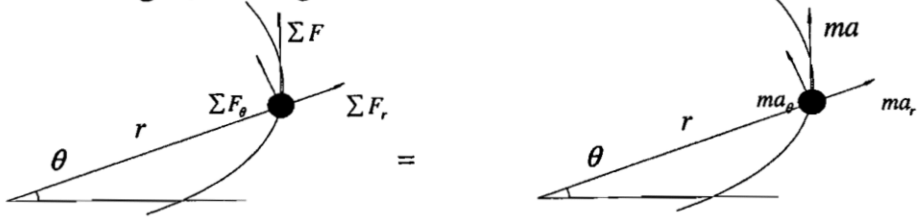
مختصات مؤلفه هاي مماسي و عمودي

$+\uparrow\ \Sigma F_t=ma_t=m(\dfrac{dv}{dt})$

$+\leftarrow\ \Sigma F_n=ma_n=m\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)$

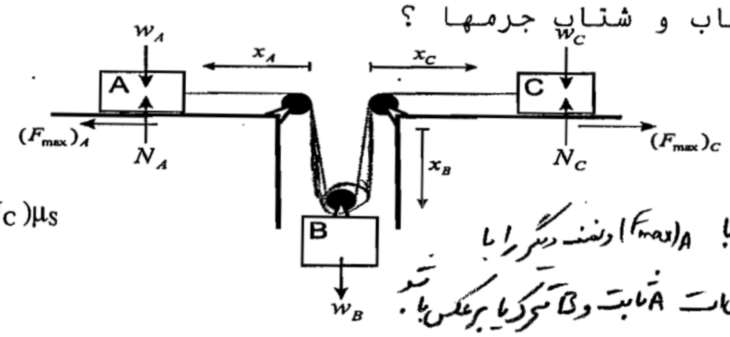


مختصات قطبي (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی)



$$\boxed{\begin{array}{l}+\rightarrow\ r\ \ \Sigma F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\\ +\uparrow\ \Sigma F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\end{array}}$$

مثال : سه وزنه به جرم های $m_A=5\ kg, m_B=10\ kg, m_C=10\ kg$ مطابق شکل زیر به هم متّصل می باشد. اگر ضریب اصطکاک بین وزنه های A,C و سطح $\mu_S=0.24$, $\mu_K=0.20$ باشد؛ مطلوبست وضعیت سیستم؟ ومقدارکشش طناب و شتاب جرمها ؟



حل :

$F_{max}=\mu_S.N=(N_A+N_C)\mu_S$

$W_A=5\ g=N_A$

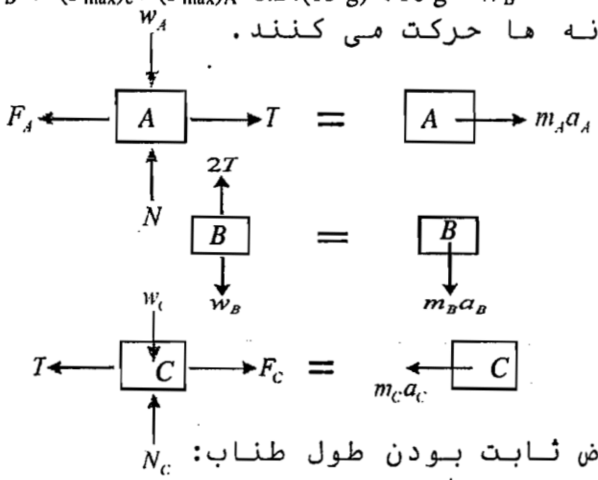
$W_C=10\ g=N_C$

$W_B=10\ g=N_B$

* بهتر بود نقش پس را با $(F_{max})_A$ و نقش دیگر را با $(F_{max})_B$ نشان دهیم زیرا امکان است A ثابت و B و C متحرک یا برعکس باشد.

$F_{max} < W_B \rightarrow (5\ g+10\ g)\ 0.24 < 10\ g = W_B \rightarrow (F_{max})_c + (F_{max})_A = 0.24(15\ g) < 10\ g = W_B$

پس وزنه ها حرکت می کنند.



$$+\rightarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_A=m_A.a_A$$
$$\Rightarrow T-0.2(5g)=5a_A$$

$$+\downarrow \Sigma\vec{F}=m_B\vec{a}_B \Rightarrow W_B-2T=m_B a_B$$
$$\Rightarrow 10g-2T=10a_B$$

$$+\leftarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_C=m_c a_c$$
$$\Rightarrow T-0.2(10g)=10a_c$$

جهت حرکت

با فرض ثابت بودن طول طناب:

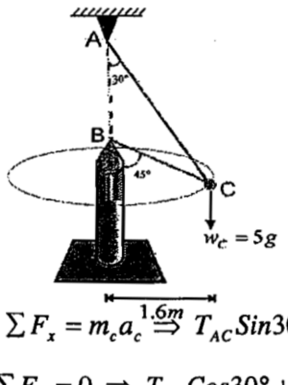
رابطه سینماتیکی

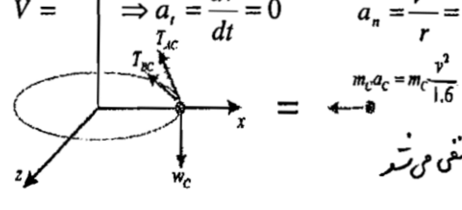
$$-x_A+2x_B-x_C=cte \Rightarrow -V_A+2V_B-V_C=0 \Rightarrow -a_A+2a_B-a_C=0 \Rightarrow a_B=1/2(a_A+a_C)$$

با استفاده از چهار معادله بالا داریم:

$a_A=4.76\ m/s^2 \rightarrow$, $a_B=3.08\ m/s^2 \downarrow$, $a_c=1.40\ m/s^2 \leftarrow$, $T=33.6\ (N)$

مثال : اگر جسم C به جرم 5 kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد ، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره دو کابل BC,AC در کشش باشند. ($g=9.81\ m/S^2$)





$V=$ ثابت $\Rightarrow a_t=\frac{dv}{dt}=0$ $\quad a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{v^2}{1.6}$

حرکت با سرعت یعنی شتاب نشود، اگر منفی می‌شد بی‌اثر بود.

$$\begin{cases} +\leftarrow \Sigma F_x=m_c a_c \Rightarrow T_{AC}Sin30°+T_{BC}Sin45°=\frac{5}{1.6}v^2 \\ +\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow T_{AC}Cos30°+T_{BC}\cos 45^o-5g=0 \end{cases}$$

حل :

شرایط کشش

$$\begin{cases} T_{AC}\sin 30°+T_{BC}\sin 45°=\frac{5}{1.6}v^2 \\ T_{AC}\cos 30°+T_{BC}\cos 45°=5g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AC}=0 \Rightarrow \tan 45°=\frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.96\,m/s \\ T_{BC}=0 \Rightarrow \tan 30°=\frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.01\,m/s \end{cases}$$

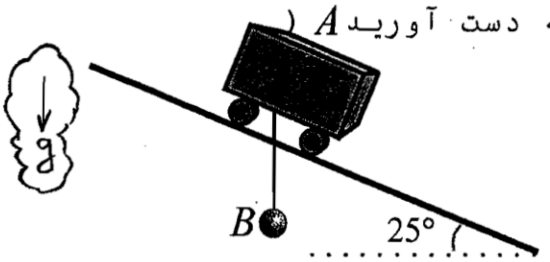
$\Rightarrow m/s\ \ 3.01 < v < 3.96\ \ m/s$

حال اگر v کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید طناب با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و داریم :

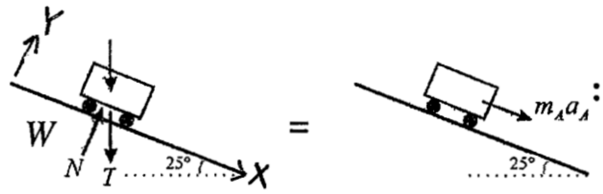
$v = 4 \Rightarrow T_{AC} < 0$

$v = 3 \Rightarrow T_{BC} < 0$

مثال : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A وکشش در کابل در لحظه شروع حرکت به دست آورید ($m_A = 20\ kg, m_B = 15\ kg$)



حل :



$+\searrow \sum F = m_A a_A$

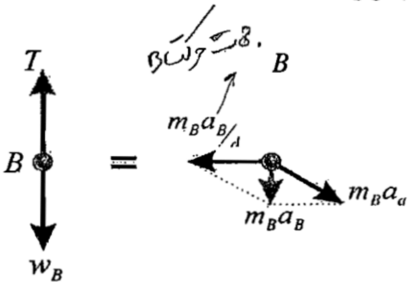
$\Rightarrow NCos90 + (W_A + T)\sin 25° = 20 a_A$

$(20g + T)\ \sin 25 = 20\ a_A$ (1)

چون در لحظه اول که A به سمت راست حرکت مي كند ، B مي خواهد به سمت چپ برود :

$$\begin{cases} + \leftarrow \sum F = ma \Rightarrow 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25° & (3) \\ + \downarrow \sum F = ma \Rightarrow W_B - T = m_B a_A \sin 25° & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 106.6 \quad N \\ a_A = 6.4 \quad m/s^2 \searrow \\ a_{B/A} = 5.8 \quad m/s^2 \leftarrow \end{cases}$$



ممنتوم زاویه ای (لنگر حرکتی) $\vec{H}_\circ$

ANGULAR MOMENTUM - MOMENT OF MOMENTUM

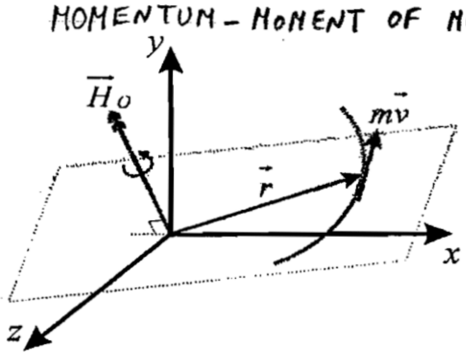
$\vec{L} = m\vec{v}$

$\vec{r} =$ موقعیت

$\vec{H}_\circ = \vec{r} \times m\vec{v} =$ ممنتوم

$H_\circ = r(mv)\sin\varphi$

$\vec{H}_\circ \perp (\vec{r}, m\vec{v})$



واحد ممنتوم زاویه ای :

$kg\ m/s^2 \quad \Leftarrow SI$

$lb.ft.s \quad \Leftarrow FPS$

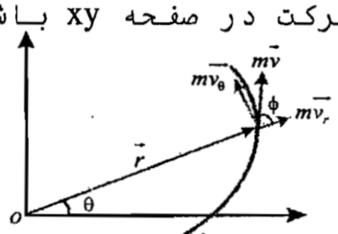
$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k \qquad\qquad m\vec V = m\left(v_x\vec i + v_y\vec j + v_z\vec k\right)$$

$$\vec H_\circ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\times m \Rightarrow \vec H_\circ = m\left(yv_z - zv_y\right)\vec i + m\left(zv_x - xv_z\right)\vec j + m\left(xv_y - yv_x\right)\vec k$$

$$\vec H_\circ = H_x\vec i + \vec H_y\vec j + \vec H_z\vec k \qquad\qquad \dot{\vec H}_\circ = \frac{d(\vec r\times m\vec v)}{dt} = 0 + \vec r\times\frac{d(m\vec v)}{dt} = \vec r\times(m\vec a) = \sum\vec M_\circ$$

شعاع نسبت به زمان نرمال نمیشود.

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم :

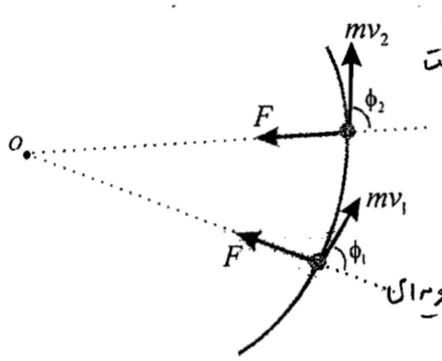


$$\vec H_\circ = H_{\circ z}\vec k$$

$$\vec H_\circ = \vec r\times m\vec v \Rightarrow H_\circ = rmv\sin\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} H_\circ = rmv_\theta \\ v_\theta = r\dot\theta \end{array}\right\}\Rightarrow H_\circ = mr^2\dot\theta$$

حرکت تحت اثر نیروی مرکزی(Central Force)



اگر نیروئی روی جرم وارد گردد که همه جرم به سمت یک نقطه خاص باشد ،به آن حرکت نیروی مرکزی می نامند.

قانون گرانش : $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$

حفظ ممنتوم زاویه ای یا بقای ممنتوم زاویه ای

$$r_1 m v_1\sin\varphi_1 = r_2 m v_2\sin\varphi_2 = \dots$$

$$r_1 v_{\theta 1} = r_2 v_{\theta 2} = \dots \quad \text{ثابت}$$

حالات خاص

حفظ ممنتوم : اگر

$$\sum\vec F = \dot{\vec L}\Rightarrow \qquad \sum\vec F = 0\Rightarrow\dot{\vec L} = 0\Rightarrow\vec L_1 = \vec L_2$$

بقای مومنتوم

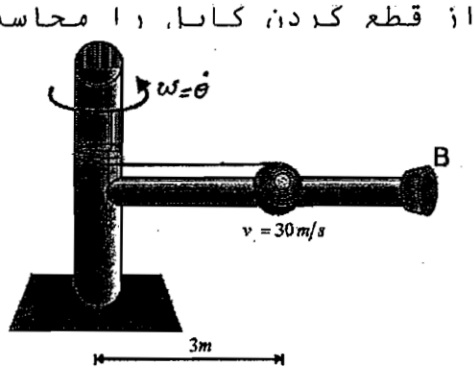
حفظ ممنتوم زاویه ای : اگر

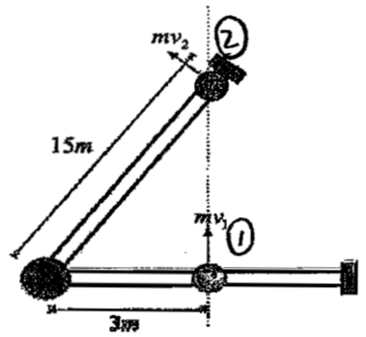
$$\sum\vec M_\circ = \dot{\vec H}_\circ\Rightarrow \qquad \sum\vec M_\circ = 0\Rightarrow\dot{\vec H}_\circ = 0\Rightarrow\left(\vec H_\circ\right)_1 = \left(\vec H_\circ\right)_2$$

بقای مومنتوم زاویه ای: H_o ثابت است

$$\rightarrow r_1\times mv_1 = r_2\times mv_2 = \dots$$

مثال : اگر جرم گلوله 4 kg و از جرم میله صرف نظر شود، سرعت گلوله به هنگام رسیدن به نقطه B پس از قطع کردن کابل را محاسبه کنید.

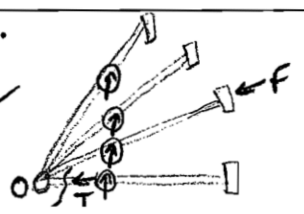




حل :

$$\sum\vec M_\circ = \dot{\vec H}_\circ = 0\Rightarrow\left(\vec H_\circ\right)_1 = \left(\vec H_\circ\right)_2\Rightarrow 3\times(mv_1) = 15\times(mv_2)\Rightarrow 3\times 30 = 15\times v_2\Rightarrow v_2 = 6 \quad m/s$$

هر وقت در حرکت نقطه را توانیم صفر در نظر بگیریم (جهت نیروها از آن نقطه بگذرند) در آن صورت از $\dot{\vec H}_o = \sum\vec M_o = 0$ استفاده می‌کنیم.



فصل سوم:
سينتيك نقطه مادي
(روشهاي انرژي و ممنتوم)

کارِ نیرو

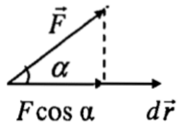
کار محدود انجام شده :

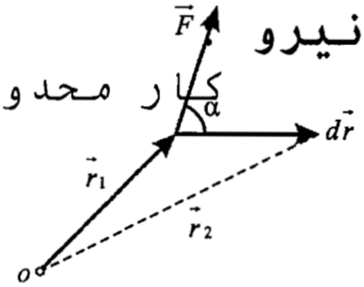
$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = |\vec{F}|\cos\alpha \, dr$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$





واحدکار: (SI): (ژول) N.m (J) (FPS): lb. ft:

واحد لنگر: (SI): N.m (FPS): ft-lb:

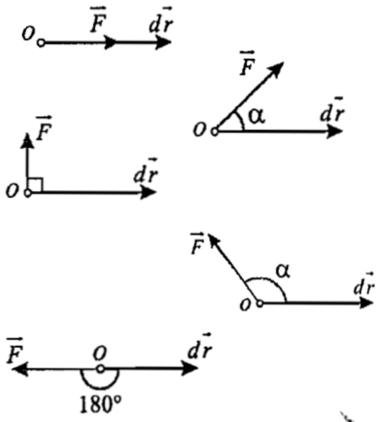
1) $dU = F.dr > 0$ $\quad \alpha = 0$

2) $dU = F\,dr\cos\alpha > 0$ $\quad 0 < \alpha < 90$

3) $dU = 0$ $\quad \alpha = 90$

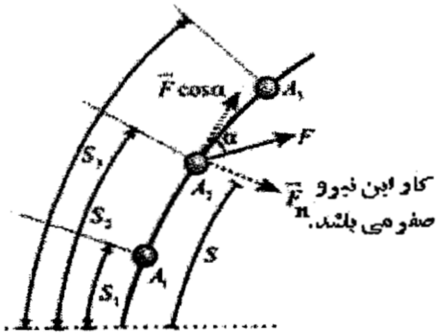
4) $dU = F\,dr\cos\alpha < 0$ $\quad 90 < \alpha < 180$

5) $dU = -F.dr < 0$ $\quad \alpha = 180$



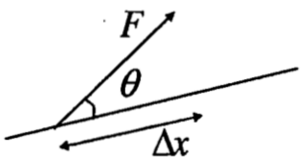
$$U_{1\to 3} = \int_{A_1}^{A_3} (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k})$$

$$U_{1\to 3} = \int_{A_1}^{A_3} dU = \int_{A_1}^{A_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_3} F\cos\alpha\, ds = \int_{S_1}^{S_3} \vec{F}_t.ds$$



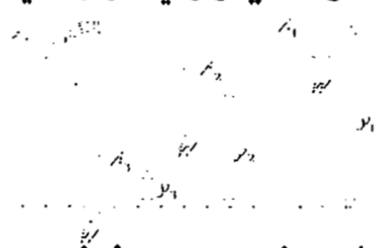
کار یک نیروي ثابت :

$$U_{1\to 2} = \int dU = F(\Delta x)\cos\theta$$



كار نيروي وزني :

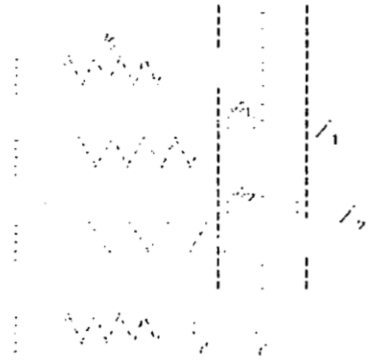
$$F_x = 0 \quad , \quad F_z = 0 \quad , \quad F_y = cte$$

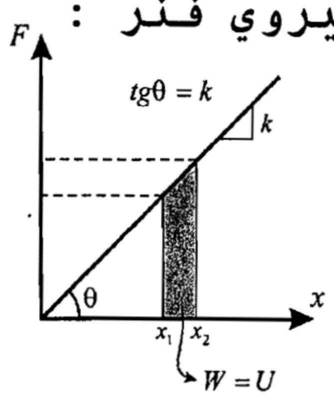


$$U_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \Rightarrow$$

$$U_{1\to 2} = -W \Delta y = -W (y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

كار نيروي فنر :





$$F = kx \quad , \quad dU = -F dx$$

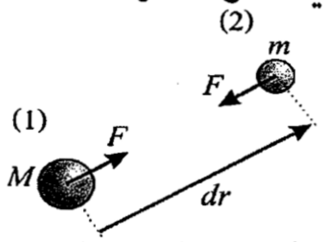
$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} dU = \int_{x_1}^{x_2} -(kx)\, dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow (U_{1\to 2})_e = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x$$

در حالت بازگشت به حالت اوليه كار نيروي فنر مثبت است.

كار نيروي گرانش :

$$F = G\frac{mM}{r^2}, G = 66.7\times 10^{-12}\left(\frac{m^3}{kg.s^2}\right)$$

$$U_{1\to 2} = \int dU = \int_{r_1}^{r_2} F\, dr \Rightarrow U_{1\to 2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$



انرژي جنبشي واصل كار و انرژي :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

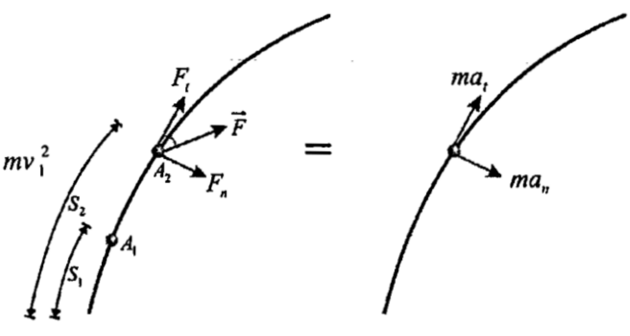
$$F_t = ma_t \Rightarrow F_t = m\frac{dv}{dt} = m\left(\frac{dv}{ds}\right)\times\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$F_t ds = mv dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad , T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

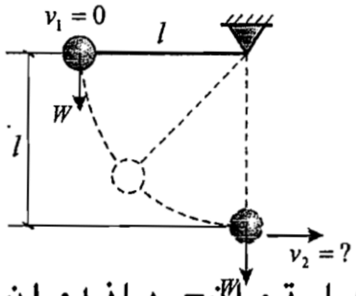
$$K = T = \frac{1}{2}mv^2$$ انرژی جنبشی



مثال :در شكل، اگر گلوله از وضعيت ۱ رهاشده باشد، سرعت آنرا در وضعيت ۲ بيابيد؟

(توجه : کار نیروی کششی صفر است زیرا همیشه عمود بر مسیر حرکت است.)

حل:



$$\left.\begin{aligned} &T_1 + U_{1\to2} = T_2 \\ &T_1 = 0, T_2 = \frac{1}{2}m v_2^2 \\ &(U_{1\to2})_g = mgl \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 + mgl = \frac{1}{2}m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gl}$$

قدرت یا توان- راندمان یا بازده :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\sum(\vec{F}.d\vec{r})}{dt} = \sum \vec{F}.\vec{v}$$

قدرت $P = \sum(\vec{F}.\vec{v})$

واحد: (SI) : Watt=N.m/s =J/s , (FPS): lb.ft/s , 550 lb.ft/s= 1HP

$P = \frac{dT}{dt} = F.v$ قدرت $T = \frac{1}{2}mv^2$, $\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = (ma)v = Fv = p \Rightarrow$

$P = \frac{dT}{dt}$, $U_{1\to2} = T_2 - T_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$

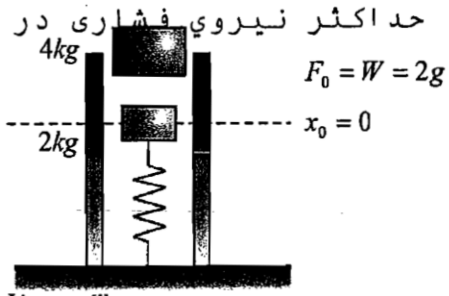
توان متوسط $= \overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$, $\overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}.dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} dT = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$

$\overline{P} = \frac{U_{1\to2}}{\Delta t}$, $\eta_m = \frac{P_{out}}{P_{in}} < 1$ راندمان مکانیکي

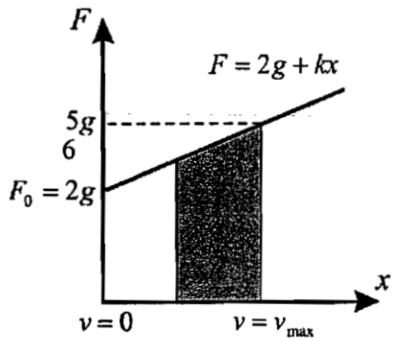
$\eta_e =$ راندمان الکتریکي , $\eta_{th} =$ راندمان حرارتي , $\eta = \eta_e.\eta_m.\eta_{th} < 1$

مثال: اگر بلوک 4 kg را روي بلوک 2 kg قرار دهیم، تناوب آغاز مي گردد؛ مطلوبست: (K=400 N/m)

الف) حداکثر سرعت بلوک 4 kg ؟ ب) حداکثر نیروي فشاری در فنر ؟



حل:



الف)

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$T_1 = 0$, $T_2 = \frac{1}{2}m v^2$

$$\left.\begin{aligned} &U_{1\to2} = (U_{1\to2})_g + (U_{1\to2})_e \\ &(U_{1\to2})_e = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)x = -2gx - 200x^2 \\ &(U_{1\to2})_g = 6gx \end{aligned}\right\} \Rightarrow U_{1\to2} = 4gx - 200x^2 = \frac{1}{2}m v^2$$

حداکثر سرعت :

$$\frac{d(U_{1\to2})}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0.098(m) , \quad v_{max} = 0.8(m/s)$$

حداکثر نیروی فشاری زمانی است که، سرعت صفر می شود (اما جایی که تعادل استاتیکی داریم : $a=0$)
ب)

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$\frac{1}{2} m v_{\max}{}^2 = mgh_{\max} \;\Rightarrow\; h_{\max} = \frac{1}{2g} v_{\max}{}^2 \;\Rightarrow\; T_{\max} = k.h_{\max}$

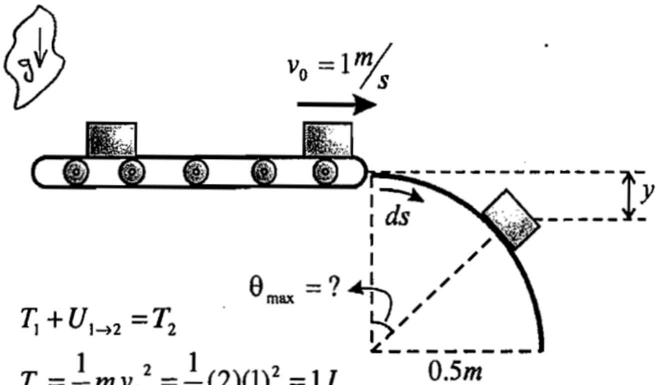
$v_2 = 0$

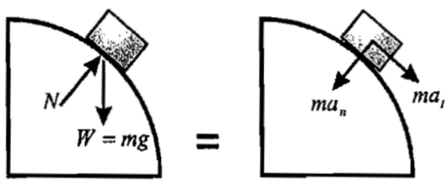
$4(9.81)x - 200x^2 = 0$

$x = 0.196\,(m)$

$F_{\max} = 2(9.81) + 400(0.196) = 98.1(N)$

مثال: بسته های 2kg توسط یک تسمه نقاله به روی یک رمپ دایره ای شکل با سرعت 1m/s می افتند. مطلوبست، حداکثر زاویه ای که این بسته ها از سطح جدا می شوند؟





$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$T_1 = \frac{1}{2} m v_0{}^2 = \frac{1}{2}(2)(1)^2 = 1J$

$U_{1\to2} = W.y = mgr(1-\cos\theta_{\max}) = g(1-Cos\theta_{\max})$, $T_2 = v^2$

$\Rightarrow\; 1 + mgr(1-\cos\theta_{\max}) = v^2 \;\Rightarrow\; 1 + (1-Cos\theta_{\max})g = v^2 \quad (I)$

: $\cancel{N}=0 \;\Rightarrow N - W\cos\theta_{\max} = -ma_n$ هنگام جدا شدن $\Rightarrow -mgCos\theta_{\max} = -m\frac{v^2}{0.5}$ (II)

$(I, II) \Rightarrow \cos\theta_{\max} = \frac{2v^2}{g} \;\Rightarrow \theta_{\max} = 42.7^\circ$

$N=0 \leftarrow$ شرط جدا شدن

راه ۲ $+\downarrow \sum F_t = +\downarrow ma_t$

$w\sin\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt} \longrightarrow mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \longrightarrow g\sin\theta = \frac{dv}{dt} = a ds = a_t(0.5d\theta)$ $rd\theta$

$\longrightarrow v dv = g\sin\theta(0.5)d\theta \longrightarrow \int_1^v v dv = \int_0^{\theta_{max}} 0.5g\sin\theta d\theta$

$\longrightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_1^v = -0.5g\,Cos\theta\Big|_0^{\theta_{max}} \longrightarrow \frac{1}{2}(v^2-1) = \frac{-1}{2}g(Cos\theta_{max}-1)$

$\longrightarrow v^2 - 1 = -g(Cos\theta_{max}-1) \longrightarrow v^2 = 1 + (1-Cos\theta_{max})$ (I)

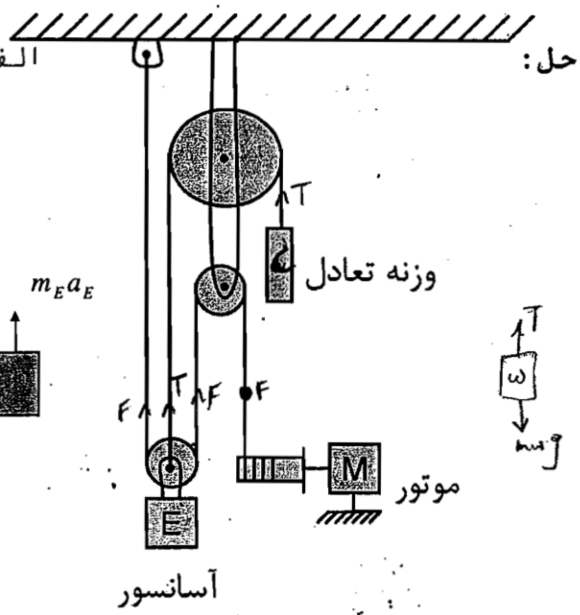
مثال : در شکل زیر مطلوب است توان موتورسیستم بالابر اگر
الف : اگر آسانسور با سرعت ثابت 15 ft/s به سمت بالا در حرکت باشد .
ب : اگر آسانسور با سرعت 15 ft/s و شتاب 3 ft/s^2 به سمت بالا در حرکت باشد .

$(W_c = 2200\,lb, W_E = 5000\,lb, g=32.2\,\frac{ft}{s^2})$

حل:

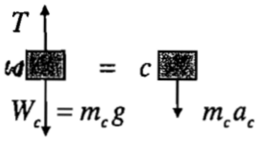
$P = \sum \vec{F}.\vec{v} \Rightarrow P = F.v$

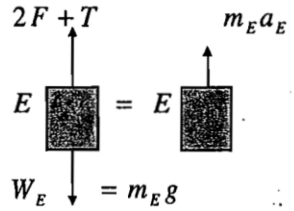
الف:



$m_c g - T = m_c a_c$

(1) $2200 - T = \frac{2200}{g} a_c$





$2F + T - m_E g = m_E a_E$

(2) $2F + T - 5000 = \frac{5000}{g} a_E$

$v_E = cte,\ a_E = 0 \Rightarrow a_c = 0$

$$\begin{cases} 2200 - T = 0 \Rightarrow T = 2200\ (lb) \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400\ (lb) \end{cases}$$

طول کابل متصل به وزنه تعادل ثابت است :

$\uparrow a_E = a_c \downarrow$

طول کابل تا نقطه M نیز ثابت است :

$2X_E + X_m = cte. \Rightarrow 2v_E \uparrow = v_m \downarrow \Rightarrow v_m = 30\ \frac{ft}{s}$

$P_m = (1400)(30) = 42000(lb \cdot \frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{42000}{550} = 76.4(HP)$ Horse power

ب :

$v_E = 15(\frac{ft}{s}) \uparrow, a_E = 3(\frac{ft}{s^2}) \uparrow \Rightarrow a_c = 3(\frac{ft}{s^2}) \downarrow$

با توجه به قسمت الف داریم :

$F = 1735.4(lb)$, $v_m = 30(\frac{ft}{s}) \downarrow$, $P_m = (1735.4)(30) = 52062(lb\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{1735.4 \times 30}{550} = 94.7(HP)$

اصل حفظ انرژي (مکانیکي) :

شرط استفاده از اصل حفظ انرژی آن است که نیروهای ما پایستار و یا محافظه کار باشند. (Conservative Force)

نیروهای ما به دو صورت قابل تقسیم بندی هستند : **نیروهاي پایستار و غیر پایستاریا نا پایستار .**

$U_{friction} = \int \vec{F}_k . d\vec{r}$

اصطکاک

۱:کار نیروهای غیرپایستار به مسیرحرکت بستگی دارد. (غیر پایستار)

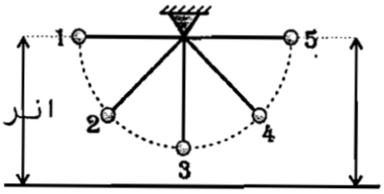
$U_{وزن} = \int \vec{W}.d\vec{r} = \Delta y W$

وزن

۲:کار نیروهای پایستار به مسیرحرکت بستگی ندارد و فقط با متناسب با جابجایی است. (پایستار)

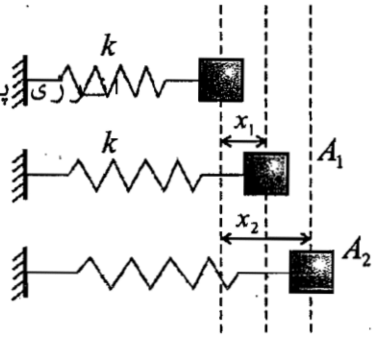
انرژی پتانسیل :

انرژی پتانسیل نیروی وزنی



$$U_{1\to2} = -\Delta y W = Wy_1 - Wy_2$$
$$V_g = Wy$$

انرژی پتانسیل نیروی فنر

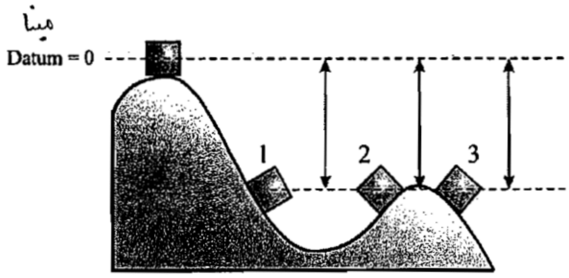


$$U_{1\to2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$
$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$
$$U_{1\to2} = V_1 - V_2$$
$$V_1 = V_{g_1} + V_{e_1}\ ,\ V_2 = V_{g_2} + V_{e_2}$$

اصل حفظ انرژی مکانیکی :

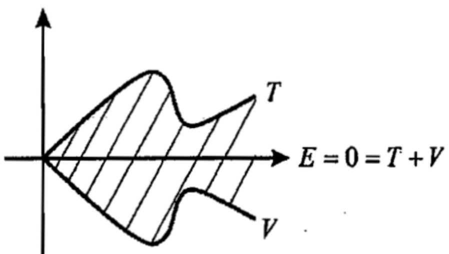
$$\left.\begin{array}{l} T_1 + U_{1\to2} = T_2 \\ T_1 + V_1 - V_2 = T \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n \quad , \quad E = T + V$$



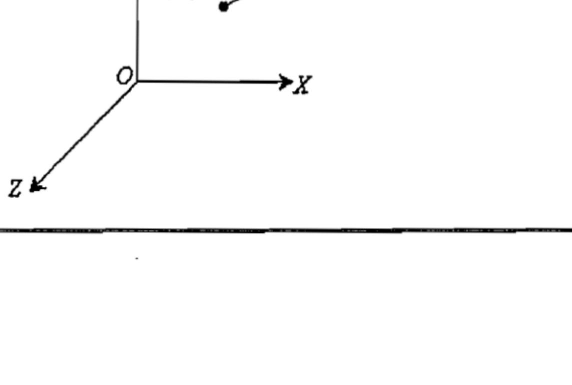
$$V = cte. \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots$$

اگر انرژي مكانيكي ثابت باشد، آنگاه E روي محور y = 0 در نظر $T+V=0$ گيريم و T قرينه ي U مي شود، زيرا:



تابع پتانسيل :

$$V = V_g + V_e$$
$$U_{1\to2} = V_1 - V_2 = -\Delta V \quad , \quad U = V(x,y,z)$$



$$dU = V(x,y,z) - V(x+dx, y+dy, z+dz)$$
$$dU = -dV(x,y,z) = -dV \quad \Rightarrow \quad dU = -dV$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

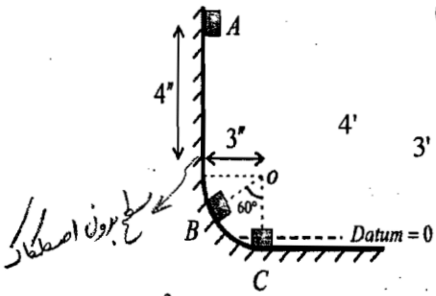
$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$
$$dU = -dV = -[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz] \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -F_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -grad\,\vec{V} \,, \vec{F} = -\nabla\vec{V}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

توجه: هرگاه $\vec{F} = -\nabla\vec{V}$ شود, می توانیم از اصل حفظ انرژی مکانیکی استفاده کنیم .

برای نیروهای وزنی: $V = Wy \;, \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = W \;, \vec{F} = -\vec{W}$

مثال: اگر جسم از نقطه A رها شود، مطلوب است نیروي وارده از سطح به جسم در نقاط B و C ؟ (W=1.25 lb)



حل:

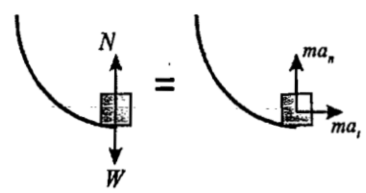
$$\begin{cases} N_B - W\cos 60 = ma_n = m\frac{v_B^2}{\rho} \Rightarrow N_B - 1.25(0.5) = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_B^2}{3}) \\ N_C - W = ma_n = m\frac{v_C^2}{\rho} \Rightarrow N_C - 1.25 = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_C^2}{3}) \end{cases}$$

$$E_A = E_B = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_B + V_B = T$$
$$E_A = T_A + V_A = 0 + 7W = 7(1.25) \;, E_B = 7$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_B^2 + 3(.5)(1.25) = \frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_C^2 = 7(1.25)$$

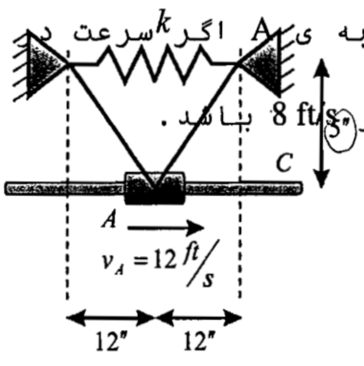
$v_B^2 = 11g \Rightarrow N_B = 5.21(lb)$
$v_C^2 = 14g \Rightarrow N_C = 7.08(lb)$

C :



مثال: مطلوبست نیروی کششی فنر در موقعیت اولیه ی A اگر سرعت د[ر] نقطه ی A برابر 12 ft/s و سرعت طوقه در نقطه ی C برابر 8 ft/s باشد.

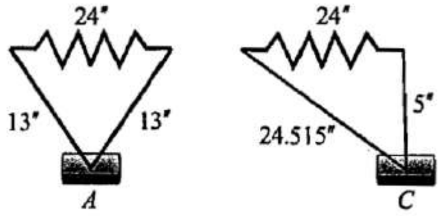
$\frac{ft}{s^2}, g = 32.2 \times 12\frac{in}{s^2}$ (g=32.2 و W=2 lb , K=3 lb/in)



حل :

$$\begin{cases} L_1 = 26+24 = 50 \Rightarrow x_1 = 50 - L \\ L_2 = 53.5'' \Rightarrow x_2 = 53.5 - L \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = 3.5'' \quad ①$$

طول اولیه



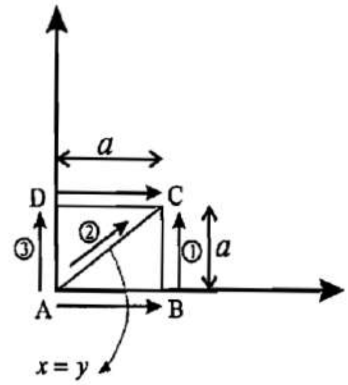
$$E_A = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(144\times 12) + 1.5x_1^{\,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(64\times 12) + 1.5x_2^{\,2} \quad ②$$

$$x_1 = 1.08(in) \quad , \quad F_1 = 3.24(lb)$$

$$\frac{1.08}{12} = 0.09'$$

مثال : اگر $\vec{F} = x^2 y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}$ روي ذره P درصفحه x-y اثر كند، ثابت كنيد كه نيروي $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه کار است و همچنین کار نیروی F روی ذره P را که از نقطه A به نقطه ی C حرکت می کند را حساب کنید.



حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\vec{F} = -grad\vec{V}$$

$$\vec{F}_X = -\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 y$$

$$\vec{F}_Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \end{cases} , \; x^2 \neq y^2$$

پس نيروي F نيروي غير محافظه كار است.

$$\oint F \cdot dr = 0 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \ldots$$

$$U_{A\to C} = \int_A^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^C F_x\,dx + F_y\,dy = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}$$

روش ديگر :

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C}$$

$$U_{A\to B} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^0 F_y\,dy = 0$$

$$U_{B\to C} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = a\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{3}$$

با فرض اينكه پايستار باشد مسير حركت تفاوتي ندارد :

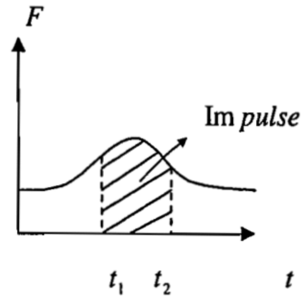
$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C} \Rightarrow \frac{a^4}{2} = 0 + \frac{a^4}{3} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

پس نيروي ما ناپايستار است.

اصل نيروي محرک و ممنتوم و حرکت خطي: (Impulse & Momentum)

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt=md\vec{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\int_{v_1}^{v_2}d\vec{v}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_2=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt+m\vec{v}_1$$



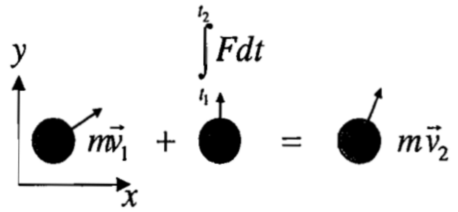
$$\vec{I}_{imp_{1\to2}}=(\int_{t_1}^{t_2}F_x dt)\vec{i}+(\int_{t_1}^{t_2}F_y dt)\vec{j}+(\int_{t_1}^{t_2}F_z dt)\vec{k}$$

اصل ايمپالس و ممنتوم

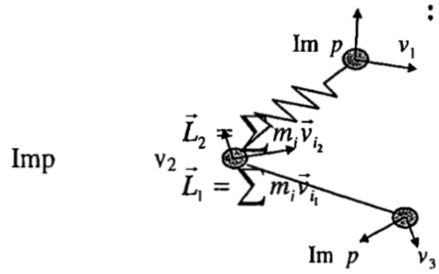
$$\vec{L}_2=\vec{I}_{mp_{1\to2}}+\vec{L}_1$$

واحد ايمپالس: N.s : (SI) lb.s : (FPS)

$$\begin{cases} mv_{2_x}=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt+mv_{1x} & \overset{+}{\rightarrow} \\ mv_{2_y}=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt+mv_{1y} & \overset{+}{\uparrow} \end{cases}$$



چندين جرم :



$$\text{Im}\,p_{1\to2}=\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_1 dt$$

نیروی محرک / ایمپالس

$$\Rightarrow \sum m_i\vec{v}_{i1}+\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=\sum m_i\vec{v}_{i2}$$

حفظ ممنتوم سيستم :

$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=0 \Rightarrow \sum m_i\vec{v}_{i_1}=\sum m_i\vec{v}_{i_2}$$

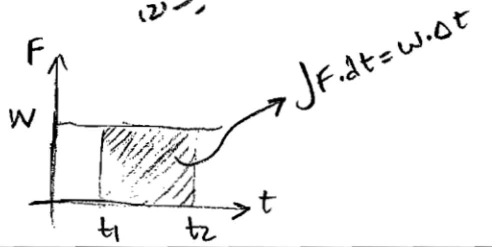
ممنتوم در موقعیت "1"

ممنتوم در موقعیت (2)

$$\vec{L}_1+\vec{I}mp_{1\to2}=\vec{L}_2$$

$$Imp_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

واحد ایمپالس مثل واحد ممنتوم
(N.S)
(lb.S)



روش سوم در حل مسائل دینامیکی

روش اول: قانون دوم نیوتن

روش دوم: کار و انرژی

انواع مسائل برخورد

۱- مسائل ضربه اي ($\Delta t \approx 0.01s$)

درمسائل ضربه ای از اثر وزن اصطکاک و نیروی فنر صرفه نظر مي گردد:

$$t = dt \cong 0 \Rightarrow \int wdt \approx 0 \quad , \quad \int F_e dt \approx 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \approx 0$$

ایمپالس وزن　　　ایمپالس فنر　　　ایمپالس اصطکاک

۲- مسائل غير ضربه اي

در مسائل غير ضربه اي :

$$\Delta t > 0 \Rightarrow \int wdt \neq 0 \quad , \quad \int F_e dt \neq 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \neq 0$$

مثال: اگر از اصطکاک صرفنظر شده باشد, مطلوب است مدت زماني كه A به سرعت :

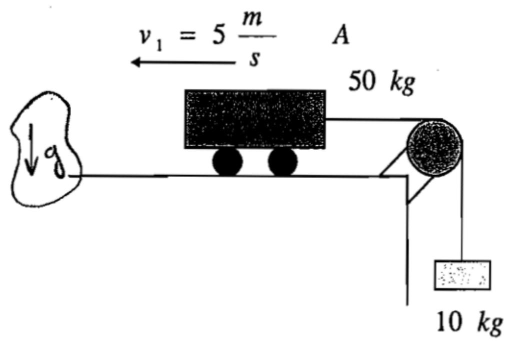
الف: صفر مي رسد .

؟

ب: به 5m/s طرف راست مي رسد ؟

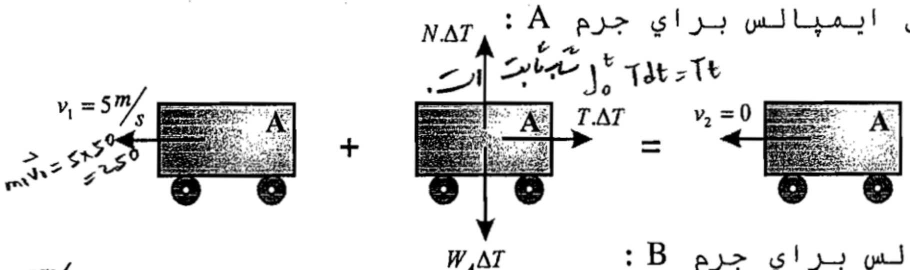
(از اصطکاک صرفنظر شده است.)

(زمانی که سرعت سیستم مجدداً 5 m/s ← می‌شود؟)

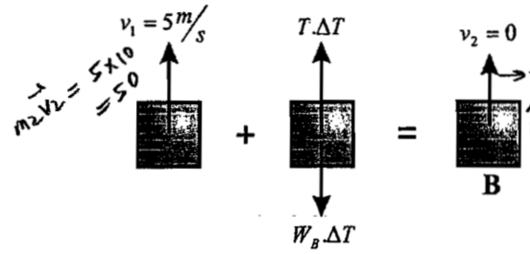


حل:

الف : اصل ايمپالس براي جرم A :



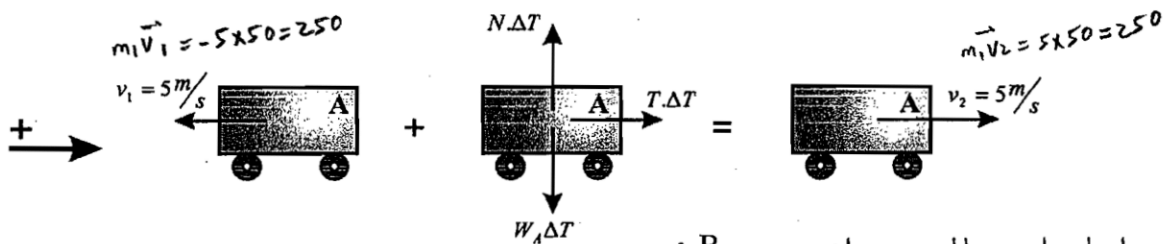
اصل ايمپالس براي جرم B :



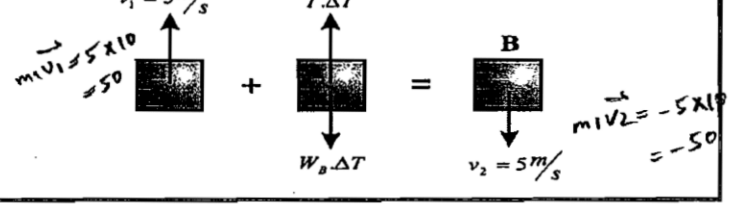
$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{+}\ 1. \quad -250 + T\Delta t = 0 \\ \uparrow + \ 2. \quad 50 + (T - 98.1)\Delta t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{30}{g}$$

$\Delta t = 3.06\ (s)$

ب: اصل ايمپالس براي جرم A :



اصل ايمپالس براي جرم B :



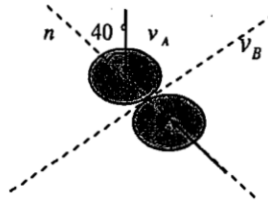
براي جرم B نيز داريم : $(v'_B)_t = (v_B)_t$

اصل ايمپالس و ممنتوم براي كل سيستم : $\xrightarrow{+n} m_A(v'_A)_n \pm m_B(v'_B)_n = m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n$

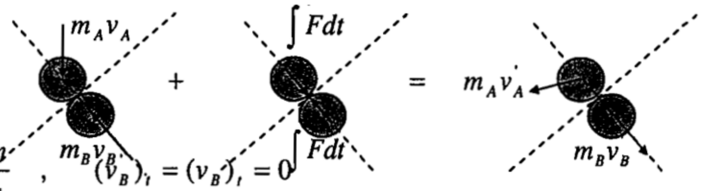
رابطه سرعت هاي نسبي : $e[(v_A)_n - (v_B)_n] = (v'_B)_n - (v'_A)_n$

مثال : سرعت هاي نهايي دو جسم را بعد از برخورد بيابيد ؟(e=0.75)

$(\; m_A = 2.5kg \; , \; m_B = 1.5kg \; , \; v_A = 8\frac{m}{s} \; , \; v_B = 6\frac{m}{s} \;)$



حل:



$(v'_A)_t = (v_A)_t = 8\sin(40°) = 5.15\frac{m}{s} \quad , \quad (v'_B)_t = (v_B)_t = 0$

$+n\nwarrow : m_A(v'_A)_n - m_B(v'_B)_n = -m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n \Rightarrow 2.5(v'_A)_n - 1.5(v'_B)_n = -6.325$

$e = \dfrac{(v'_B)_n + (v'_A)_n}{-(v_A)_n + (v_B)_n} \;\; \Rightarrow \;\; (v'_B)_n + (v'_A)_n = 9.1$

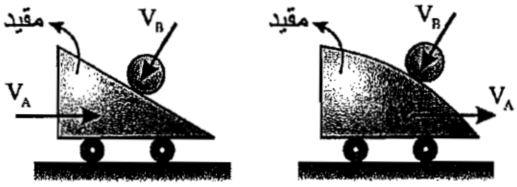
$(v'_A)_n = 1.83\,(\frac{m}{s})\nwarrow \; , \; {v'_A}^2 = (v'_A)_n^{\,2} + (v'_A)_t^{\,2} \Rightarrow v'_A = 5.46\,(\frac{m}{s}) \; , \alpha = \tan^{-1}(\frac{(v'_A)_t}{(v'_A)_n}) = 20.4°$

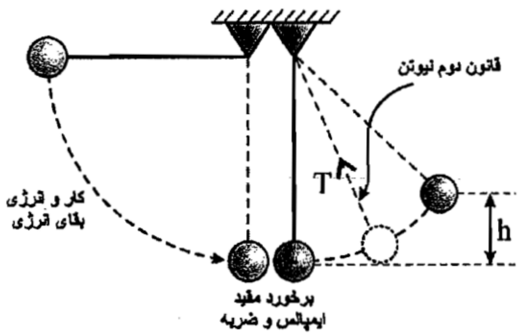
$v'_B = (v'_B)_n = 7.27\,(\frac{m}{s})$ 40°

برخورد مقيد

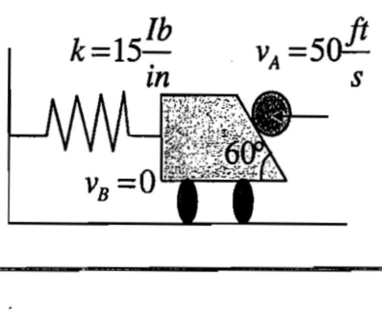
راستاى حركت پس از برخورد مشخص مى باشد.

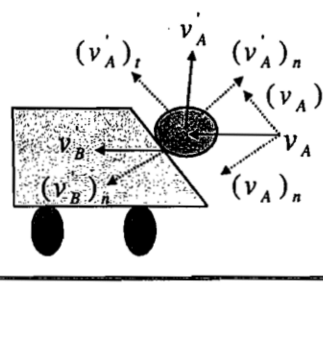
همان روابط قبل صحيح است اما به جاي اصل ايمپالس و ممنتوم در جهت n ، در جهت عمود به ايمپاس با مقدار نامعلوم (مثلا عكس العمل زمين) رابطه را مي نويسيم.





مثال : مطلوبست حداكثر تغيير طول فنر وقتى جسم A به B برخورد كند ؟ (e=0.75, k=15 lb/in)

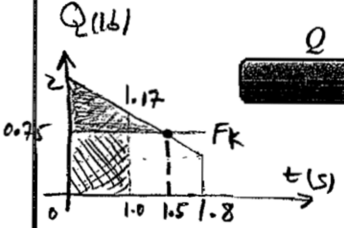


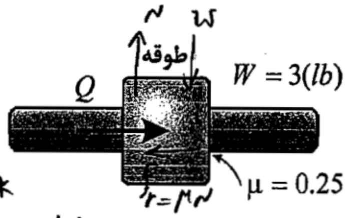


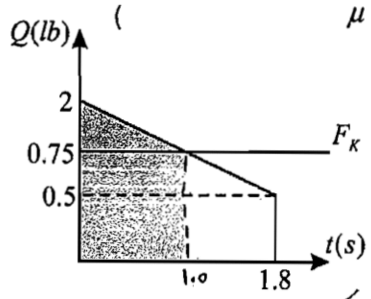
$$\left.\begin{array}{l}1.\quad -250+T\Delta t=250\\ 2.\quad 50+(T-98.1)\Delta t=-50\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta t=\frac{60}{g}$$

$\Delta t = 6.12s$

مثال : مطلوبست سرعت طوقه اگر از حال سکون رها شده باشد در: الف) t=1s ب) t=2 s ج) حداکثر سرعت طوقه ($\mu=0.25$ و W=3 lb)







حل:

$\vec{L}_2 = \sum \vec{I}_{mp_{1\to2}} + \vec{L}_1$, $\vec{L}_1 = mv_1 = 0$, $\sum I_{mp} = \int_0^t Q dt - \int_0^t F_k dt$

$(Imp_{1\to2})_Q - (Imp_{1\to2})_{F_k}$

شروع حرکت از حال سکون

الف: t=1

$0 + I_{mp_{1\to2}} = \frac{3}{g}v$, $\int_0^1 Q dt = \frac{1}{2}(2+1.167) = 1.58\,(lb*s)$, $\int_0^1 F_k dt = 0.75(1) = 0.75\,(lb*s)$

$\Rightarrow v = 8.91\,(ft/s)$

ب: t=2

$0 + I_{mp_{1\to2}} = \frac{3}{g}v$, $\int_0^2 Q dt = \frac{1}{2}(2+0.5)(1.8) = 2.25\,(lb*s)$, $\int_0^2 F_k dt = 0.75(2) = 1.5\,(lb*s)$

$\Rightarrow v = 8.05\,(ft/s)$

براي وقتي كه v=0 است، t=?

$2.25 - 0.75t = 0$, $t = 3(s)$

در ثانیه سوم متحرک از حرکت باز می ایستد و زمانی سرعت ماکزیمم می شود که $\int_0^t Fdt$ و $\int_0^t Qdt$ بیشترین اختلاف را داشته باشند, یعنی در محل تلاقی دو نمودار با هم در t=1.5 s.

$$v_{max} = \frac{1}{2}(2-0.75)(1.5)/(\frac{3}{32.2}) = 10.06\frac{ft}{s}$$

@ t=1s ⟶ v = 8.94 m/s

@ t=2s ⟶ v = 8.05 m/s

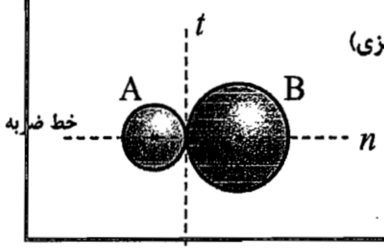
$\vec{0} + \vec{Imp}_{1\to2} = \vec{0}$

$2.25 - 0.75t = 0 \longrightarrow t = 3(s)$

برخورد (ضربه) Impact

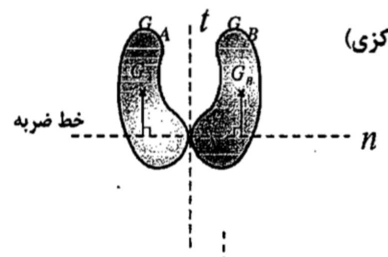
(مرکزی)

۱.مرکزي (مراکز جرم روي خط ضربه قرار دارند.) تماس مادی



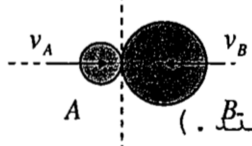
اجسام صلب

۲. غير مركزي (مراكز جرم روي خط ضربه قرار ندارند.)



برخورد مركزي

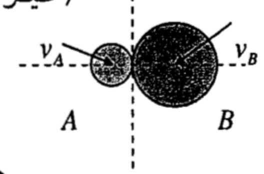
۱.مستقیم (سرعت روی خط ضربه می افتند.)

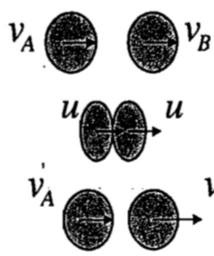


۲.مایل(حداقل یکی از سرعت ها روی خط نیفتد.)

(غیر مستقیم)

*اپسیلن در جهت مماس بر سطوح و وزن که صرف نظر می‌شود.
⇐ فقط اپسیلن در جهت n مد نظر است.



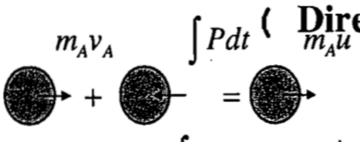


پیش از برخورد

تغییر شکل

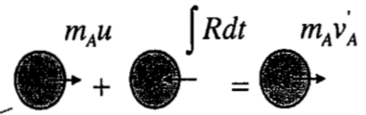
بازگشت

برخورد مستقيم مركزي (Direct Central Impact)



اصل ایمپالس و ممنتوم

مرحله تغییر شکل (Deformation)



مرحله بازگشت (Restitution)

برای کل سیستم

$n \xrightarrow{+}$ $m_Av_A+m_Bv_B+0=m_Av_A'+m_Bv_B'$ از رابطه سرعت نسبی

و

برای جرم A

$$\left.\begin{aligned} +\rightarrow\ & m_Av_A-m_Au=\int Pdt \\ +\rightarrow\ & m_Au-m_Av_A'=\int Rdt \end{aligned}\right\} \Rightarrow e=\frac{\int Rdt}{\int Pdt}=\frac{u-v_A'}{v_A-u}$$

ضریب بازگشت $0\le e\le 1$

برای A

براي جسم B نیز به همین ترتیب

داریم : $e=\dfrac{v_B'-u}{u-v_B}$

با حذف u از این دو رابطه ، رابطه سرعت هاي نسبی بدست می آید $e(v_A-v_B)=v_B'-v_A'$

ضريب بازگشت (استرداد) :

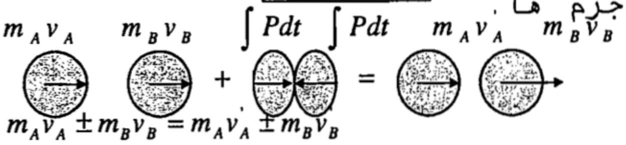
$$\boxed{e=\frac{v_B'-v_A'}{v_A-v_B}}=\frac{\int Rdt}{\int Pdt}$$

(Coefficient of Restitution)

به جنس، حجم و هندسه بستگی دارد.

اصل ایمپالس و ممنتوم براي كل جرم ها

کل سیستم



$$m_Av_A\pm m_Bv_B=m_Av_A'\pm m_Bv_B'$$

$$\underbrace{v_B'-v_A'}_{\text{سرعت نسبی پس از برخورد}}=e\,\underbrace{(v_A-v_B)}_{\text{سرعت نسبی قبل از برخورد}}$$

حالات خاص

١) ضربه از نوع كاملا ارتجاعی (الاستیک) : (e=1)

$$\begin{cases} v_A - v_B = v_B' - v_A' \\ m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \end{cases}$$

$\Delta T = 0$ اتلاف انرژی

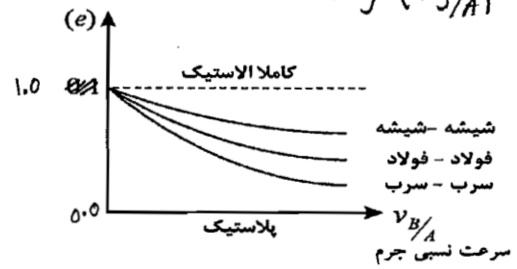
$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \quad : \quad T_1 = T_2 \quad \text{حفظ انرژي}$$

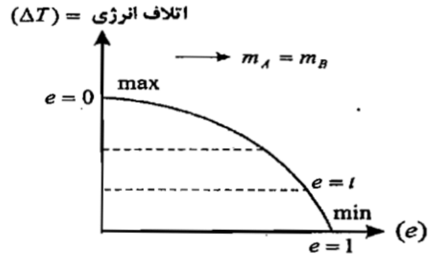
٢)ضربه از نوع كاملاً خميری وپلاستیک(مومسان) : (e=0)

$e = 0 \Rightarrow v_B' - v_A' = 0 \Rightarrow v_A' = v_B' = v'$ حداكثر اتلاف انرژي Plastic Impact

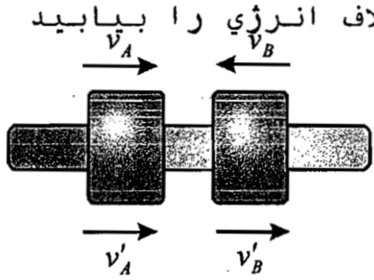
حالت كلي : ‎١>e>٠‎ در سرعت هاي نسبي متفاوت ، اين ضريب فرق دارد.

$e = f(v_{B/A})$





مثال : دو جسم A وB به هم برخورد مي كنند اتلاف انرژي را بيابيد ؟



$$v_A = 6\frac{ft}{s} \ , \ v_B = 4\frac{ft}{s} \quad e = 0.8, W_A = 5lb \ , \ W_B = 3lb \ ,$$

حل:

جهت فرضي

اصل ايمپالس و ممنتوم براي كل جرم ها :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \Rightarrow (5/g)(6) - (3/g)(4) = (5/g)v_A' + (3/g)v_B'$$

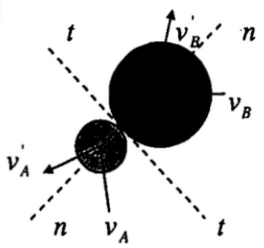
رابطه سرعت هاي نسبي

$$e = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B} \Rightarrow (0.8)(6 - (-4)) = (v_B' - v_A')$$

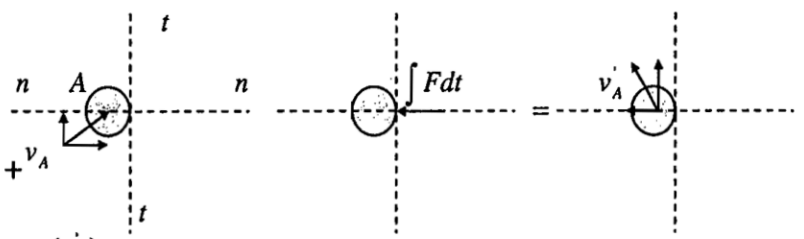
$\Delta T = T - T' = 3.54 - 2.49 = 1.05 \ (ft.lb)$ اتلاف انرژی سیستم

$$\begin{cases} 5v_A' + 3v_B' = 18 \\ -v_A' + v_B' = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A' = 0.75(\frac{ft}{s}) \leftarrow \\ v_B' = 7.25(\frac{ft}{s}) \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \Delta T = -1.05 (ft.lb)$$

برخورد مركزي مايل (Oblique Central Impact)



اصل ايمپالس و ممنتوم براي جرم A :



$+t \qquad m_A(v_A)_t + 0 = m_A(v_A')_t$

سرعت در راستاي عمود بر ضربه ثابت است (حفظ ممنتوم A در جهت t)

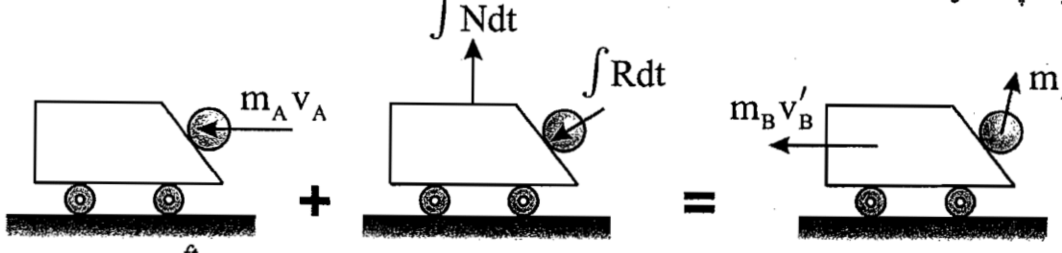
$(v_A)_t = (v_A')_t$

$v_A = 50\dfrac{ft}{s}$, $W_A = 1.5(lb)$, $W_B = 4(lb)$

بخاطر برخورد گذرا از اعمال نیروی فنر صرف نظر می‌شود.

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \Rightarrow 0.866\, v'_B + (v'_A)_n = 32.476$$

اصل ایمپالس



$(v'_A)_t = (v_A)_t = 25(\dfrac{ft}{s})$ I

$$\left.\begin{array}{l} \overset{+x}{\leftarrow} \; : m_A v_A + 0 = -m_A (v'_A)_x + m_B v'_B \\ (v'_A)_x = (v'_A)_n \cos(30°) - (v'_A)_t \cos 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \; \frac{75}{g} = \frac{4}{g} v'_B - \frac{1.5}{g}\left[(v'_A)_n \cos(30°) - 12.5\right] \quad II$$

$I, II \;\Rightarrow\; v'_B = 19.222\,(\dfrac{ft}{s})$

اصل کار و انرژي :

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

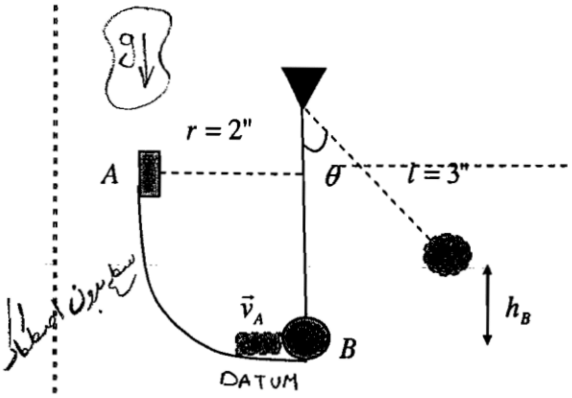
$T_2 = \frac{1}{2} m_B {v'_B}^2$ $U_{1\to 2} = -\frac{1}{2} K x_{max}^2$ $T_1 = 0$

$$\frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \;\underset{g=32.2\frac{ft}{s^2}}{\overset{k=15\frac{lb}{in}=180\frac{lb}{ft}}{\Longrightarrow}}\; x_{max} = .505(ft) = 6.06(in)$$

اصل حفظ انرژی: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

مثال :در شکل مقابل اگر بسته A رها شود، مطلوبست حداکثر مقدار θ و حداکثر کشش طناب ؟

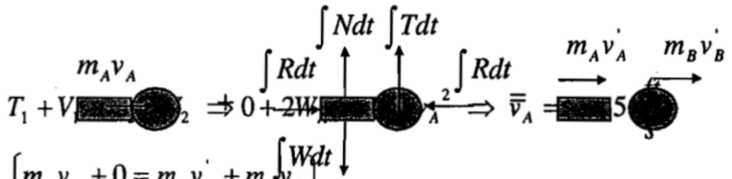
(اگر $e = 0.9, W_A = 2.5\ lb, W_B = 4\,lb$)



$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\longrightarrow \vec{v_A} = 11.35\ (ft/s \rightarrow)$

حل:



$$\left.\begin{cases} m_A v_A + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B \\ e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \end{cases}\right\} \Rightarrow v'_B = 8.3(\frac{ft}{s}), v'_A = -1.9(\frac{ft}{s})$$

اصل پایستگي انرژي بعد از برخورد

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

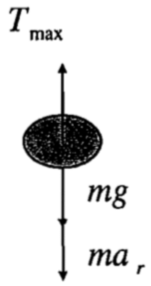
$E_1 = E_2$

$\frac{1}{2}m(v_B')^2 = m_B g h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{(v_B')^2}{2g} = 1.1(ft)$

$\cos\theta_{max} = \frac{3-1.1}{3} \Rightarrow \theta_{max} = \arccos\frac{1.9}{3} = 50.70^\circ$

$T_{max} = m_B g + m_B \frac{(v_B')^2}{r}$ $\quad +\uparrow \sum F_y = ma_y$

$T_{max} = 6.85(lb)$

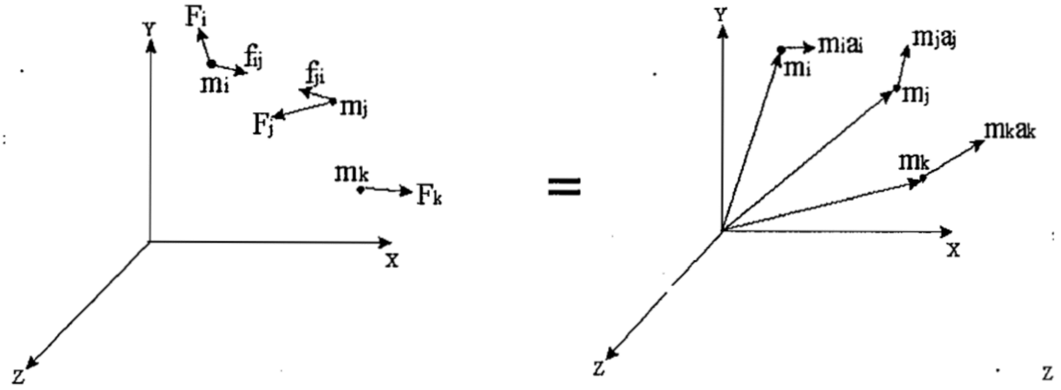


فصل چهارم:

سیستم نقاط مادي

F_i = نیروی خارجی که به جرم m_i اثر می کند.

f_{ji} = نیروی داخلی از i به j و $f_{ij}=-f_{ji}$

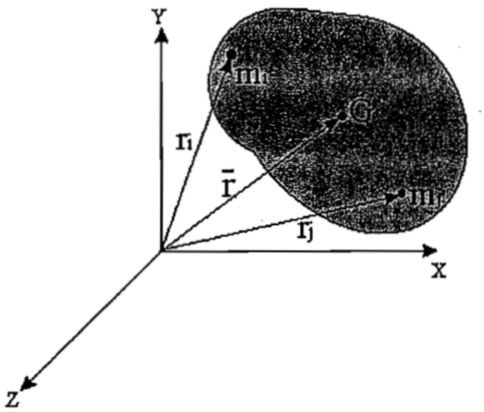


اصل دوم نیوتن برای جرم i :
$$\begin{cases}\vec{F}_i+\sum \vec{f}_{ij}=m_i\vec{a}_i\\ \vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum \vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}=\vec{r}_i\times m_i\vec{a}_i\end{cases}$$

برای سیستم نقاط مادی ($i:1\to n$):

$$\begin{cases}\sum_i \vec{F}_i+\sum_i\sum_j \vec{f}_{ij}=\sum_i m_i\vec{a}_i \quad , \quad \sum_i\sum_j \vec{f}_{ij}=0\\ \sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_i(\vec{r}_i\times\sum_j \vec{f}_{ij})=\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{a}_i) \quad , \quad \sum_i(\vec{r}_i\times\sum_j \vec{f}_{ij})=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum \vec{F}_i=\sum m_i\vec{a}_i\\ \sum \vec{r}_i\times\vec{F}_i=\sum \vec{r}_i\times m_i\vec{a}_i\end{cases}$$

حرکت مرکز جرم سیستم نقاط مادی



$$\vec{\bar{r}}=\vec{r}_G$$
$$\vec{\bar{r}}=\bar{x}\vec{i}+\bar{y}\vec{j}+\bar{z}\vec{k}$$
$$m\vec{\bar{r}}=\sum m_i\vec{r}_i$$
$$m=\sum m_i$$

موقعیت مرکز جرم :

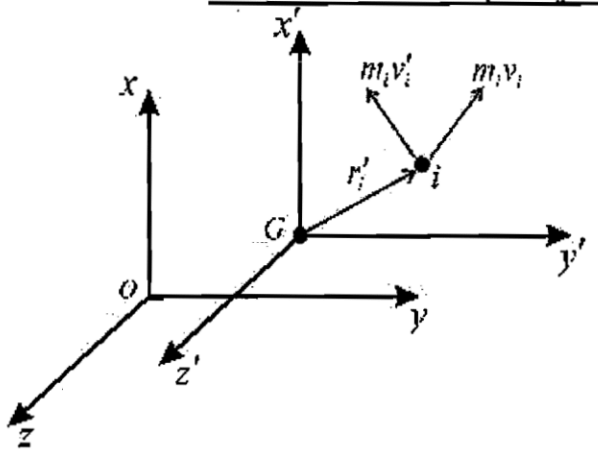
$$\to \bar{x}=\frac{1}{m}\left(\sum m_i x_i\right), \ \bar{y}=\dots \quad , \quad \bar{z}=\dots$$

سرعت جرم i = $:\bar{v}_i$ $\qquad \rightarrow m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k}$

شتاب جرم i = $:\vec{a}_i$ $\qquad \rightarrow m\vec{\bar{a}} = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{\bar{a}} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} + \bar{a}_z \vec{k}$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_i \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \\ \dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}} \\ \sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \end{array}\right\} \rightarrow \sum \vec{F} = M\vec{\bar{a}} = \dot{\vec{L}}$$

ممنتوم زاویه ای سیستم نقاط مادی :



دستگاه ثابت: $Oxyz$

دستگاه متحرك: $Gx'y'z'$

سرعت نسبي نقطه i نسبت به نقطه G سرعت $\vec{v}_i' =$

مركز جرم $= \vec{\bar{v}}$ سرعت مطلق نقطه i $= \vec{v}_i$

$v_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_i'$

ممنتوم زاويه اي سيستم نقاط مادي نسبت به نقطه G (در دستگاه متحرك

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{H}_G' = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G') = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum(\vec{v}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i' \\ \sum(v_i' \times m_i \vec{v}_i') = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i'$$

شتاب مطلق نقطه i $= \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{\bar{a}}$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i(\vec{a}_i - \vec{\bar{a}}) \Rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i - \left(\sum m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{\bar{a}} \\ \left(\sum m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{\bar{a}} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i \\ \left.\begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}'_i \times \sum \vec{f}_{ij} \\ \sum \vec{r}'_i \times \sum \vec{f}_{ij} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_G \quad (1) \end{cases}$$

$\vec{H}_G =$ (در دستگاه ثابت) ممنتوم زاويه اي سيستم نسبت به نقطه ي G

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i \\ \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{\bar{v}} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{H}_G = \sum \vec{r}_i \times m_i(\vec{v}'_i + \vec{\bar{v}}) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \left(\sum m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{\bar{v}} \\ \left(\sum m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{\bar{v}} = 0 \end{array}\right. \\ \Rightarrow \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \vec{H}'_G \xrightarrow{(1)} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$

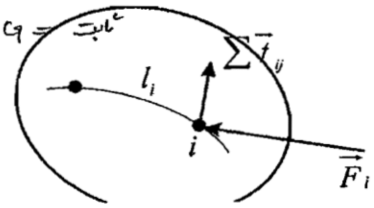
در واقع مشتق مومنتوم زاویه‌ای در دستگاه متحرک و ثابت برابر است با مجموع گشتاور

حالت خاص $\sum M_G = 0$

$\dot{H}_G = \dot{H}'_G = 0$

$\rightarrow H_G =$ ثابت

$\begin{cases} H_{G_1} = H_{G_2} \\ H'_{G_1} = H'_{G_2} \end{cases}$



كار نيرو :

براي جرم i كار نيروها

$$(U_{1\to2})_i = \int_{l_i} \left(\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij}\right) . \, d\,\vec{r}_i$$

براي سيستم نقاط كل كارنيرو ها را بدست مي آوريم

$$U_{1\to2} = \sum_{i=1}^{n} (U_{1\to2})_i \rightarrow U_{1\to2} = \int_{l_i} \sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}\right) . \, d\vec{r}_i = \int_{l_i} \sum_i (\vec{F}_i \, . \, d\vec{r}_i) + \int_{l_i} \sum_i \sum_j (\vec{f}_{ij} \, . \, d\vec{r}_i)$$

كار كل = (external) كارنيروي خارجي + (internal) كارنيروي داخلي

$$\Rightarrow u_{1\to2} = (u_{1\to2})_{\text{int}} + (u_{1\to2})_{ext}$$

توجه : در مسائلي كه اتصال بين دو جرم غير ارتجاعي باشد :

$$(u_{1\to2})_{int}=0$$

$\overset{\circ}{T}$ = حرکت دورانی (نسبت به مرکز جرم)

انرژی جنبشی

$$\begin{cases} T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \quad , \quad (\vec{v}_i=\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}) \to T=\frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}).(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}})=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}(\sum m_i)\bar{v}^2+(\sum m_i\vec{v}'_i).\bar{\vec{v}} \\ (\sum m_i\vec{v}'_i)=0 \quad , \quad m=\sum m_i \\ \Rightarrow \quad T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}m\bar{v}^2 \end{cases}$$

$\bar{T}$ = انتقالی (حرکت مرکز جرم

$$T=\overset{\circ}{T}+\bar{T}$$

انرژي جنبشي انتقالي +

انرژي جنبشي حركت دوراني = انرژي جنبشي سيستم

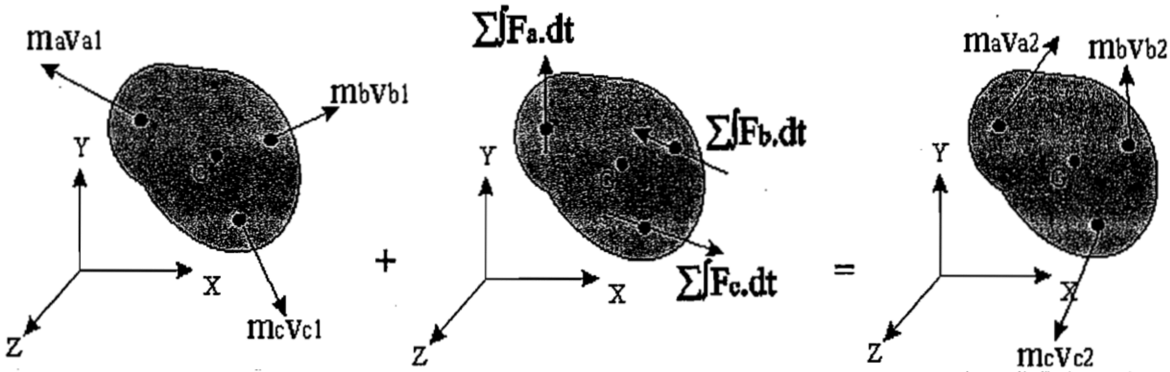
اصل كار و انرژی :

$$T_1+U_{1\to2}=T_2$$

اصل حفظ انرژی :

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

اصل ايمپالس و ممنتوم :



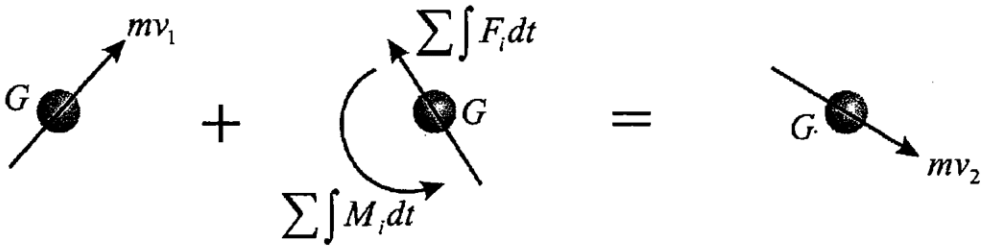
اصل ايمپالس و ممنتوم خطي (I) :

$$\begin{cases} \vec{L}_1+\overrightarrow{IMP}=\vec{L}_2 & (I) \\ (\vec{H}_O)_1+\sum\int\vec{M}_O dt=(\vec{H}_O)_2 & (II) \\ (\vec{H}_O)_1=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_{i1} \end{cases}$$

(II) اصل ايمپالس و ممنتوم زاويه اي:

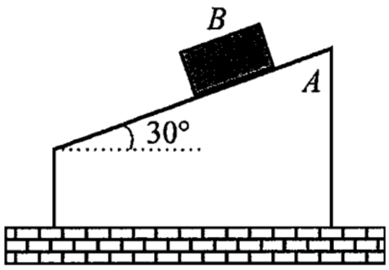
(*) اگر به مرکز جرم منتقل کنیم یا مرکز جرم مشخص بود:

-

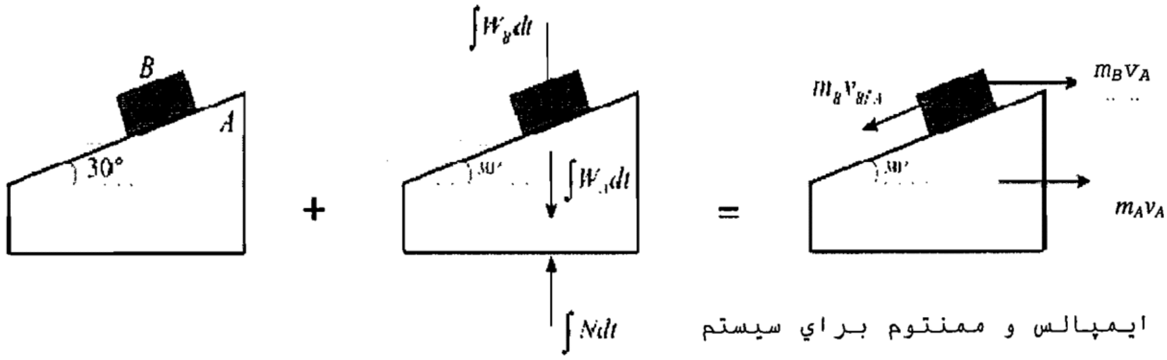


مثال: در شکل مقابل پس از اینکه بلوک B، ۳ فوت روي بلوك A حرکت کرد ، مطلوبست سرعت B نسبت به A.

$W_A = 25\ lb\ , W_B = 15\ lb\ ,\ v_B = 0$



حل:



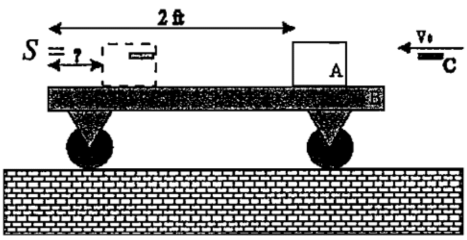
ایمپالس و ممنتوم براي سیستم

$$\overset{+}{\rightarrow}\quad 0+0=-m_B v_{B/A}\cos 30^o + m_B v_A + m_A v_A \quad\Rightarrow\quad v_A = 0.32\ v_{B/A}$$

$$\begin{cases} T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \\ T_1 = 0\ ,\ \ V_1 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ V_2 = -W_B\, 3\, Sin\, 30 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \ \frac{1}{2} m_B \left(v^2{}_A + v^2{}_{B/A} - 2 v_A v_{B/A} \cos 30^o \right) - \frac{1}{2} W_B \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_A = 3.71\ ft/s \ \longrightarrow \quad , \qquad v_{B/A} = 11.59\ ft/s \ \swarrow$$

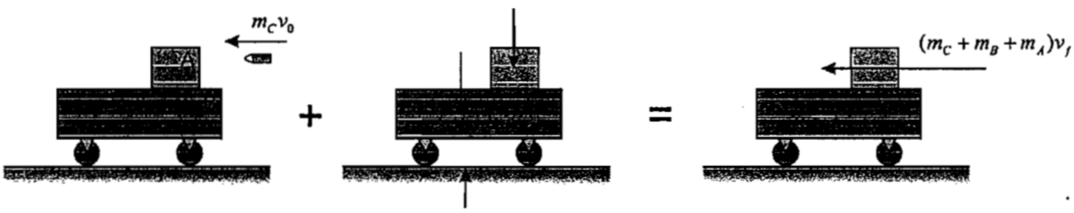
مثال: گلوله C با سرعت v_0 به سمت جسم A شلیک می گردد و در آن فرو می رود و باعث حرکت جسم A روی گاری B و حرکت گاری می گردد. مطلوبست :



الف- سرعت نهايي کل سیستم. ب- موقعیت نهايي A نسبت به B .

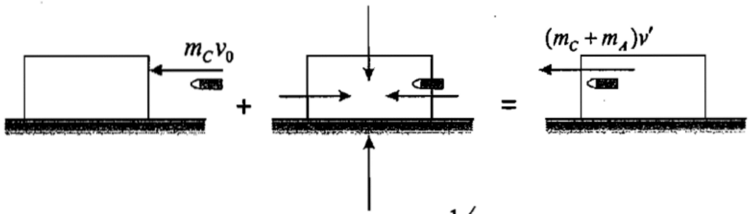
$W_A = 10\ lb$, $W_B = 8\ lb$, $W_C = \frac{1}{16}\ lb = 1$ اونس , $v_0 = 1600\ \frac{ft}{s}$, $\mu_k = 0.5$

حل: با فرض اینکه جرم A به همراه C روی B باقی بماند و در نهایت سرعت همگی یکسان باشد ، از اصل ایمپالس و ممنتوم برای سیستم استفاده کرده و سرعت نهایی را محاسبه می کنیم :



$$\Rightarrow m_C v_0 = (m_C + m_A + m_B)\, v_f \Rightarrow v_{final} = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16}+10+8} \Rightarrow v_f = 5.54\ \frac{ft}{s}$$

سرعت گلوله و بلوك A (v') را پس از فرو رفتن گلوله در A ، حساب مي كنيم :



$$m_C v_0 + 0 = (m_C + m_A)\, v' \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+10}(1600) = 9.94\ \frac{ft}{s}$$

براي بدست آوردن كار نيروي اصطكاك، اصل كار و انرژي را از زماني كه گلوله در A نشست تا زماني كه بلوك A نسبت به B متوقف شد، مي نويسيم :

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_C + m_A)v'^2 = 15.43\ ft.lb \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}(m_C + m_A + m_B)v_f^2 = 8.6\ ft.lb$$

$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_{friction} = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x)$$

$$T_2 - T_1 = U_{1\to 2}$$

$$\Rightarrow 8.6 - 15.43 = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x) \to \Delta x = 1.36\ ft$$

مسافتي كه A روي B مي پيمايد : Δx $\Leftarrow$

$S = 2 - 1.36 = 0.64\ ft$ موقعيت نهايي نسبت به انتهاي B

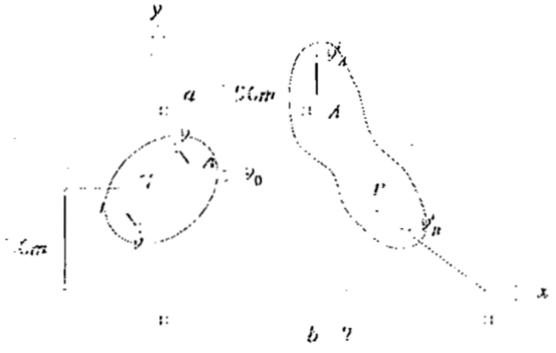
با توجه به موقعیت نهایی A كه روی B باقی می ماند ، پیش فرض اولیه صحیح و نتایج درست می باشند .

مثال: در صفحه بدون اصطکاک مقابل ، $m_A = 2kg$ و $m_B = 1kg$. در لحظه اولیه داریم:

$\vec{H}_G = 3 \ kg.m^2/s$ ↻

$\vec{\bar{v}}_0 = 1.5\vec{i} + 1.2\vec{j} \ m/s$

$T' = 18.75 \ J$



که T' در آن انرژي جنبشي سیستم نسبت به مرکز جرم (دوران آن است. اگر در لحظه بعدی جرم A دارای سرعت v'_A (که موازي محور Y ها است) گردد، مطلوبست: b , v'_B , v'_A .

حل

حفظ ممنتوم سیستم

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$\vec{L}_1 = m\vec{\bar{v}}_1 = (1+2)\,(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j})$$

$$\vec{L}_2 = (2)(v'_A\vec{j}) + (v'_{Bx}\vec{i} - v'_{By}\vec{j}) \qquad (1)$$

$$4.5\vec{i} + 3.6\vec{j} = v'_{Bx}\vec{i} + (2v'_A - v'_{By})\,\vec{j}$$

$$v'_{Bx} = 4.5 \ m/s \xrightarrow{(1)} 2v'_A - v'_{By} = 3.6 \ m/s \quad (2)$$

حفظ انرژي جنبشي $T_1 = T_2$ و نیز $T = \bar{T} + T'$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m\bar{v}_0^2 + T' = \frac{1}{2}(3)\left((1.5)^2 + (1.2)^2\right) + 18.75 = 24.28 \ J \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_A^2 + \frac{1}{2}\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) = 24.28 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \begin{cases} v'_A = 3.2 \ m/s \ \uparrow \\ v'_{Bx} = 4.5 \ m/s \ \rightarrow \\ v'_{By} = 2.8 \ m/s \ \downarrow \end{cases}$$

حفظ ممنتوم زاویه اي سیستم نسبت به O :

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$

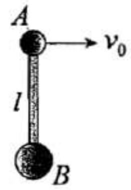
$$(\vec{H}_O)_1 = \vec{H}_G + \vec{\bar{r}} \times m\vec{\bar{v}}_O \Rightarrow (\vec{H}_O)_1 = 3\vec{k} + (1.6\vec{j}) \times (3)\,(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}) = 3\vec{k} - 3(1.5)(1.6)\vec{k} = -4.2\vec{k}$$

$$(\vec{H}_O)_2 = (2)\,a\vec{v}'_A\vec{k} - b(v'_{By})\,(1)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow -4.2 = (2)\,av'_A - bv_{By} \quad \Rightarrow b = 5.98 \ m$$

مثال : در صفحه افقی بدون اصطکاک اگر به A سرعت $\vec{v}_0$ بدهیم مطلوبست سرعت جرم ها پس از $180^\circ, 90^\circ$ دوران میله .

$m_A = m \ , m_B = 2m$

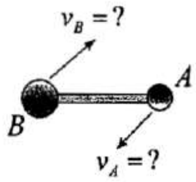


حل :

$$m\bar{Y} = \sum m_i y_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{m(l) + 2m(0)}{m + 2m} = \frac{l}{3}$$

$$m\bar{\vec{v}} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \Rightarrow 3m\bar{\vec{v}} = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \Rightarrow 3m\bar{\vec{v}} = m\vec{v}_0 + 0 \Rightarrow \bar{v} = {}^{v_0}\!/_{3}$$

در حالت دوران 90° داریم :



$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{L}_1 = m_A \vec{v}_0 = (mv_0)\vec{i} \\ \vec{L}_2 = m_A(-v_{AX}\vec{i} - v_{AY}\ \vec{j}) + m_B(v_{BX}\vec{i} + v_{BY}\vec{j}) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_0 = -v_{AX} + 2v_{BX} & (1) \\ 0 = -v_{AY} + 2v_{BY} & (2) \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = T_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 = {}^1\!/_2 mv_0^2 \\ T_2 = {}^1\!/_2 m(v_{AX}^2 + v_{AY}^2) + {}^1\!/_2 (2m)(v_{BX}^2 + v_{BY}^2) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0^2 = v_{AX}^2 + v_{AY}^2 + 2v_{BX}^2 + 2v_{BY}^2 \quad (3)$$

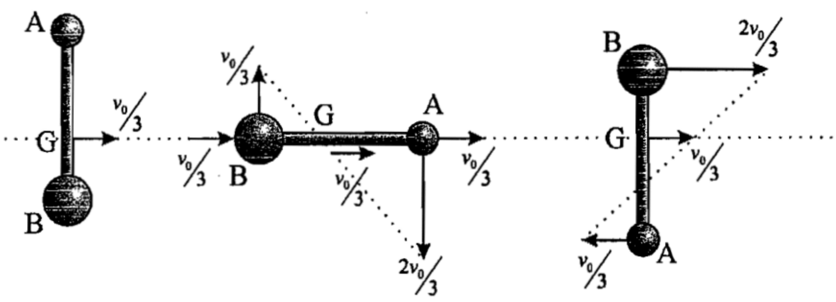
$$(H_G)_1 = (H_G)_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} (H_G)_1 = {}^2\!/_3 lm(v_0) \\ (H_G)_2 = {}^2\!/_3 lm(v_{AY}) + {}^1\!/_3 l(2m)(v_{BY}) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0 = v_{AY} + v_{BY} \quad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \begin{cases} v_{AX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow & v_{BX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow \\ v_{AY} = {}^{2v_0}\!/_3 \downarrow & v_{BY} = {}^{v_0}\!/_3 \uparrow \end{cases}$$

در حالت 180° نیز داریم :

دوران 180°

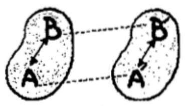
دوران 90°



فصل پنجم: سینماتیک اجسام صلب

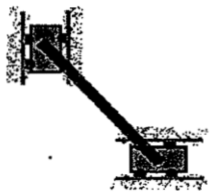
حرکت اجسام صلب (KINEMATICS OF RIGID BODIES)

۱) حرکت انتقالی :

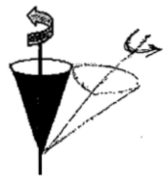


۲) حرکت دورانی حول محور ثابت :

۳) حرکت عمومی در صفحه : ترکیب حرکت انتقالی و دورانی



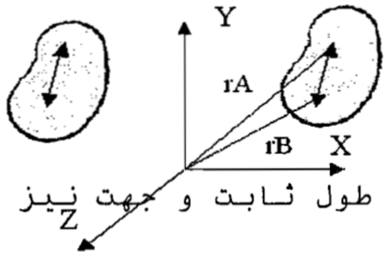
۴) حرکت دورانی حول نقطه



۵) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

۱) حرکت انتقالی

TRANSATIONAL



$\vec r_B = \vec r_{A/B} + \vec r_A$

$\frac{d}{dt}(\vec r_B) = \frac{d}{dt}(\vec r_{A/B}) + \frac{d}{dt}(\vec r_A)$

برای حرکت انتقالی چون طول ثابت و جهت نیز ثابت است : $\frac{d}{dt}(\vec r_{A/B}) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec r_B) - \frac{d}{dt}(\vec r_A) = 0 \Rightarrow \vec V_B - \vec V_A = 0 \Rightarrow \vec V_B = \vec V_A$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec V_B) = \frac{d}{dt}(\vec V_A) \Rightarrow \vec a_B = \vec a_A$

بنابراین همانند يك نقطه مادي فرض مي شود ، يعني سرعت و شتاب همه نقاط يكسان است.

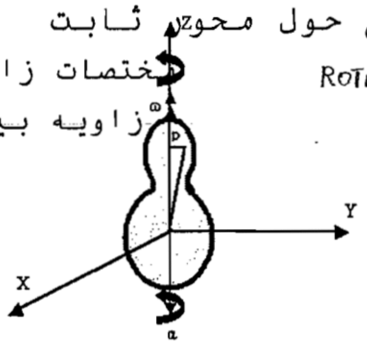
۲) حرکت دورانی حول محور z ثابت

ROTATION ABOUT FIXED AXIS

θ: مختصات زاویه ای نسبت به صفحه ی xz

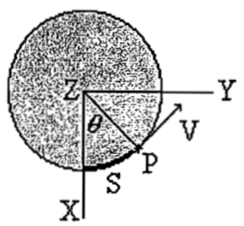
φ: زاویه بین بردار موقعیت و محور z

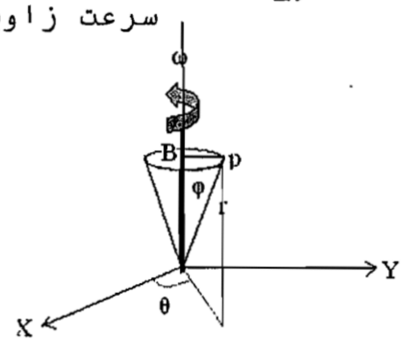
$\vec r$: بردار موقعیت نقطه P

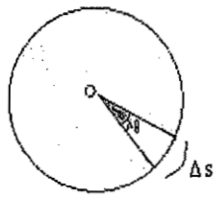


$$V=\frac{\Delta s}{\Delta t}\ ,\ \begin{cases}\Delta s=(BP)\Delta\theta\\ BP=(OP)\sin\varphi=r\sin\varphi\Rightarrow V=BP\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\Rightarrow V=(r\sin\varphi)(\dot{\theta})=\vec{\omega}\times\vec{r}\\ \dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\omega\end{cases}$$

سرعت زاويه اى







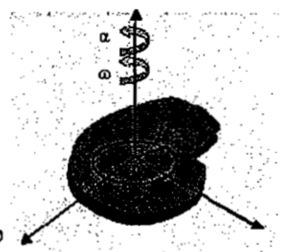
$$\begin{cases}\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})\Rightarrow\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega})\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}(\vec{r})\\ \ddot{\theta}=\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\alpha\\ \frac{d}{dt}(\vec{r})=\vec{v}=(\vec{\omega}\times\vec{r})\end{cases}\Rightarrow\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\Rightarrow\begin{cases}a_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\times\vec{v}\\ a_t=\vec{\alpha}\times\vec{r}\end{cases}$$

شتاب زاويه اى

حالت خاص (حركت دورانى يک صفحه نازك حول محور عمود بر صفحه)

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}\Rightarrow V=r\omega$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\Rightarrow\begin{cases}a_t=r\alpha\\ a_n=r\omega^2\end{cases}$$



معادلات دوران محور ثابت

x	θ
$V=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$
$a=\frac{dV}{dt}=\dot{V}=\ddot{x}$	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}=\ddot{\theta}$
$a=V\left(\frac{dV}{dx}\right)$	$\alpha=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

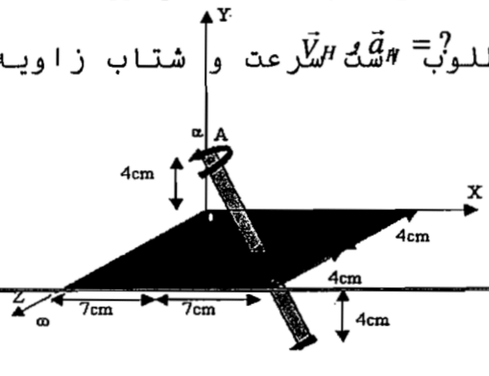
حالتهاي خاص :

حركت دورانى با سرعت زاويه اى ثابت : $\omega=$ cte و $\alpha=0$ ، $\theta=\omega t+\theta_0$

حركت دورانى با شتاب زاويه اى ثابت : $\alpha=$ cte و $\omega=\omega_0+\alpha t$ ، $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

مثال : صفحه حول محور AC در حال دوران با سرعت زاويه اى $18\frac{rad}{s}$ و شتاب زاويه اى $\alpha=45\frac{rad}{s^2}$ است. مطلوبست سرعت و شتاب زاويه اى نقطه H ($\vec{r}_{H/C}=4\vec{j}$). $\vec{V}_H\ ,\ \vec{a}_H=?$

حل :



$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad , \qquad \vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{r}=\vec{r}_{H/B}=7\vec{i}+4\vec{k}$$

$$\begin{cases} \omega=18\ (\frac{rad}{s}) \\ \vec{\omega}=\omega\vec{\lambda}_{AC} \\ \lambda_{AC}=\dfrac{14\vec{i}-8\vec{j}+8\vec{k}}{\sqrt{14^2+8^2+8^2}}=\dfrac{1}{18}(14\vec{i}-8\vec{j}+8\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow \vec{\omega}=14\vec{i}-8\vec{j}+8\vec{k}\ (\frac{rad}{s})$$

$$\vec{\alpha}=\alpha\vec{\lambda}_{CA}=\alpha\vec{\lambda}_{AC} \Rightarrow \vec{\alpha}=\frac{-45}{18}(14\vec{i}-8\vec{j}+8\vec{k})$$

$$\vec{V}_H=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-32\vec{i}+56\vec{k}\ (\frac{cm}{s}) \qquad \vec{a}_H=\frac{-45}{18}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ -32 & 0 & 56 \end{vmatrix}$$

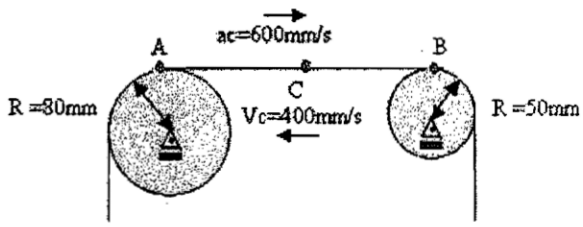
$$\Rightarrow \vec{a}_H=-886\vec{i}-1040\vec{j}-396\vec{k}\ (\frac{cm}{s^2})$$

مثال : با توجه به حرکت کابل، قرقره B به سمت قرقره A مطلوب است :

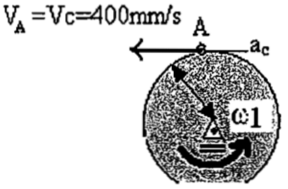
$\omega_1=?$ $\qquad \omega_2=?$

$\alpha_1=?$ $\qquad \alpha_2=?$

$a_A=?$ $\qquad a_B=?$

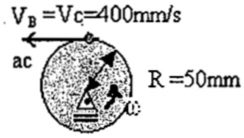


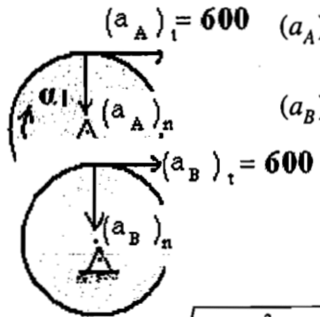
حل :



$$V_A=r_A\omega_1 \Rightarrow 400=80\omega_1 \Rightarrow \omega_1=5\ \frac{rad}{s}$$

$$V_B=r_B\omega_2 \Rightarrow 400=50\omega_2 \Rightarrow \omega_2=8\ \frac{rad}{s}$$





$$(a_A)_t=r_A\alpha_1 \Rightarrow 600=80\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=7.5\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_B)_t=r_B\alpha_2 \Rightarrow 600=50\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=12\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_A)_n=r_A\omega_A^2=80(5)^2=2000\ \ mm/s^2$$

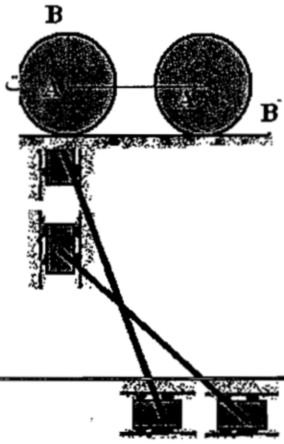
$$(a_B)_n=r_B\ \omega^2=50(8)^2=3200\ \ mm/s^2$$

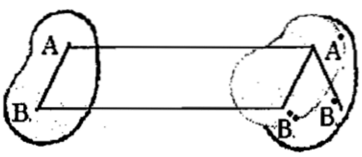
$$\Rightarrow a_A=\sqrt{(600)^2+(2000)^2}=2088\ mm/s^2 \quad 73.3^\circ$$

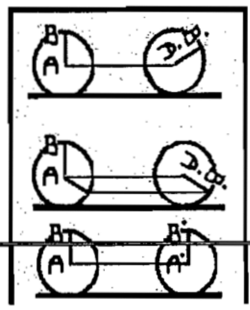
$$\Rightarrow a_B=\sqrt{(600)^2+(3200)^2}=3256\ mm/s^2 \quad 79.4^\circ$$

۳) حرکت کلی در صفحه (حرکت عمومی در صفحه)

از ترکیب حرکت انتقالی و حرکت دورانی حول
آید.

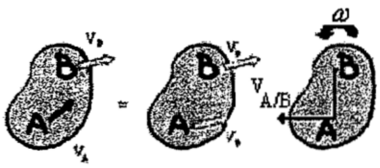




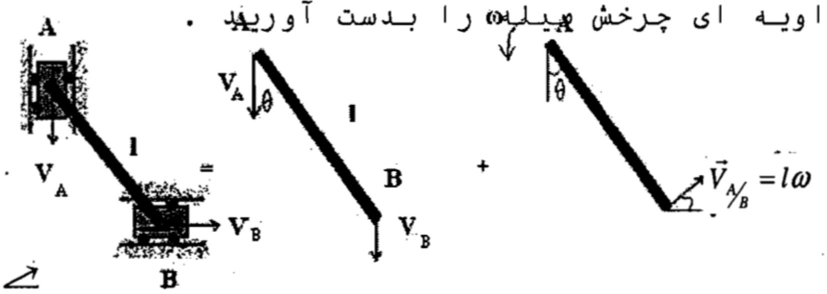


حرکت انتقالی در صفحه + حرکت دورانی در صفحه= حرکت کلی در صفحه
سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای

$\vec{V}_B \to$ A انتقال
بوسیله سرعت B
$\vec{V}_{A/B} \to$ دوران A حول نقطه B $\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$
$\vec{V}_{A/B} = l\omega$



مثال : جسم A با سرعت V_A در حال حرکت به سمت پائین می باشد ، سرعت زاویه ای چرخش میله را بدست آورید .



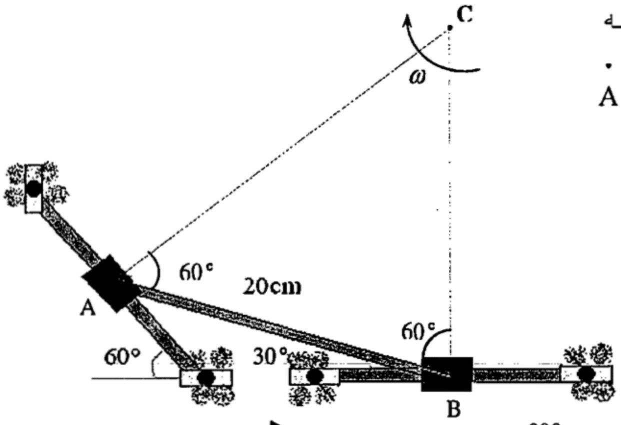
حل :

$[\vec{V}_B \to] = [V_A \downarrow] + [l\omega \angle]$

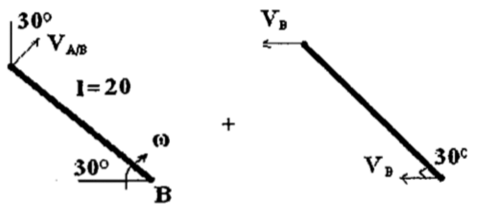
$V_A = V_B \tan\theta$

$\omega = \frac{V_A}{l\sin\theta}$

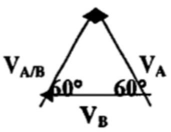
مثال : طوقه B با سرعت $25\ cm/s$ به سمت چپ در حال حرکت است . با توجه به شکل سرعت طوقه A را بدست آورید ؟



حل : حرکت مقید

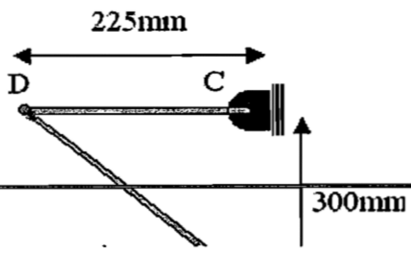


$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow [V_A\ 60^\circ] = [V_B \leftarrow] + [20\omega\ 30^\circ]$

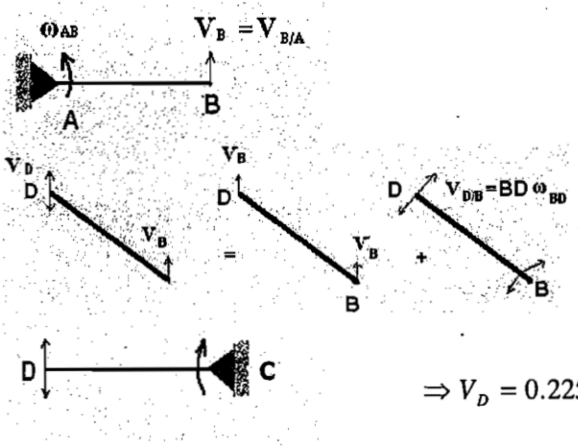


$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = 25\,(Cm/s)$

مثال : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر $3\ rad/s$ باشد، مطلوب است: $\omega_{BD}, \omega_{DC} = ?$

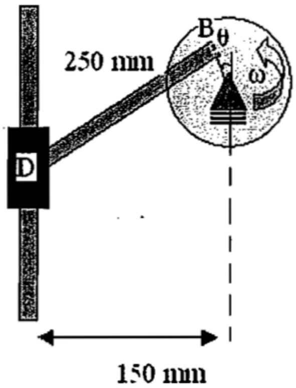


حل :



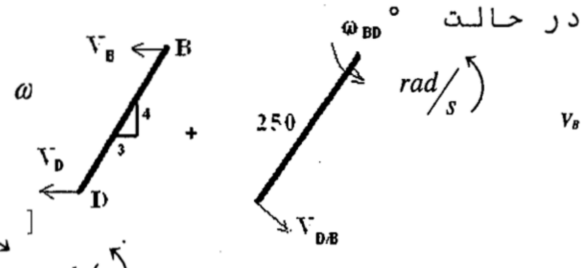
$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} \\ [V_D \updownarrow] = [.45 \uparrow] + [BD \,.\, \omega_{BD} \swarrow\!\!\nearrow] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{BD} = 0 \\ \vec{V}_D = \vec{V}_B = [.45 \ {}^{m}\!/_{s} \uparrow] \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_D = 0.225\, \omega_{DC} = 0.45 \ {}^{m}\!/_{s} \quad \Rightarrow \ \omega_{DC} = 2 \ {}^{rad}\!/_{s}$$



مثال : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : سرعت طوقه D در حالت $\theta = 0°$, $\theta = 90°$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد)

حل : در حالت °

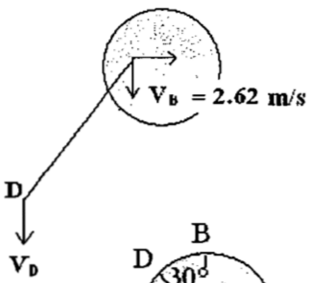


$$V_B = r\omega = 0.05 \times 52.36 = 2.62 \quad m/s \leftarrow$$

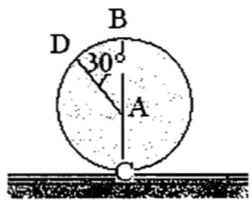
$$\vec{V}_D \downarrow = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = [2.62 \leftarrow] + [0.25\omega_{BD} \,{}^{3}\!\searrow_{4}]$$

$$\Rightarrow \quad V_D = 1.96\ m/s \downarrow \quad , \quad \omega_{BD} = 13.1 \quad rad/s$$

در حالت $\theta = 90$:

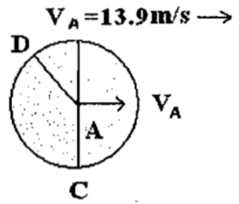


$$V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62 (m/s) \downarrow \ , \ \omega_{BD} = 0$$

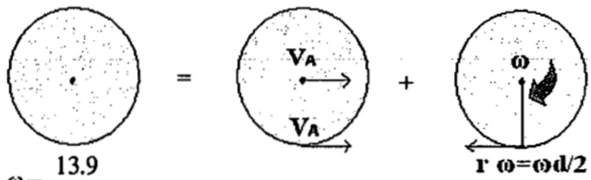


مثال : اتومبیلی با سرعت ثابت $50\ km/h$ در حال حرکت در جهت راست می باشد . اگر قطر چرخهای اتومبیلی $610\ mm$ باشد ، مطلوب است ، سرعت نقاط D ,C ,B,A ؟

حل : روش اول :

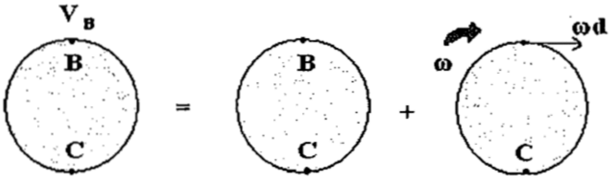


$$V_A = 50\ km/h = 13.9\ m/s$$



$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A} \quad , \quad V_C = 0$$

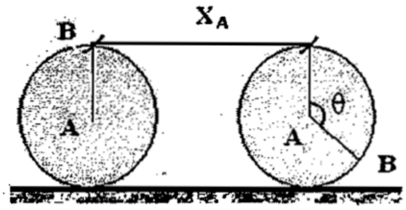
$$\Rightarrow V_{C/A} = V_A = r\omega \qquad \Rightarrow 13.9 = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{13.9}{0.61/2}$$



$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} \qquad \Rightarrow \vec{V}_B = 0 + [d\omega \rightarrow] = [2 \times 13.9 \rightarrow] = [27.8\ m/s \rightarrow]$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow \vec{V}_D = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \nearrow_{30°}] \qquad \Rightarrow \vec{V}_D = 2 \times 13.9 \cos 15° = [26.8\ m/s \angle_{15°}]$$

روش دوم : به شرطی که لغزش در کار نباشد

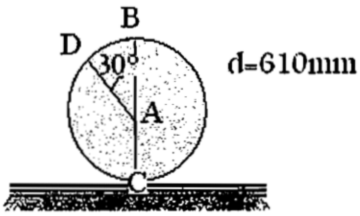


$$\Rightarrow \quad X_A = r\theta \qquad V_A = r\dot{\theta} = r\omega \qquad a_A = r\alpha$$

$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 44.84 \quad rad$$

$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \quad m/s$$

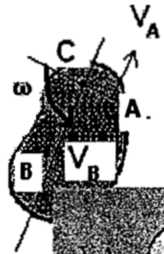
$$V_D = (DC)\omega = (\vec{CA} + \vec{AD}) \times \omega = .59 \times 44.84 = 26.5 \quad m/s$$



مرکز آ

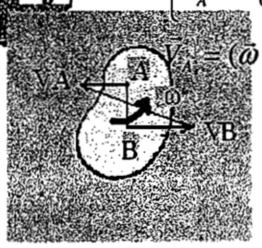
C (نقطه با سرعت صفر) مرکز انی دوران است که لزوماً روی جسم نیست.

تکیه گاه در تمام لحظات مرکز آني دوران مي باشد.



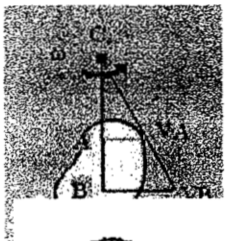
$$\begin{cases} V_C = 0 \\ \vec{V}_A = V_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \perp \vec{r}_{A/C} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C}$$

$$\vec{V}_A = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) = (\vec{\omega} \times \vec{C}_A)$$



$V_A \parallel V_B$

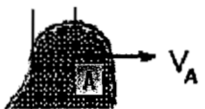
$V_A \perp AB$



$V_A \parallel V_B$

$V_A \perp AB$

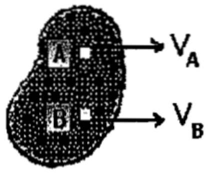
$V_A \neq V_B$



$V_A \parallel V_B$

$V_A \not\perp AB$

$\omega = 0$



$V_A \perp AB$

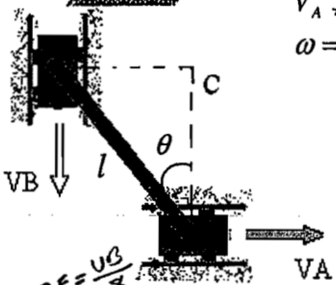
$V_A \parallel V_B$

$V_A = V_B$

$\omega = 0$

مثال : در شکل ز V_A B را برحسب

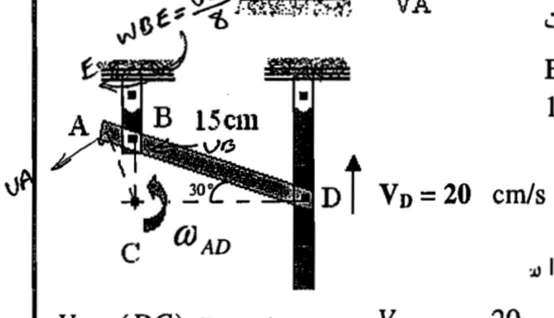
حل :



$$V_A = (AC)\omega = (l\cos\theta)\omega$$

$$\omega = \frac{V_A}{l\cos\theta} \quad , \quad V_B = V_A \tan\theta$$

مثال : طوقه D با سرعت $20 \ cm/s$ به سمت بالا درحال حرکت می باشد . طول BD برابر $15 \ cm$ و طول AB برابر 10 cm است. مطلوب است : $\omega_{AD} = ?, \ V_B = ?, \ V_A = ?$



حل : براي میله BE نقطه E مرکز دوران اس

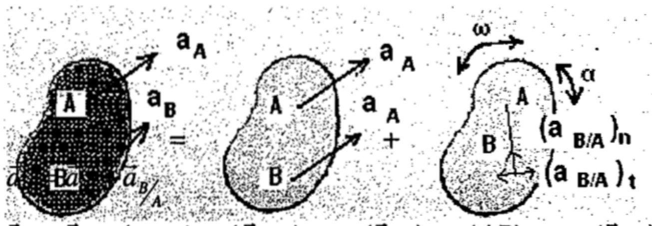
$$V_D = (DC)\,\omega_{AD} \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{V_D}{DC} = \frac{20}{15\cos 30^\circ} = 1.54 \quad rad/s$$

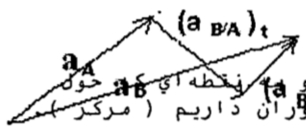
$$V_B = (BC)\,\omega_{AD} = (15\sin 30^\circ)(1.54) \Rightarrow V_B = 11.55 \quad cm/s \leftarrow$$

$AC=\sqrt{(25\sin 30°)^2+(10\cos 30°)^2} \Rightarrow AC=15.21\ cm$

$V_A=(AC)\,\omega_{AD}=(15.21)(1.54) \Rightarrow V_A=23.4\ {}^{cm}\!/_{s}$ 34.7°

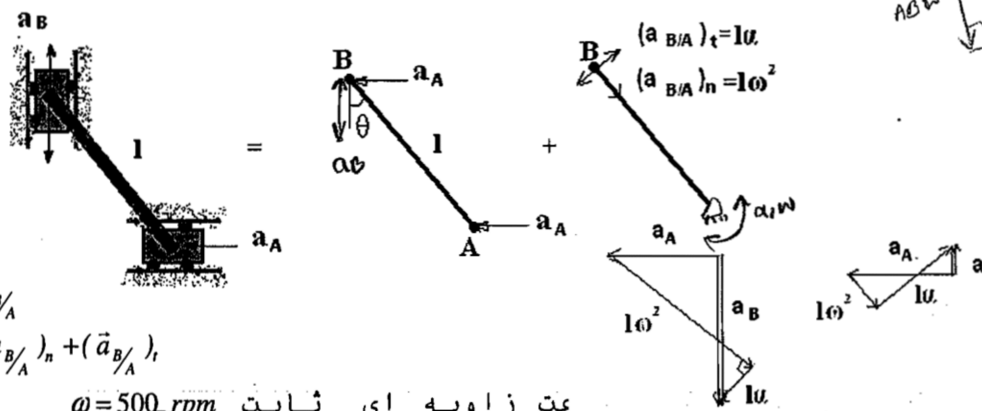
شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه ای





همیشه رو نقطه اي حول آن دوران داریم (مرکز)

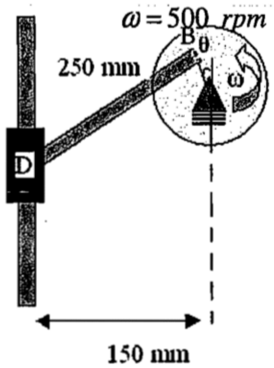
$\vec{a}_B=\vec{a}_A+(a_{B/A})_n+(\vec{a}_{B/A})_t \quad , \quad (\vec{a}_{B/A})_t=(AB)\alpha \quad , \quad (\vec{a}_{B/A})_n=(AB)\omega^2$



$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A}$

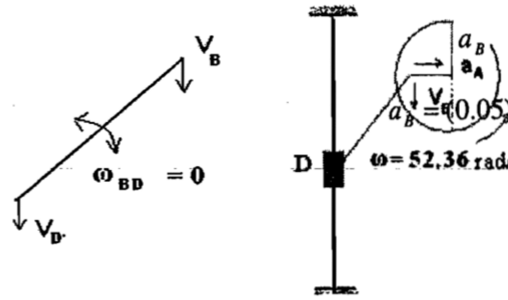
$\vec{a}_B=\vec{a}_A+(a_{B/A})_n+(\vec{a}_{B/A})_t$

مثال) عت زاویه ای ثابت $\omega=500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : شتاب طوقه D در حالت $\theta=90°$, $\theta=180°$. (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد.)



حل :

$\omega=500\ rpm=\frac{500\times 2\pi}{60}=52.36\ {}^{rad}\!/_{s}$



در حالت $\theta=90°$

$a_B=(0.05)(52.36)^2=137.1\ {}^{m}\!/_{s^2}$

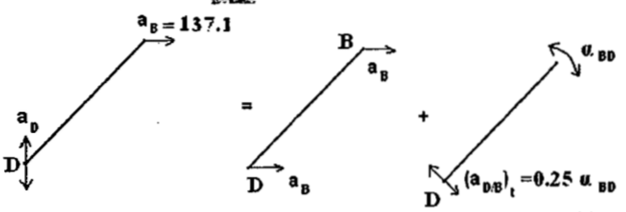
$V_B=(0.05)(52.96)=2.62\ {}^{m}\!/_{s}$

$(a_{D/B})_t=0.25\times\alpha_{BD}$

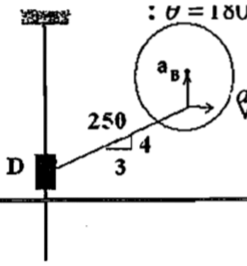
$\vec{a}_D=\vec{a}_B+\vec{a}_{D/B}$

$[a_D \updownarrow]=[137.1\rightarrow]+[0.25\,\alpha_{BD}\ \ 23.6°]$

$\Rightarrow a_D=59.8\ {}^{m}\!/_{s^2}\ \uparrow$



در حالت $\theta=180°$:

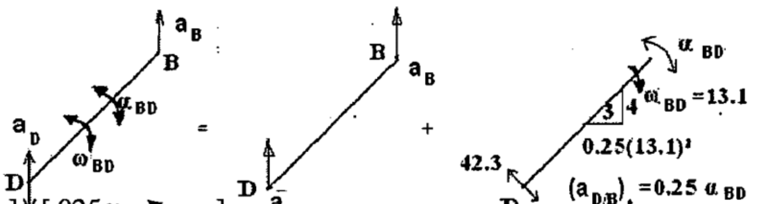


$a_B=137.1\ {}^{m}\!/_{s^2}$

$\Rightarrow 0.2\omega_{BD} = 2.62 \Rightarrow \omega_{BD} = 13.1 \ \mathrm{rad}/_s \quad V_B = BC(\omega_{BD}) = 2.62$

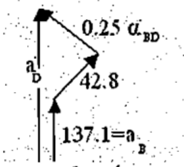
$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$

$\vec{a}_D = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{B/D})_t$



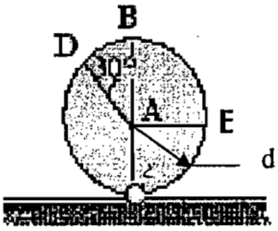
$[a_D \updownarrow] = [137.1 \uparrow] + [42.8 \nearrow] + [.025\alpha_{BD} \nwarrow\!\!\searrow]$

$\Rightarrow a_D = 190.65 \ m/_{s^2} \uparrow$



مثال : سرعت اتومبيل $~~90~~\ 50 \ km/_h$ مي باشد

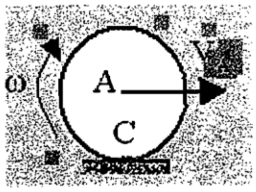
$a_C = ?\ , a_D = ?\ , a_B = ?\ , a_E = ?$



$V_C = 0 \qquad V_A = V_C + V_{A/C} \rightarrow \vec{V}_{A/C} = 13.89 \rightarrow$

$\omega = \frac{13.89}{r}$

حل :



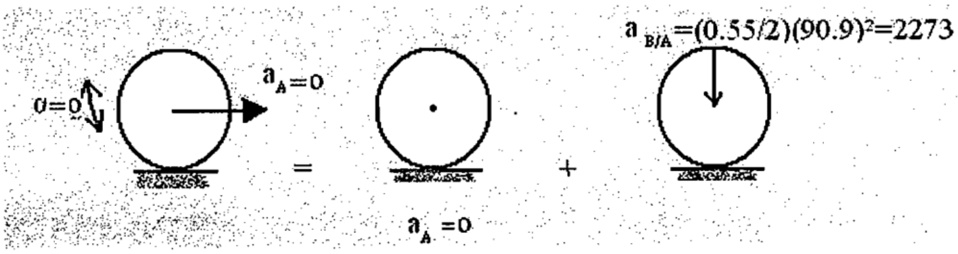
$V_B = V_C + V_{B/C} = 0 + [d\omega \rightarrow]$
$= 27.78 \ m/s$

$V_D = V_C + V_{D/C} = 0 + [D C\omega ...]$
$= 26.8 \ \angle 15°$

$V_E = V_C + V_{E/C} = 0 + [r\sqrt{2}\,\frac{13.89}{r} ...]$
$= 13.89\sqrt{2} \ \angle 45°$

$V_A = 50 \ km/h - ... \ /s \rightarrow u_A = 13.89 \ m/s \rightarrow$

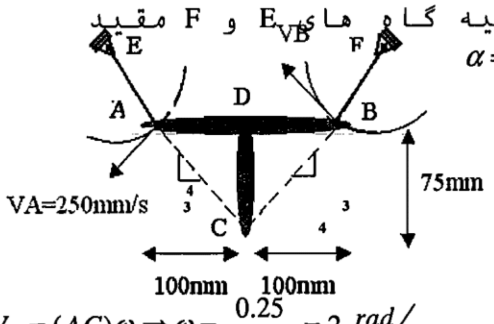
$V_A = \frac{d}{2}\omega \Rightarrow 25 = \frac{0.55}{2}\omega \Rightarrow \omega = 90.9 \ rad/_s \Rightarrow \alpha = 0$



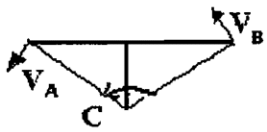
$\Rightarrow a_B$

مثال : ميله زير از نقاط A و B به تكيه گاه هاي E و F مقيد است . مطلوب است : $a_C = ?$ و $\alpha = ?$

$BF = AE = 100\,mm\ , V_A = 250 \ mm/_s$ و $\frac{dV_A}{dt} = 0$



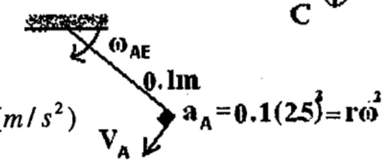
حل :

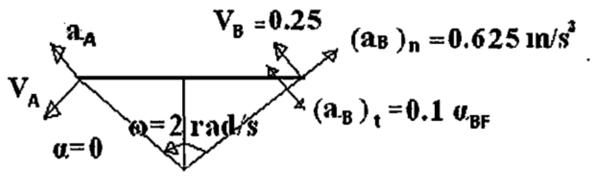


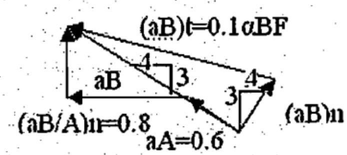
$V_A = (AC)\omega \Rightarrow \omega = \frac{0.25}{.0.125} = 2 \ rad/_s$

$V_A = (AE)\omega_{AE} \Rightarrow \omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5 \ rad/_s$

$a_A = (a_A)_n = r\omega_{AE}^2 = 0.1(2.5)^2 [= \frac{V^2}{r} = \frac{(0.25)^2}{0.1}] = .625 (m/s^2)$





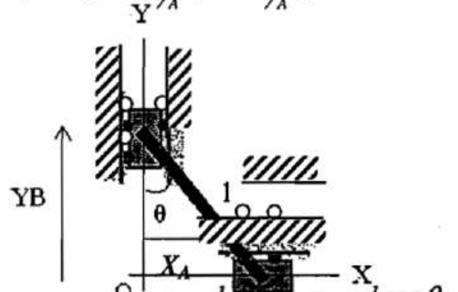


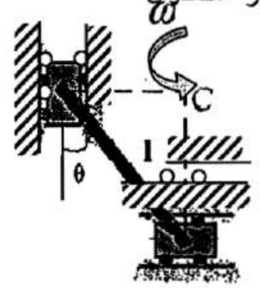
$$\begin{cases}(\vec{a}_B)_n+(\vec{a}_B)_t=\vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_n+(\vec{a}_{B/A})_t\\(a_B)_n=0.625\ m/s^2\ ,\ (a_B)_t=0.1\alpha_{BF}\\(a_{B/A})_n=0.2\omega^2=0.8\ m/s^2\ ,\ (a_{B/A})t=0.2\alpha\end{cases}\Rightarrow[.625\nearrow]+[0.1\alpha_{BF}\searrow]=[.625\nwarrow]+[.8\leftarrow]+[0.2\alpha\updownarrow]$$

$$\Rightarrow\ \alpha=12(rad/s)$$

$$\vec{a}_C=\vec{a}_A+(\vec{a}_{C/A})_n+(\vec{a}_{C/A})_t=[.625\nwarrow]+[.125\times2^2\nwarrow]+[.125\times12\nearrow]=1.875(m/s^2)\uparrow$$

حرکت صفحه ای به روش پارامتری





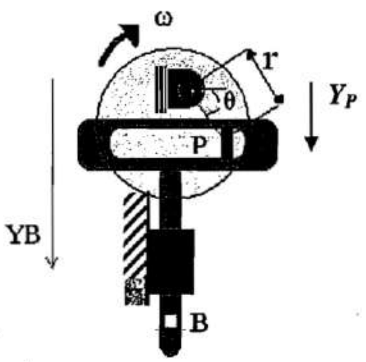
$$x_A=l\sin\theta\ ,\ y_B=l\cos\theta$$

$$V_A=\frac{dx_A}{dt}=\frac{d}{dt}(l\sin\theta)=l\dot{\theta}\cos\theta=l\omega\cos\theta$$

$$V_B=\frac{dy_B}{dt}=\frac{d}{dt}(l\cos\theta)=-l\dot{\theta}\sin\theta=-l\omega\sin\theta$$

$$a_A=\frac{dV_A}{dt}=\frac{d}{dt}(l\omega\cos\theta)=l\dot{\omega}\cos\theta-l\omega^2\sin\theta=l\alpha\cos\theta-l\omega^2\sin\theta$$

$$a_B=\frac{dV_B}{dt}=\frac{d}{dt}(-l\omega\sin\theta)=-l\dot{\omega}\sin\theta-l\omega^2\cos\theta=-l\alpha\sin\theta-l\omega^2\cos\theta$$



مثال : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α درحال حرکت است . فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد .

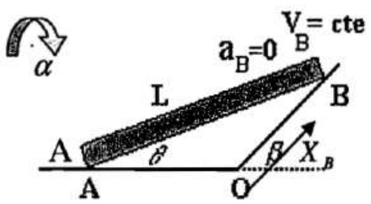
مطلوب است: $V_B=?\ ,\ a_B=?$

حل :

$$\begin{cases}y_B=y_p+C\\y_p=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow y_B=r\sin\theta+C\Rightarrow V_B=\frac{dy_B}{dt}=r\omega\cos\theta\ \Rightarrow\ a_B=\frac{dV_B}{dt}=r\alpha\cos\theta-r\omega^2\sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .

مطلوب است : $\vec{V}_E=?\ ,\ a_E=?$

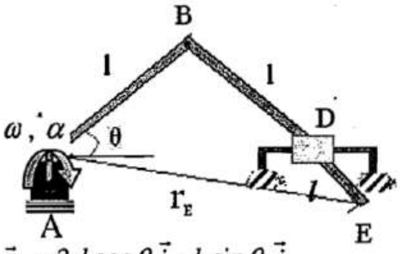


حل :

$$\frac{X_B}{Sin\theta}=\frac{L}{Sin\beta}\Rightarrow V_B=\frac{dX_B}{dt}=\frac{L\omega Cos\theta}{Sin\beta}\quad\Rightarrow\quad\omega_{AB}=\frac{V_BSin\beta}{LCos\theta}$$

$$\Rightarrow\ \alpha_{AB}=\dot{\omega}_{AB}=\frac{V_BSin\beta}{L}\times\frac{\omega_{AB}Sin\theta}{Cos^2\theta}=\frac{V^2{}_BSin^2\beta}{L^2Cos^3\theta}Sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .
مطلوب است : $\vec{V}_E=?$, $\vec{a}_E=?$



حل :

$$\vec{r}_E = 3\,l\cos\theta\,\vec{i} - l\sin\theta\,\vec{j}$$

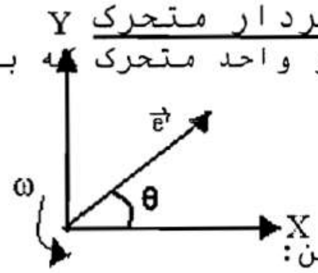
$$\vec{V}_E=\frac{d}{dt}\vec{r}_E \quad , \quad \vec{a}_E=\frac{d\vec{V}_E}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_E = -3l\omega\sin\theta\,\vec{i} - l\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_E = -3l(\dot{\omega}\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec{i} - l(\dot{\omega}\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec{j} = -3l(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec{i} - l(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec{j}$$

مشتق بردار متحرک

بردار واحد متحرک که با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد $\vec{e}=$



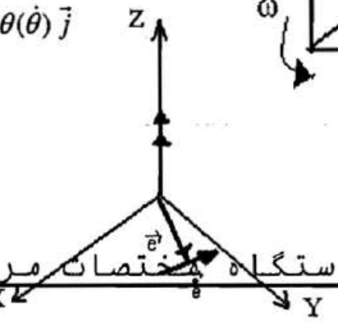
$$\vec{e}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}) = -\sin\theta(\dot{\theta})\,\vec{i}+\cos\theta(\dot{\theta})\,\vec{j}$$

بنابراین:

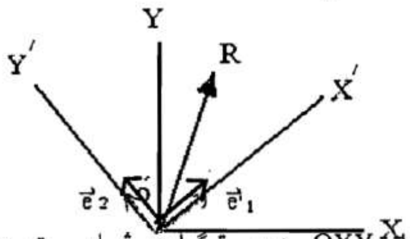
$$\Rightarrow |\dot{e}|=\omega \qquad \frac{de}{dt}=\dot{\vec{e}}=-\omega\sin\theta\,\vec{i}+\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e}$$



بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک

$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}=R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2$$



$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)$$

$$\dot{\vec{R}}=\dot{R}_1\vec{e}_1+R_1\dot{\vec{e}}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

که در این روابط OXY دستگاه ثابت و O´X´Y´ دستگاه متحرک و $\vec{i},\vec{j}$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ در دستگاه متحرک است. پس داریم :

$$\dot{\vec{R}}=(\dot{R}_1\vec{e}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2)+R_1\dot{\vec{e}}_1+R_2\dot{\vec{e}}_2 \Rightarrow \dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'_1+\vec{\omega}\times(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2) \Rightarrow \dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'_1+R_1(\vec{\omega}\times\vec{e}_1)+R_2(\vec{\omega}\times\vec{e}_2)$$

تئوري امگا $\qquad \Rightarrow \dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{\omega}\times\vec{R}$

که دستگاه مطلق : $\dot{\vec{R}}$ و دستگاه متحرک: $\dot{\vec{R}}'$.

سرعت یک نقطه مادی:

دستگاه ثابت : OXY $\qquad$ دستگاه متحرک : O´X´Y´

$\vec{S}$: بردار موقعیت نقطه P است.

$\vec{R}$: بردار موقعیت نقطه O´ (مطلق) و $\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)