# ۱

# مقدمات

## ۱. ۱ پایهٔ معادلات دیفرانسیل

یک معادلهٔ شامل مشتقات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر را **معادلهٔ دیفرانسیل** می نامیم. اگر تابع فقط شامل یک متغیر مستقل باشد معادله را **معادلهٔ معمولی** می نامیم. در این صورت مشتقات موجود در معادله، معمولی هستند. اگر تابع شامل بیش از یک متغیر مستقل باشد، **معادله با مشتقات جزئی** نامیده می شود.

بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادله، **مرتبهٔ معادله** نامیده می شود و توان بالاترین مشتق موجود در معادله را **درجهٔ معادله** می نامیم، به شرطی که به صورت چند جمله ای از مشتقات تابع بیان شده باشد.

**مثال ۱.** معادلهٔ

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y=x$$

یک معادلهٔ معمولی مرتبهٔ دوم از درجهٔ دوم می باشد.

**مثال ۲.** معادلهٔ $y' = \sqrt{x+y}$ یک معادلهٔ معمولی مرتبهٔ اول از درجهٔ دوم است، زیرا $(y')^2 = x + y$ یک چند جمله ای از مشتقات تابع می باشد.

**مثال ۳.** معادلات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

نمونه ای از معادلات با مشتقات جزئی هستند.

چون در این کتاب، معادلات دیفرانسیل معمولی را مطالعه می کنیم، از این به بعد کلمه معمولی را حذف می کنیم.

شکل کلی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه $n$ ام به صورت

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (۱)$$

می باشد. در این کتاب معادلاتی را در نظر می گیریم که به صورت

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (۲)$$

قابل بیان باشد. اگر $F$ تابعی خطی از مشتقات $y$ باشد، **معادلهٔ خطی** نامیده می شود.

شکل کلی معادلهٔ دیفرانسیل خطی از مرتبه $n$ به صورت

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \qquad (۳)$$

می باشد که $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ توابعی از $x$ بوده که ضرایب نامیده می شوند. اگر $g(x) = 0$ معادلهٔ (۳) **همگن** است ، در غیر این صورت **غیر همگن** می باشد. معادله ای که به صورت (۳) نباشد، معادله ای غیر خطی است.

**مثال ٤.** معادلهٔ $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$ یک معادلهٔ خطی غیر همگن مرتبهٔ دوم است.

**مثال ۵.** معادلات زیر، خطی نمی باشند (چرا؟)

۱) $y'' + 3xyy' + 2y = \sin x$

$$\text{۲)} \quad y'' + e^y = 1$$

معادلهٔ

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

که

$$y(x_0) = a_1 \, , \; y'(x_0) = a_2 \, , \ldots , y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

یک **معادله با شرایط اولیه** نامیده می شود. اگر شرایط در دو نقطه بیان شده باشند، یک **مسأله با مقدار مرزی** داریم. معادلهٔ $y' = f(x, y)$ که $y(x_0) = y_0$ یک مسأله با شرط اولیه و مسألهٔ $y'' = f(x, y, y')$ که $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ یک مسأله با مقادیر مرزی است.

تابع $y = \phi(x)$ را **جواب** معادلهٔ دیفرانسیل $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ می نامیم اگر در ناحیه ای از صفحه در معادلهٔ فوق صدق کند.

**مثال ٦.** $y = e^{2x}$ یک جواب معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ می باشد، زیرا داریم:

$$y' = 2e^{2x} \, , \quad y'' = 4e^{2x}$$

که

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$$

همینطور $y = e^x$ هم جواب معادله است. می توان دید که تابع $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$ نیز به ازای هر $c_1$ و $c_2$ جواب معادله می باشد. ملاحظه می شود، جواب های یک معادلهٔ دیفرانسیل می تواند بیشمار باشد. در این مثال، چون $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$ صورت کلی جواب های معادلهٔ داده شده می باشد، جواب عمومی معادله نامیده می شود.

منحنی های جواب های یک معادلهٔ دیفرانسیل را **منحنی های انتگرال** آن معادله می نامند. جواب $y = e^{2x}$ که با اختیار $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ از جوب عمومی به دست آمده، یک جواب خصوصی معادله نامیده می شود. همینطور $y = e^x$ هم یک جواب خصوصی معادله می باشد.

درحالت کلی، **جواب عمومی** معادلهٔ مرتبه $n$:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

تابعی است که شامل $n$ ثابت دلخواه بوده و این تابع به ازای هر مجموعه ای از ثابت ها در معادله صدق می کند. بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ بالا به صورت

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

می باشد.

**جواب خصوصی:** جوابی از معادله که از نسبت دادن مقادیر خاص به ثابت های جواب عمومی به دست می آید، **جواب خصوصی** معادله نامیده می شود .

**مثال ۷.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ جواب عمومی معادلهٔ $y'' + 4y = 0$ می باشد که $y = \cos 2x$ و $y = \cos 2x + 2\sin 2x$ جواب های خصوصی معادله می باشند. ملاحظه می شود، جواب های خصوصی معادله بیشمار می باشند.

**جواب غیر عادی:** جوابی از یک معادله را که نتوان از جواب عمومی به دست آورد، **جواب غیر عادی (منفرد)** می نامند.

**مثال ۸.** در معادلهٔ $y = xy' + (y')^2$، تابع $y = cx + c^2$ جواب عمومی معادلهٔ فوق می باشد. تابع $y = -\dfrac{x^2}{4}$ هم جواب معادله می باشد که از جواب عمومی به دست نیامده است. پس یک جواب غیر عادی (منفرد) محسوب می شود.

## ۲.۱ تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل

معمولاً متداول است که یک معادلهٔ دیفرانسیل مفروض را حل کنیم اما گاهی دسته ای از منحنی ها داده می شود که برای آن معادلهٔ دیفرانسیل بیابیم. در حالت کلی برای یافتن معادلهٔ دیفرانسیل منحنی های $y = \Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ دستگاه $n+1$ معادله و $n$ مجهول $c_1, c_2, \ldots, c_n$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} y=\phi(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \\ y'=\phi'(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)}=\phi^{(n)}(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \end{cases} \qquad (۴)$$

با حذف $n$ پارامتر $c_1,c_2,\dots,c_n$ از دستگاه فوق معادلهٔ دیفرانسیل مورد نظر به دست می آید. برای این کار می توان ثابت های $c_1,c_2,\dots,c_n$ را از $n$ معادلهٔ دستگاه به دست آورده و با قرار دادن در معادلهٔ $(n+1)$ ام، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ $n$ ام مطلوب را به دست آورد.

**مثال ۱.** معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ منحنی های $y=cx+c^2$ را بیابید.

**حل:** معادله، دارای ثابت $c$ می باشد بنا به (۴)

$$\begin{cases} y=cx+c^2 \\ y'=c \end{cases}$$

پس مقدار $c$ را از معادله دوم در معادلهٔ اول جانشین می کنیم. معادلهٔ مورد نظر عبارت است از :

$$y=xy'+y'^2 .$$

**مثال ۲.** معادلهٔ دیفرانسیل منحنی های $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$ را بیابید.

**حل:** دستگاه (۴) را تشکیل می دهیم.

$$\begin{cases} y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x} \\ y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}+3c_3e^{3x} \\ y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}+9c_3e^{3x} \\ y'''=c_1e^x+8c_2e^{2x}+27c_3e^{3x} \end{cases}$$

حال با حذف ثابت های $c_1$ ، $c_2$ ، $c_3$ و $c_4$ از دستگاه بالا، معادلهٔ مورد نظر به دست می آید. ابتدا داریم:

$$\begin{cases} y'-y=c_2e^{2x}+2c_3e^{3x} \\ y''-y'=2c_2e^{2x}+6c_3e^{3x} \\ y'''-y''=4c_2e^{2x}+18c_3e^{3x} \end{cases}$$

با کم کردن دو برابر معادلهٔ اول از معادلهٔ دوم و دو برابر معادلهٔدوم از معادلهٔ سوم داریم:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2c_3 e^{3x} \\ y''' - 3y'' + 2y' = 6c_3 e^{3x} \end{cases}$$

دیده می شود $y''' - 3y'' + 2y' = 3(y'' - 3y' + 2y)$ بنابراین معادلهٔ مطلوب به دست می آید که عبارت است از:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

**مثال ۳.** معادلهٔ دیفرانسیل منحنی های $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ را تعیین کنید.

**حل:** $A$ و $B$ و $C$ ثابت های اساسی معادله می باشند. پس با سه بار مشتق گیری از تابع داده شده، دستگاه معادله های زیر را داریم:

$$\begin{cases} y = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y'' = 6Ax + 2B \\ y''' = 6A \end{cases} \qquad (۵)$$

چون ثابت ها مقادیر دلخواه اختیار می کنند، لذا دستگاه فوق بیشمار جواب دارد. بنابراین دترمینان ضرایب دستگاه (۵) برابر صفر است؛ یعنی:

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & y \\ 3x^2 & 2x & 1 & y' \\ 6x & 2 & 0 & y'' \\ 6 & 0 & 0 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

از بسط دترمینان فوق خواهیم داشت:

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

**مثال ٤.** معادله با مشتقات جزئی تابع $u = f(x+y) + g(x-y)$ را تعیین کنید که در آن $f$ و $g$ توابعی دلخواه هستند.

در مثال فوق به جای ثابت های دلخواه، توابع دلخواه $f$ و $g$ قرار دارند. بنابراین با محاسبه مشتقات جزئی، آنها را حذف می کنیم:

$$u = f(x+y) + g(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+y) + g'(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x+y)-g'(x-y)$$

با مشتق گیری مجدّد نسبت به $x$ و $y$ از معادله های بالا داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+y)+g''(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x+y)+g''(x-y)$$

پس $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ که $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ معادله مطلوب است.

## تمرین

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷ تحقیق کنید که تابع یا توابع داده شده، جواب معادلهٔ دیفرانسیل نظیر است.

۱. $y=c_1(x^2+c_2)$ ; $y'=y''x$

۲. $xy+\cos x=c$ ; $xy'+y=\sin x$

۳. $y=\dfrac{c+x}{x^2+1}$ ; $y'=\dfrac{1-2xy}{x^2+1}$

۴. $y_1=x^{-2}$ و $y_2=x^{-2}\ln x$ ; $x^2y''+5xy'+4y=0\ ,\ x>0$

۵. $y=e^{x^2}\left(1+\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$ ; $y'-2xy=1$

۶. $y=x\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ; $xy'-y-x^2e^{-x^2}=0$

۷. $y=(c_1+c_2x)e^{3x}$ ; $y''-6y'+9y=0$

درجه و مرتبهٔ هر یک از معادلات دیفرانسیل مسائل ۸ تا ۱۱ را مشخّص کنید.

۸. $y'+\ln y=1$ ۹. $(y')^2+2xy'=x^2$

۱۰. $\sqrt{y''}=\sqrt[3]{1+y'}$ ۱۱. $\dfrac{dy}{dx}+2xy^2=0$

در مسائل ۱۲ تا ۱۶ معیّن کنید، کدامیک خطی و کدامیک غیر خطی است.

۱۲. $x^2y'' + y' + xy = \cos x$

۱۳. $y'' + y'^2 = \sin x$

۱۴. $y''' + xy' + (\cos^2 x)y = x$

۱۵. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y = x$

۱۶. $y'' + \cos(x+y) = \cos x$

در مسائل ۱۷ و ۱۸ تعیین کنید، به ازای چه مقدار $r$ تابع $y = e^{rx}$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده شده می باشد.

۱۷. $y'' + y' - 6y = 0$

۱۸. $y'' + y' = 0$

۱۹. برای چه مقدار $r$ تابع $y = x^r$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر می باشد.

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

در هر یک از مسائل ۲۰ تا ۲۱ معادلهٔ دیفرانسیلی بیابید که تابع داده شده، جواب آن باشد.

۲۰. $y = cx^2 + c^2$

۲۱. $y = ax^2 + bx + c$

۲۲. $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_2e^{3x}$

۲۳. $y = c_1(x^2 + c_2)$

۲۴. $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$

۲۵. $y = cx^2 + d$

۲۶. $a$ و $b$ پارامتر ثابت $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$

۲۷. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x}$

۲۸. $y = A\cos 2x + \sin 2x$

۲۹. $x^2 + \alpha y^2 = 1$

۳۰. $y = \dfrac{c_1}{x} + c_2$

۳۱. $y = ae^x - bx$

۳۲. اگر $y(x)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $e^{-x}y'' + xy' + y = 3$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ باشد، مقدار $y'''(0)$ را بیابید.

۳۳. اگر تابع $g$ جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + yy' - x^3 = 0$ با شرایط اولیه $g(-1) = 1$ و $g'(-1) = 2$ باشد. مقادیر $g''(-1)$ و $g'''(-1)$ را تعیین کنید.

# ۲

## معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

**مقدمه:** شکل کلی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، به صورت $F(x,y,y')=0$ می باشد، که $F$ تابعی دلخواه از $x$، $y$ و $y'$ است. متأسفانه راه کلی، برای حل معادلات مرتبهٔ اول، وجود ندارد. بنابراین مجبوریم آنها را دسته بندی نموده و راه حل های ویژهٔ هر دسته را به طور مجزا مطرح کنیم.

در این کتاب معمولاً با معادلات مرتبهٔ اول به صورت $y'=f(x,y)$ سروکار داریم. همینطور معادلهٔ $y'=f(x,y)$ که $y(x_0)=y_0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول با شرط اولیه می باشد.

## ۲. ۱ معادلات جدا شدنی

معادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ یا $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را **جدا شدنی** گوئیم اگر به شکل $M(x)dx+N(y)dy=0$ قابل بیان باشد. در این صورت:

$$\int^x M(x)dx+\int^y N(y)dy=c$$

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال ۱.** معادله با شرط اولیهٔ زیر را حل کنید.

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2 \ , \quad y(0) = 1$$

**حل:** داریم:

$$\frac{dy}{dx} = (1+x) + y^2(1+x)$$
$$= (1+x)(1+y^2)$$

یا

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)\,dx$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

$$\int^y \frac{dy}{1+y^2} = \int^x (1+x)dx + c$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

$$\tan^{-1} y = x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

با به کار بردن شرط اولیه $y(0) = 1$ داریم $c = \frac{\pi}{4}$ پس $y = \tan(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4})$ جواب خصوصی مورد نظر می باشد.

**مثال ۲.** معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 y - y}{y^4 + y^2 + 1}$$

به صورت

$$(x^3 - 1)dx = \left( y^3 + y + \frac{1}{y} \right) dy$$

قابل بیان می باشد. پس یک معادلهٔ جدا شدنی می باشد. بنابراین با انتگرال گیری

$$\frac{1}{4}x^4 - x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + \ln|y| + c$$

جواب عمومی معادله می باشد.

بعضی معادلات با تغییر متغیر مناسب قابل تبدیل به معادلات جدا شدنی می باشند. در این بخش چند نمونه از این معادلات را مطالعه می کنیم.

$y' = x^2 + 9y^2 - 6xy$



**الف)** هر معادله به شکل $y' = f(ax+by+c)$ که $f$ تابعی دلخواه، با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به معادله ای جدا شدنی تبدیل می شود.

**مثال ۳.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = (y+4x-1)^2$$

را حل کنید.

**حل:**

$$u = y+4x-1 \Rightarrow y' = u' - 4$$

با جانشینی در معادله داریم:

$$u' - 4 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 + u^2$$

یا

$$\frac{du}{4+u^2} = dx$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} = x + c$$

لذا

$$\tan^{-1}\frac{y+4x-1}{2} = 2x + c$$

**مثال ٤.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' = 2 + \frac{1}{x+y}$$

**حل:**

$$u = x + y \Rightarrow y' = u' - 1$$

با جانشینی در معادله داریم:

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u+1}{u}$$

بنابراین:

$$\frac{udu}{3u+1}=dx$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}\ln|3u+1|=x+c$$

پس:

$$\frac{1}{3}(x+y)-\frac{1}{9}\ln|3(x+y)+1|=x+c$$

## ب) معادلات همگن

**تعریف.** تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را همگن از درجهٔ $n$ گوئیم هر گاه به ازای هر مقدار حقیقی $\lambda$ داشیه باشیم $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

**مثال.** توابع $f(x,y)=xy^2$ و $g(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ به ترتیب همگن از درجه های ۳ و ۱- می باشند. اما تابع $f(x,y)=x+y+2$ همگن نیست.

**تعریف.** معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را **همگن** گوئیم اگر توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجه یکسان باشند.

**نکته:** معادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ همگن است اگر و تنها اگر $f$ تابعی از نسبت $\dfrac{y}{x}$ باشد.( چرا ؟ )

بنابراین یک معادله، همگن است اگربه صورت زیر قابل بیان باشد:

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (۱)$$

**مثال ۵.** معادلهٔ $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ همگن می باشد زیرا

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

**مثال ۶.** معادلهٔ

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}$$

همگن نمی باشد. زیرا نمی توانیم طرف دوم معادله را به صورت تابعی از $\frac{y}{x}$ بنویسیم.

معادلهٔ همگن (۱) با تغییر متغیر $y = vx$ به معادلهٔ جدا شدنی

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}$$

تبدیل می شود .

**مثال ۷.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

**حل:** با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست بر $x$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

چون طرف دوم تابعی از $\frac{y}{x}$ می باشد پس معادله، همگن است.به روش حل معادلهٔ همگن قرار می دهیم:

$$y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$$

با جانشینی در معادله داریم:

$$v + xv' = \frac{v - 1}{v + 1}$$

یا

$$\frac{(v+1)dv}{1 + v^2} = -\frac{dx}{x}$$

حال با انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

$$\frac{1}{2}\ln\left|1 + v^2\right| + \tan^{-1} v = -\ln|x| + c$$

پس:

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|+\tan^{-1}\frac{y}{x}=-\ln|x|+c$$

جواب عمومی معادله است.

**مثال ۸.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$(x+y\sin\frac{y}{x})dx-x\sin\frac{y}{x}dy=0$$

داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

پس معادلهٔ همگن است. حال با تغییر متغیر $y=vx$ داریم:

$$\sin v dv=\frac{dx}{x}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$-\cos v=\ln|x|+c$$

پس $-\cos\frac{y}{x}=\ln|x|+c$ جواب عمومی معادله است.

**مثال ۹.** معادله $y'=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$ را حل کنید.

با نوشتن این معادله به صورت

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x}+\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

دیده می شود که این معادله، همگن است. پس با تغییر متغیر $y=vx$ داریم:

$$x\frac{dv}{dx}=v+\frac{1}{v^3}$$

یا:

$$\frac{v^3}{v^4+1}dv=\frac{dx}{x}$$

$(x - y\cos\frac{y}{x})\,dx + (x\cos\frac{y}{x})\,dy = 0$



با انتگرال گیری از طرفین معادله

$$\frac{1}{4}\ln\left|v^4+1\right| = \ln|x| + \ln c$$

که در آن $c$ ثابت دلخواهی است. بنابراین

$$(v^4+1)^{\frac{1}{4}} = cx$$

با جانشین $\frac{y}{x}$ به جای $v$ داریم:

$$\left[\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1\right]^{\frac{1}{4}} = cx$$

**نکته.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

همگن نمی باشد، ولی در صورتی که $(\alpha,\beta)$ جواب دستگاه

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \qquad (۲)$$

باشد با تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$$

به معادله ای همگن تبدیل می شود (چرا؟)

اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ دستگاه (۲) دارای جواب نمی باشد. در این صورت با فرض $u = a_1x+b_1y$ معادله به معادله ای جُدا شدنی تبدیل می شود (چرا؟)

**مثال ۱۰.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(x+y+2)\,dx + (y-x+4)\,dy = 0$$

**حل:**

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -3,\quad \alpha = 1$$

با جانشینی

$$x = X + 1 \ , \ dx = dX$$
$$y = Y - 3 \ , \ dy = dY$$

در معادله داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

که این معادله، معادله ای همگن است. قرار می دهیم

$$Y = vX \Rightarrow Y' = v + Xv'$$

با جانشینی در معادله داریم:

$$\frac{dX}{X} + \frac{v-1}{1+v^2} dv = 0$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه داریم:

$$\ln|X| + \frac{1}{2}\ln|1+v^2| - \tan^{-1} v = c$$

بنابراین

$$\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right| - \tan^{-1}\frac{y+3}{x-1} = c$$

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال ۱۱.** معادلهٔ $(y-x)dx + (x-y+1)dy = 0$ را حل کنید.

با نوشتن این معادله به صورت،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y-x-1}$$

چون $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$ قرار می دهیم:

$$u = y - x$$

داریم،

$$\frac{du}{dx} + 1 = \frac{u}{u-1}$$

در نتیجه:

با تغییر متغیر $u=\sin y$ معادله زیر را حل کنید

تمرین ۱۷ $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u-1}$$

یا:

$$(u-1)du=dx$$

با انتگرال گیری

$$\frac{1}{2}u^2-u=x+c$$

حال $\frac{1}{2}(y-x)^2-(y-x)=x+c$ جواب عمومی معادله است.

بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با استفاده از تغییر متغیر $y=t^\alpha$ به یک معادلهٔ همگن تبدیل می شوند.

**مثال ۱۲.** معادلهٔ دیفرانسیل $4xy^2dx+(3x^2y-1)dy=0$ را حل کنید.

**حل:** با تغییر متغیر $y=t^\alpha$ داریم $dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$. با جانشینی در معادله داده شده خواهیم داشت:

$$4xt^{2\alpha}dx+(3x^2t^\alpha-1)\,(\alpha t^{\alpha-1}dt)=0$$

پس

$$4xt^{2\alpha}dx+\alpha(3x^2t^{2\alpha-1}-t^{\alpha-1})dt=0$$

برای همگن شدن معادله بایستی

$$2\alpha+1=\alpha-1$$

بنابراین $\alpha=-2$. حال

$$4xt^{-4}dx-2(3x^2t^{-5}-t^{-3})dt=0$$

یا

$$2xtdx+(t^2-3x^2)dt=0$$

معادله ای همگن می باشد که قابل حل است.

## تمرین

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $x^2y'+2=0$

۲. $xdy+3y^2dx=0$

۳. $2(xy+x)y' = y$

۴. $y' = \dfrac{2}{x(2-x)}$

۵. $xdy - ydx = y^2dx$

۶. $(x\ln x)dy = ydx$

۷. $y' = x^2y^2 - y^2 + x^2 - 1$

۸. $\dfrac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$

۹. $\sqrt{x^2+1}\,y' = xy^3$

۱۰. $(x^2y - y)dx + (xy^2 + x)dy = 0$

۱۱. $y' = x + y - 1\,,\quad y(0) = 1$

۱۲. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{\sin(x-y+1)}$

۱۳. $y' = e^{2x+y-1} - 2$

۱۴. $y'\ln(x-y) = 1 + \ln(x-y)$

۱۵. $y' = \sqrt{x+y}\,,\quad y(1) = 0$

۱۶. $y' = (x+y)(x+y-2)$

۱۷. $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$

۱۸. $x(x+y)\,y' = y^2$

۱۹. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

۲۰. $xyy' = y^2 + x^2$

۲۱. $xy^3y' = y^4 + x^4$

۲۲. $y' = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}$

۲۳. $y' - \dfrac{y}{x} = \cos^2\dfrac{y}{x}$

۲۴. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+2}{x-y-4}$

۲۵. $y' = \dfrac{x+y}{1-x-y}$

۲۶. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

۲۷. $(4x+2y-1)dx + (2x+y+1)dy = 0$

۲۸. $(x+y-1)dx = (x+4y+2)dy$

۲۹. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

۳۰. رابطهٔ افزایش جمعیت طبق معادلهٔ دیفرانسیل زیر داده شده است. تعداد جمعیت در $t = \infty$ را به دست آورید.

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \qquad \begin{cases} a = 10^{-1} \\ b = 10^{-7} \end{cases} \qquad \begin{aligned} t &= \text{زمان برحسب ماه} \\ p &= \text{تعداد جمعیت} \end{aligned}$$

۳۱. معادلات غیر همگن زیر را با تغییر متغیر $y = xv$ حل کنید.

الف) $xy' = y + x^2 \tan\dfrac{y}{x}$

ب) $(x^2+1)y(xy'-y) = x^3$

معادله های زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

۳۲. $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0, \quad xy = u$

۳۳. $xy^2(xy' + y) = 1 , \quad xy = u$

۳۴. $e^y y' = (x + e^y + 1) , \quad x + e^y = u$

۳۵. $(\ln x + y^2)dx - 2xydy = 0 , \quad \dfrac{y^2}{x} = t$

۳۶. $(y^4 - 3x^2)dx + x^2ydy = 0 , \quad y = t^\alpha$.

۳۷. الف) نشان دهید معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} f(\frac{y}{x^m})$$

با تغییر متغیر $y = x^m z$ به معادله ای جدا شدنی تبدیل می شود. با حل معادله در حالت کلی نشان دهید

$$x = ce^{\int \frac{dz}{f(z)-mz}}$$

ب) معادلهٔ دیفرانسیل $y' = 2x^{-2} - 3y^2$ را حل کنید.

## ۲. ۲ معادلات دیفرانسیل کامل

معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x,y) + N(x,y) = 0$$

**کامل** نامیده می شوداگر تابعی مانند $F(x,y)$ موجود باشد که

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

در این صورت داریم:

$$dF = 0$$

بنابراین $F(x,y) = c$ جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$2xy^3dx+3x^2y^2dy=0$$

کامل می باشد زیرا:

$$d(x^2y^3)=2xy^3dx+3x^2y^2dy$$

بنابراین $x^2y^3=c$ جواب عمومی معادله می باشد.

قضیهٔ زیر، یک روش عملی برای تشخیص اینکه یک معادله کامل است یا خیر، فراهم می سازد.

**قضیه:** فرض کنید توابع $M$، $N$، $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ در ناحیه $D$ پیوسته باشند. آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (۳)$$

کامل باشد، آن است که

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (x,y)\in D \qquad (۴)$$

**اثبات.** اگر معادلهٔ (۳) کامل باشد تابع $F(x,y)$ وجود دارد که

$$dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

در این صورت

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N$$

چون داریم $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ نتیجه می شود $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

حال برای اثبات عکس، تابعی مانند $F(x,y)$ می سازیم که

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N$$

از تساوی اول نتیجه می شود.

$$F(x,y)=\int^x M(t,y)dt+h(y)$$

بنابراین،

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int^x \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+h'(y)$$

یا

$$N(x,y)=\int^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+h'(y)$$

بنابراین

$$h'(y)=N(x,y)-\int^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt$$

چون طرف راست تساوی فقط تابعی از $y$ می باشد بنابراین از رابطهٔ اخیر $h(y)$ و سپس $F(x,y)$ محاسبه شده بنابراین $F(x,y)=C$ جواب معادله است.

**مثال ۱.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$$

روشن است که

$$M_y=-2xy=N_x$$

پس رابطهٔ (۴) برقرار و معادله کامل است. بنابراین تابع $F(x,y)$ وجود دارد به طوری که

$$F_x(x,y)=M=2x^3-xy^2$$
$$F_y(x,y)=N=2y^3-x^2y$$

از انتگرال معادلهٔ اول داریم:

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2+h(y)$$

حال با مشتقگیری نسبت به $y$ داریم

$$F_y(x,y)=-x^2y+h'(y)$$

با توجه به رابطه $F_y=N$ قرار می دهیم

$$2y^3-x^2y=-x^2y+h'(y)$$

پس $h'(y)=2y^3$ بنابراین $h(y)=\frac{1}{2}y^4$ در نتیجه $F(x,y)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}y^4$

پس

$$x^4-x^2y^2+y^4=c$$

جواب عمومی معادله است .

**مثال ۲.** معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$(x+y+x^2)dx+(x+y+y^2)dy=0$$

روشن است

$$M_y=1=N_x$$

پس معادلهٔ داده شده کامل است بنابراین

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int M(x,y)dx+h(y)\\&=\int^x (x+y+x^2)dx+h(y)\\&=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{3}x^3+h(y)\end{aligned}$$

با توجه به رابطه $\frac{\partial F}{\partial y}=N$ داریم:

$$x+h'(y)=x+y+y^2$$

پس $h'(y)=y+y^2$ بنابراین $h(y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+c$

حال

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+c$$

بنابراین $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3=c$ جواب عمومی معادله است.

## ۲. ۳ عامل انتگرال ساز

گاهی معادلهٔ غیر کامل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (۵)$$

با ضرب در تابعی ناصفر مانند $\mu(x,y)$ به یک معادلهٔ کامل تبدیل می شود در این صورت $\mu$ را **عامل انتگرال ساز** معادله نامیم.

**مثال.** معادله

$$\left(3x+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

کامل نمی باشد زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

اما با ضرب در $\mu(x,y)=xy$

$$(3x^2y+6x)+(x^3+3y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

معادله ای کامل می باشد زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2=\frac{\partial N}{\partial x}$$

با توجه به اینکه عامل انتگرال ساز، معادله را به یک معادلهٔ کامل تبدیل می کند که قابل حل است، پیدا کردن عامل انتگرال ساز دارای اهمیت ویژه می باشد. اگر $\mu$ عامل انتگرال ساز معادله (۵) باشد در این صورت معادله

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

کامل است، پس داریم

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

و در نتیجه،

$$M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}=N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (۶)$$

در حالت کلی، عملاً محاسبه $\mu$ از معادلهٔ (۶) براحتی انجام نمی شود. بنابراین در حالتهای خاص، عامل انتگرال را محاسبه می کنیم:

الف) اگر $\mu$ تابعی فقط از $x$ باشد داریم:

$$\mu=\mu(x)$$

پس

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}=0\ ,\qquad \frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}$$

بنابراین معادلهٔ (۶) به صورت

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx=\frac{d\mu}{\mu}$$

تبدیل می شود. چون $\frac{d\mu}{\mu}$ تابعی از $x$ است پس سمت چپ هم تابعی از $x$ می باشد. مثلاً

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d\mu}{\mu}=f(x)dx$$

پس

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx} \qquad (۷)$$

به دست می آید.

ب) اگر $\mu$ فقط تابعی از $y$ باشد. با استدلالی مشابهٔ حالت اخیر، داریم:

$$g(y)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

هم فقط تابعی از $y$ می باشد و بنابراین

$$\mu(y)=e^{\int g(y)dy} \qquad (۸)$$

یک عامل انتگرال ساز می باشد.

**مثال.** معادله زیر را با یافتن یک عامل انتگرال ساز حل کنید.

$$(x^2+x-y^2)dx+xydy=0$$

**حل:** چون $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{3}{x}$ تابعی از $x$ است. پس $\mu=e^{\int f(x)dx}=x^{-3}$ عامل انتگرال ساز معادله می باشد که با ضرب طرفین معادله در $x^{-3}$

$$(x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}y^2)dx+x^{-2}ydy=0$$

معادله ای کامل است لذا

$$F(x,y)=\int(x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}y^2)dx+h(y)$$

$$= \ln x - x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}y^2 + h(y)$$

با توجه به رابطه $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ داریم. $x^{-2}y + h'(y) = x^{-2}y$ بنابراین $h'(y) = 0$ پس $h(y) = c$ بنابراین $\ln x - x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}y^2 + c = 0$ جواب عمومی معادله است.

**مثال.** یک عامل انتگرال ساز برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(3x^2y + y^2)dx + (2x^3 + 3xy)dy = 0$$

یافته و معادله را حل کنید.

**حل.** داریم

$$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}$$

بنابراین

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

با ضرب طرفین معادله در عامل انتگرال ساز

$$(3x^2y^2 + y^3)dx + (2x^3y + 3xy^2)dy = 0$$

معادله کامل می شود پس به روش معادلهٔ کامل قابل حل است بنابراین تابعی مانند $F(x,y)$ موجود است که

$$F(x,y) = \int^y Ndy + g(x)$$

$$= \int^y (2x^3y + 3xy^2)dy + g(x) = x^3y^2 + xy^3 + g(x)$$

با توجه به رابطه $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ داریم

$$3x^2y^2 + y^3 + g'(x) = 3x^2y^2 + y^3$$

بنابراین $g'(x) = 0$ و لذا $g(x) = c$. حال با توجه به $F(x,y) = c$ پس $x^3y^2 + xy^3 = c$ جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال.** یک عامل انتگرال ساز به شکل $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ برای معادلهٔ

$$y(2-3xy)dx - xdy = 0$$

یافته سپس معادله را حل کنید.

**حل:** با ضرب طرفین معادلهٔ داده شده در $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$، معادلهٔ

$$(2x^{\alpha}y^{\beta+1}-3x^{\alpha+1}y^{\beta+2})dx - x^{\alpha+1}y^{\beta}dy = 0$$

کامل می شود پس $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ بنابراین

$$2(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}-3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}2(\beta+1)=-(\alpha+1)\\ -3(\beta+2)=0\end{cases}$$

پس $\alpha=1$ و $\beta=-2$ لذا $\mu(x,y)=xy^{-2}$.

حال با ضرب طرفین معادلهٔ داده شده در عامل انتگرال ساز، معادلهٔ

$$xy^{-1}(2-3xy)dx - x^2y^{-2}dy = 0$$

کامل می شود، بنابراین

$$F = \int^{y} -x^2y^{-2}dy + g(x) = x^2y^{-1}+g(x)$$

با توجه به رابطهٔ $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M$ داریم

$$2xy^{-1}+g'(x)=2xy^{-1}-3x^2 \Rightarrow g'(x)=-3x^2 \Rightarrow g(x)=-x^3$$

پس $x^2y^{-1}-x^3=c$ جواب عمومی است.

**نکته ۱.** معادلهٔدیفرانسیل $yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$ دارای عامل انتگرال ساز به شکل $\mu=\dfrac{1}{xy[f_1(xy)-f_2(xy)]}$ می باشد.(چرا؟)

**نکته ۲.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$y(Kx^ay^b+Lx^cy^d)dx + x(Mx^ay^b+Nx^cy^d)dy = 0$$

دارای عامل انتگرال $\mu=x^my^n$ می باشد اگر $KN\neq ML$ که $m$ و $n$ از حل دستگاه زیر به دست می آیند.(چرا؟)

$$\begin{cases}K(n+b+1)=M(m+a+1)\\ L(n+d+1)=N(m+c+1)\end{cases}$$

## تمرین

ابتدا نشان دهید معادلات دیفرانسیل داده شده کامل می باشند سپس معادله را حـل کنید.

۱. $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

۲. $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

۳. $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$

۴. $(ye^x + e^y)dx + (e^x + xe^y)dy = 0$

۵. $(x+y)y' + y = x$

۶. $(3x^2y^2 + x + e^y)dx + (2x^3y + y + xe^y)dy = 0$

۷. $x^3 - y\sin x + (\cos x + 2y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

۸. $(x^2 + xy\sin 2x + y\sin^2 x)dx + x\sin^2 x dy = 0$

۹. $(xy-1)ydx + x(xy-1)dy = 0$

۱۰. $xdy + ydx = \sin x dx$

۱۱. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + y\cos x}{4y^3 - \sin x}$

۱۲. $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

معادلات دیفرانسیل زیر را با یافتن عامل انتگرال مناسب حل کنید.

۱۳. $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$

۱۴. $(e^x - \sin y)dx + \cos y dy = 0$

۱۵. $2xydx + (4y + 3x^2)dy = 0$

۱۶. $dy + \dfrac{y - \sin x}{x}dx = 0$

۱۷. $(xy - \sin x)dx + x^2dy = 0$

۱۸. $[xy + (x-2)e^x]dx - x^2dy = 0$

۱۹. $y' + \dfrac{2}{x}y = x$

## ۲. ٤ معادلات خطی

صورت کلی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (۹)$$

می باشد که $p$ و $q$ توابعی پیوسته از $x$ هستند. رابطهٔ (۹) شکل استاندارد معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول هم گفته می شود.

معادلهٔ (۹) را می توان به صورت

$$\big(p(x)y-q(x)\big)dx+dy=0$$

نوشت. چون

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$$

تابعی فقط از $x$است، بنابه (۷)

$$\mu=e^{\int p(x)dx}$$

یک عامل انتگرال (۹) می باشد. حال با ضرب طرفین معادلهٔ(۹) در عامل انتگرال، معادلهٔ

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

کامل شده داریم:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

بنابراین

$$ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx+c$$

پس

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int^{x}q(x)e^{\int^{x}p(x)dx}dx\right) \qquad (۱۰)$$

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال ۱.** جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید.

$$dy + (y\cot x - e^{\cos x})dx = 0\ , \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

شکل استاندارد، معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = e^{\cos x}$$

می باشد. عامل انتگرال ساز $\mu$ عبارت است از:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

با ضرب دو طرف معادله در عامل انتگرال ساز داریم:

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x e^{\cos x}$$

پس

$$(\sin x \cdot y)' = \sin x e^{\cos x}$$

بنابراین

$$\sin x \cdot y = \int^x \sin x e^{\cos x} dx + c = -e^{\cos x} + c$$

لذا جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = \frac{1}{\sin x}(c - e^{\cos x})$$

شرط اولیه $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ مستلزم آن است که $c = 2$، و از این رو

$$y = \csc x(2 - e^{\cos x})$$

جواب مسأله می باشد.

**مثال ۲.** معادلهٔ $y' = 2y + e^{2x}\cos 3x$ را حل کنید.

**حل.** شکل استاندارد، معادلهٔ

$$y' - 2y = e^{2x}\cos 3x$$

می باشد. عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ است. پس

$$\frac{d}{dx}(ye^{-2x}) = \cos 3x$$

حال

$$ye^{-2x} = \int \cos 3x dx$$

لذا

$$y = e^{2x}(\frac{1}{3}\sin 3x + c)$$

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال۳.** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$$

با وارون کردن طرفین معادله داریم:

$$\frac{dx}{dy} = e^y - x$$

حال معادلهٔ

$$\frac{dx}{dy} + x = e^y$$

نسبت به $x$ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول می باشد. بنابراین

$$\mu = e^{\int dy} = e^y$$

عامل انتگرال ساز معادله است. پس $\frac{d}{dy}(e^y x) = e^{2y}$

بنابراین

$$e^y x = \int e^{2y} dy + c = \frac{1}{2}e^{2y} + c$$

در نتیجه

$$x = e^{-y}(c + \frac{1}{2}e^{2y})$$

جواب عمومی معادله است.

**مثال٤.** جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'\cos y+\sin y=e^{-x}$$

را بیابید.

**حل:** با تغییر متغیر $u=\sin y$ داریم $u'=y'\cos y$. با جانشینی در معادله، معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$u'+u=e^{-x}$$

به دست می آید. پس بنا به (۱۰) داریم:

$$u=e^{-\int dx}\left(c+\int e^{-x}e^{\int dx}dx\right)$$

بنابراین

$$\sin y=e^{-x}\left(c+\int dx\right)\Rightarrow \sin y=e^{-x}(c+x)$$

**نکته.** هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به صورت کلی

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)p(x)=q(x)$$

با تغییر متغیر $u=f(y)$ تبدیل به یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول می شود.(چرا؟)
بعضی معادلات با تغییر متغیر مناسب قابل تبدیل به یک معادلهٔ خطی می باشند در زیر دو نوع مهم آن را بررسی می کنیم.

## ۲. ۵ معادله برنولی[۱]

صورت کلی معادلهٔ برنولی

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \qquad (۱۱)$$

می باشد که $p$ و $q$ توابعی از $x$ هستند. اگر $1$ یا $n=0$ معادلهٔ خطی می باشد. با تقسیم طرفین معادله (۱۱) بر $y^n$ داریم:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \qquad (۱۲)$$

با اعمال $v=y^{1-n}$ داریم:

Scanned by CamScanner

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

با جانشینی روابط اخیر در معادلهٔ (۱۲) معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول زیر حاصل می شود:

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)p(x)v=(1-n)q(x)$$

**مثال ۱.** معادلهٔ دیفرانسیل $xdy-ydx=xy^2dx$ را حل کنید.

**حل:** با تقسیم طرفین معادله بر $xdx$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^2$$

با ضرب طرفین معادله در $y^{-2}$ داریم:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=1$$

با تغییر متغیر $v=y^{-1}$ داریم $\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$، پس

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-1$$

یک معادلهٔ خطی است بنابه (۱۰)

$$v=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(c+\int-e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right).$$

پس

$$y^{-1}=\frac{1}{x}\left(c-\frac{1}{2}x^2\right)$$

**مثال ۲.** معادلهٔ $y^2dx+(xy-x^3)dy=0$ را حل کنید.

**حل:** با تقسیم طرفین معادله بر $y^2dy$ معادلهٔ برنولی

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^2}x^3$$

نسبت به $x$ به دست می آید. با ضرب در $x^{-3}$ داریم:

$$x^{-3}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-2}=\frac{1}{y^2}$$

با تغییر متغیر $v=x^{-2}$ داریم:

$$\frac{dv}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$$

با جانشینی در معادلهٔ بالا، معادلهٔ خطی زیر به دست می آید:

$$\frac{dv}{dy}-\frac{2}{y}v=-\frac{2}{y^2}$$

$$v=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(c+\int-\frac{2}{y^2}e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy\right)$$

$$=e^{2\ln y}\left(c+\int-\frac{2}{y^2}e^{-2\ln y}dy\right)$$

پس

$$v=y^2\left(c+\int-2y^{-4}dy\right)$$

بنابراین

$$x^{-2}=y^2\left(c+\frac{2}{3}y^{-3}\right)$$

جواب عمومی معادله است.

**مثال۳.** اگر $y'+x\tan y=x^3\tan y\sin^5 y$ داریم $y'\cos y+x\sin y=x^3\sin^6 y$ با تغییر متغیر $u=\sin y$ خواهیم داشت $u'=y'\cos y$ و بنابراین $u'+xu=x^3u^6$ یک معادله برنولی است.

## ۲.۶ معادله ریکاتی [۱]

معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2 \qquad (۱۳)$$

به معادلهٔ دیفرانسیل **ریکاتی** معروف است . در حالت کلی برای حل این معادله به یک جواب خصوصی معادله نیاز داریم. اگر $y_1$ یک جواب خصوصی معادله باشد. با تغییر متغیر $y = y_1 + z$ معادله به معادلهٔ برنولی

$$\frac{dz}{dx} - [q(x) + 2y_1 r(x)]z = r(x)z^2$$

و با تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{z}$ به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول زیر تبدیل می شود.

$$\frac{dz}{dx} + [q(x) + 2y_1 r(x)]z = -r(x) \qquad (۱۴)$$

با حل معادله های اخیر جواب عمومی معادلهٔ ریکاتی به دست می آید.

**مثال ۱.** معادلهٔ دیفرانسیل $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ ، که $y_1 = x$ یک جواب آن می باشد، را حل کنید .

**حل:** با تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{z}$ یعنی $y = x + \frac{1}{z}$ ، داریم: $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$. با جایگزینی در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{-z'}{z^2} = x^2 - 2x\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2$$

یا

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow z' = -1 \Rightarrow z = -x + c$$

بنابراین $y = x + \frac{1}{c - x}$ جواب عمومی معادله است.

**مثال ۲.** معادلهٔ $x^2 y' - xy + y^2 = x^2$ مفروض است.

الف) $a$ را بقسمی بیابید که $y = ax$ یک جواب معادله باشد.

ب) معادله را حل کنید.

**حل:**

$$y = ax \Rightarrow y' = a$$

با جانشینی در معادله داریم:

$$a^2x^2 = x^2$$

پس $a^2 = 1$ بنابراین $a = \pm 1$ .

ب) معادله داده شده را می توان به صورت زیر نوشت

$$y' = 1 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2 \qquad (۱۵)$$

با تغییر متغیر $y = x + \frac{1}{z}$ داریم $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$

با جانشینی در معادلهٔ (۱۵) داریم:

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2} \qquad (۱۶)$$

معادلهٔ خطی (۱۶) دارای جواب زیر می باشد.

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx\right)$$

یا:

$$z = \frac{2cx^2 - 1}{2x}$$

پس $y = x + \frac{2x}{2cx^2 - 1}$ جواب عمومی معادله است.

## تمرین

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $xy' - y = x^2 \cos x$

۲. $xy' - y = 3x^3$

۳. $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$

۴. $y' + y \tan x = 2\cos^2 x$

۵. $(x^2 + 1)y' + 3xy = 6x$

۶. $y' + y = \frac{1}{e^x}$

۷. $(\cos x)y' + y \sin x = 2x \cos^2 x$

۸. $\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}y = x^k;\ x > 0$

۹. $y\frac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$

۱۰. $ydx + (3 + 3x - y)dy = 0$

۱۱. $(e^y - 2xy)y' = y^2$

معادلات با شرایط اولیهٔ زیر را حل کنید.

۱۲. $y' + \frac{1}{x}y = x\,; \quad y(1) = 0$

۱۳. $x^2y' + xy = 1\,;\ y(1) = 2\,,\ x > 0$

۱۴. $xy' + y - x^2 = 0\,;\ y(1) = 0$

۱۵. $xy' = 2y + x^3e^x\,; \quad y(1) = 0$

معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱۶. $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$

۱۷. $xyy' = y^2 + 2x^4\cos x^2$

۱۸. $y' + y = \frac{x}{y}$

۱۹. $y' + y\sin x = y^3\cos x$

۲۰. $\frac{dy}{dx} + y = y^2(x-1)$

۲۱. $y' - y(y^5\sin x + \cot x) = 0$

۲۲. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$

۲۳. $(y^2 - xy)dx + (x+1)dy = 0$

۲۴. $y^2dx + (xy - x^3)dy = 0$

۲۵. $ydx + (2x + x^5y^{10})dy = 0$

۲۶. $2y'\cos y + \sin y = \frac{x^2}{\sin y}$

۲۷. معادلهٔ $\frac{dy}{dx} + xy = xy^{-1}$ را با تغییر متغیر $z = y^4$ حل کنید.

معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

۲۸. $y_1 = x \quad ; \quad y' = y^2 + (1-2x)y + (x^2 - x + 1)$

۲۹. $y_1 = 1 \quad ; \quad xy' + y + y^2 = 2$

۳۰. $y_1 = \frac{1}{x} \quad ; \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$

۳۱. $y_1 = \sin x \quad ; \quad 2y'\cos x = 2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2$

۳۲. $y_1 = x \quad ; \quad y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$

۳۳. $y_1 = 2 \quad ; \quad y' = xy^2 - 2y + 4 - 4x$

۳۴. مقدار $m$ را طوری بیابید که $y = x^m$ در معادلهٔ $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$ صدق کند. سپس جواب عمومی معادله را بیابید.

## ۲. ۷ معادله کلرو[1]

هر معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی $y = xy' + g(y')$ به **معادله کلـرو** معـروف اسـت.

برای حل این معادله با تغییر متغیر $y' = p$ ، داریم:

$$y = xp + g(p) \qquad (۱۷)$$

از این رابطه نسبت به $x$ مشتق می گیریم،

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

پس $\frac{dp}{dx}[x + g'(p)] = 0$ بنـابراین $\frac{dp}{dx} = 0$ یـا $x + g'(p) = 0$. اگـر $\frac{dp}{dx} = 0$ داریـم $p = y' = c$، با جانشینی در معادلهٔ (۱۷) داریم $y = cx + g(c)$ که جواب عـمومی معادلـه می باشد.

اگر $x + g'(p) = 0$، با حذف $p$ از دستگاه

$$\begin{cases} y = xp + g(p) \\ x + g'(p) = 0 \end{cases}$$

جواب منفرد معادله به دست می آید.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$ را حل کنید.

**حل:** این معادله یک معادلهٔ کلرو است. با فرض $y' = p$ معادلهٔ زیر را داریم:

$$y = xp - \frac{p^2}{4} \qquad (۱۸)$$

با مشتق گیری نسبت به $x$ از طرفین معادله، خواهیم داشت:

---

1. Clariaut's Equation

$$\frac{dy}{dx}=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}p\frac{dp}{dx}$$

و

$$\frac{dp}{dx}\left(x-\frac{1}{2}p\right)=0$$

پس $\frac{dp}{dx}=0$ یا $x-\frac{1}{2}p=0$.

از $\frac{dp}{dx}=0$ داریم $p=c$ با جانشینی در رابطه (۱۸) به جواب عمومی $y=cx-\frac{c^2}{4}$ می رسیم.

اگر $x-\frac{1}{2}p=0$ در این صورت $p=2x$ بنابراین

$$\begin{cases} p=2x \\ y=xp-\dfrac{p^2}{4}\Rightarrow y=2x^2-x^2 \end{cases}$$

پس $y=x^2$ جواب منفرد معادله است.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل $y=xy'+\frac{1}{y'}$ را حل کنید.

**حل:** یک معادله کلرو می باشد. با فرض $p=y'$ داریم

$$y=xp+\frac{1}{p}\Rightarrow y'=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

پس داریم:

$$\left(x-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow x-\frac{1}{p^2}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{dx}=0$$

اگر $\frac{dp}{dx}=0$ داریم $p=c$ بنابراین $y=cx+\frac{1}{c}$ جواب عمومی است.

اگر $x-\frac{1}{p^2}=0$ داریم $p^2=\frac{1}{x}$ حال با حذف $p$ از دستگاه

$$\begin{cases} p^2 = \dfrac{1}{x} \\ y = xp + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

جواب منفرد $y^2 = 4x$ به دست می آید.

## ۲. ۸ معادله لاگرانژ

یک تعمیم معادلهٔ کلرو به صورت کلی $y = xf(y') + g(y')$ که $f$ و $g$ توابعی از $y'$ می باشند، به **معادلهٔ لاگرانژ** معروف است. برای حل این معادله با تغییر متغیر $y' = p$ داریم:

$$y = xf(p) + g(p) \qquad (۱۹)$$

با مشتق گیری نسبت به $x$ از طرفین معادله به دست می آید.

$$y' = f(p) + x\frac{dp}{dx}f'(p) + \frac{dp}{dx}g'(p)$$

چون $y' = p$، پس از جایگزین کردن مقدار، خواهیم داشت:

$$p = f(p) + x\frac{dp}{dx}f'(p) + \frac{dp}{dx}g'(p)$$

$$p - f(p) = \left[xf'(p) + g'(p)\right]\frac{dp}{dx} \qquad (۲۰)$$

اگر فرض کنیم $p - f(p) = 0$ در این صورت $p = p_0$ که $\frac{dp}{dx} = 0$. با جایگزین کردن $p_0$ بجای $p$ در معادله (۱۹) داریم:

$$y = xf(p_0) + g(p_0)$$

که یک جواب خصوصی یا یک جواب غیر منفرد است. پس از تعیین جواب عمومی ماهیت این جواب مشخص می شود.

اگر $p - f(p) \neq 0$. با تقسیم طرفین معادلهٔ (۲۰) بر $p - f(p)$ معادلهٔ (۲۰) به معادله ای دیفرانسیل خطی نسبت به $x$ تبدیل می شود زیرا می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dp}\left(p - f(p)\right) - xf'(p) = g'(p)$$

بنابراین

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}x=\frac{g'(p)}{p-f(p)}$$

از حل این معادله خواهیم داشت:

$$x=\phi(p,c)$$

با حذف $p$ در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x=\phi(p,c) \\ y=xf(p)+g(p) \end{cases}$$

جواب عمومی معادله به دست می آید.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل $y=xy'^2+y'^3$ را حل کنید.

**حل:** به جای $y'$ مقدار $p$ را جایگزین می کنیم، داریم:

$$y'=p \Rightarrow y=xp^2+p^3 \qquad (۲۱)$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه نسبت به $x$ داریم:

$$y'=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$p=p^2+(2xp+3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$p-p^2=(2xp+3p^2)\frac{dp}{dx} \qquad (۲۲)$$

اگر $p-p^2=0$ داریم $p=0$ یا $p=1$.

در صورتی $p=0$ با جانشینی در معادله (۲۱) داریم $y=0$ همچنین اگر $p=1$، $y=x+1$.

حال اگر $p-p^2\neq 0$ در این صورت با تقسیم طرفین معادله (۲۲) بر $p-p^2$ داریم:

$$1=\frac{2xp+3p^2}{p-p^2}\frac{dp}{dx}$$

یا

$$\frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x=\frac{3p}{1-p}$$

که معادله ای خطی مرتبهٔ اول نسبت به $x$ است پس بنا به (۱۰)

$$x=e^{\int\frac{2}{1-p}dp}\left(c+\int\frac{3p}{1-p}e^{\int\frac{2}{p-1}dp}dp\right)$$

$$=e^{-2\ln(p-1)}\left(c+\int\frac{3p}{1-p}(p-1)^2dp\right)$$

یا

$$x=\frac{1}{(p-1)^2}\left(c-p^3+\frac{3}{2}p^2\right) \qquad (۲۳)$$

با حذف $p$ از دستگاه حاصل از جواب معادلهٔ (۲۳) و معادلهٔ (۲۱) جواب عمومی معادله به دست می آید.

معادلات کلرو و لاگرانژ حالت خاصی از معادلات دیفرانسیلی می باشند که نسبت به $y$ قابل حل هستند.

معادلهٔ $f(x,y,p)=0$ که $p=\frac{dy}{dx}$ **قابل حل برای** $y$ نامیده می شود، اگر به صورت $y=F(x,p)$ قابل بیان باشد. با مشتق گیری نسبت به $x$ ، پس از مرتب کردن داریم:

$$\frac{dp}{dx}=g(p,x)$$

با حل معادلهٔ مرتبهٔ اول فوق $\phi(x,p,c)=0$ جواب عمومی آن به دست می آید. با حذف $p$ از دستگاه

$$\begin{cases} y=F(x,p) \\ \phi(x,p,c)=0 \end{cases}$$

جواب عمومی معادله حاصل می شود.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل $p^4=p^2y+2$ که $p=\frac{dy}{dx}$ را حل کنید.

**حل:** معادله، قابل حل برای $y$ می باشد. پس داریم:

$$y = p^2 - \frac{2}{p^2}$$

با مشتق گیری نسبت به $x$ به دست می آید.

$$p = \left(2p + \frac{4}{p^3}\right)\frac{dp}{dx}$$

یا

$$dx = \left(2 + \frac{4}{p^4}\right)dp$$

که $x = 2p - \frac{4}{3p^3} + c$ جواب عمومی معادلهٔ اخیر است. حال

$$\begin{cases} y = p^2 - \dfrac{2}{p^2} \\ x = 2p - \dfrac{4}{3p^3} + c \end{cases}$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به دست می دهد.

## ۲. ۹ معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به معادلهٔ مرتبهٔ اول

بعضی معادلات مراتب بالاتر، با تغییر متغیر مناسب، به یک معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می شوند.

الف) معادلهٔ

$$f(x, y', y'') = 0 \qquad (۲۴)$$

**فاقد متغیر وابسته** $y$ می باشد، با تغییر متغیر $y' = p$ که $y'' = \frac{dp}{dx}$ به صورت

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \qquad (۲۵)$$

در می آید که یک معادلهٔ مرتبهٔ اول است.

حالتی کلّی تر از معادلهٔ (۲۴) می تواند به صورت زیر باشد:

$$f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

که با تغییر متغیر $p = y^{(n-1)}$ به معادلهٔ مرتبهٔ اول (۲۵) تبدیل می شود

**مثال.** معادلهٔ $x^2y''+xy'=x+1$ را حل کنید.

**حل:** معادله، فاقد $y$ است. پس

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

در معادله مقدار می گذاریم:

$$x^2\frac{dp}{dx}+xp=x+1$$

یا

$$\frac{dp}{dx}+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

با توجه به رابطه (۱۰) داریم:

$$p=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(c_1+\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$$

یا

$$p=x^{-1}\left(c_1+\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1x^{-1}+1+x^{-1}\ln x$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه

$$y=c_1\ln x+x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c_2$$

جواب عمومی معادله می باشد.

ب) معادله، **فاقد متغیر مستقل** می باشد.

معادلهٔ

$$f(y,y',y'')=0 \qquad (۲۶)$$

یک معادلهٔ فاقد $x$ است. با تغییر متغیر $y'=p$ که

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

و جایگذاری در معادلهٔ (۲۶) داریم:

$$f(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$$

که یک معادلهٔ مرتبهٔ اول می باشد.

**مثال.** معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$3y'y'' = 1$$

**حل:** یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم فاقد $x$ می باشد پس:

$$y' = p \quad , \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

در معادله جانشین می کنیم

$$3p^2\frac{dp}{dy} = 1$$

یا

$$3p^2 dp = dy$$

از طرفین این رابطه انتگرال می گیریم، داریم:

$$p^3 = y + c_1$$

یا $p = \sqrt[3]{y + c_1}$. چون $p = \frac{dy}{dx}$ پس $\frac{3}{2}(y + c_1)^{\frac{2}{3}} = x + c_2$ جواب عمومی معادله است.

**مثال.** معادلهٔ دیفرانسیل $(y')^2 - 2yy' = 3y^2$ را حل کنید.

**حل:** داریم:

$$(y')^2 - 2yy' - 3y^2 = 0$$

یا

$$(y' - 3y)(y' + y) = 0$$

پس $y' + y = 0$ یا $y' - 3y = 0$.

$\ln y + x + c = 0$ یا $\ln y - 3x + c = 0$ بنابراین

$$(\ln y - 3x + c)\ (\ln y + x + c) = 0$$

جواب عمومی معادله است.

تذکر. معادله مرتبهٔ اول و از درجهٔ دلخواه n ،

$$(\frac{dy}{dx})^n + f_1(x,y)(\frac{dy}{dx})^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x,y)\frac{dy}{dx} + f_n(x,y) = 0$$

اگر قابل تجزیه به $n$ عامل خطی نسبت به $y'$ به صورت زیر باشد.

$$(y' - g_1(x,y))(y' - g_2(x,y))\cdots(y' - g_n(x,y)) = 0$$

در این صورت اگر $\varphi_r(x,y,c) = 0$ جواب عمومی معادلهٔ $y' - g_r(x,y) = 0$ باشد آنگاه

$$\varphi_1(x,y,c)\ \varphi_2(x,y,c)\cdots\ \varphi_r(x,y,c)\cdots)(\ \varphi_n(x,y,c) = 0$$

جواب عمومی معادله است.

## تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

معادلات کلرووولاگرانژ

۱. $y = xy' + y'\ln y'$

۲. $y = xy' + \frac{1}{y'}$

۳. $y = xy' + y'^2$

۴. $y = xy' + y'^3$

۵. $y = xy' + \sin y'$

۶. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

۷. $xy' - y = \ln y'$

۸. $y = x(1 + y') + y'^2$

۹. $y = y'(x+1) + y'^2$

۱۰. $y = xy'^2 + y'^2$

۱۱. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$

۱۲. $y = 2xy' + 1 + y'$

۱۳. $yy'^2 - xy' + 2y = 0$

۱۴. $y = 2xy' + y'\ln y$

۱۵. $y'^2 - yy' + e^x = 0$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ مرتبهٔ اول

۱۶. $xy'' = 1 + y'$

۱۷. $xy'' - y'^2 = y'^3$

۱۸. $x^2y'' = 2xy' + y'^2$

۱۹. $4y' + y'' = 4xy''$

۲۰. $y^3y'' = -1$

۲۱. $2y'' = 3y^2$

۲۲. $1 + y'^2 + yy'' = 0$

۲۳. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$

۲۴. $xy''' + y'' = 1 + x$

۲۵. $(y''')^3 = 4y''$

# ۳

# معادلات دیفرانسیل خطی

## ۳. ۱ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

در فصل قبل، معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را مطالعه کردیم. در این فصل، به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ د وم، به خصوص معادلات خطی می پردازیم. معادلات مرتبهٔ دوم و به ویژه معادلات خطی، در رشته های مختلف علوم و مهندسی دارای کاربرد فراوان می باشند.

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم در حالت کلی به صورت زیر است:

$$F(x,y,y',y'')=0$$

در این بحث بیشتر به بررسی معادلات به شکل $y''=f(x,y,y')$ می پردازیم.

قضیهٔ زیر، وجود و یکتایی جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را تضمین می کند.

**قضیهٔ ۱ (قضیهٔ وجود و یکتایی جواب)**

فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی از سه متغیر $x$، $y$ و $z$ باشد که $f$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در ناحیهٔ $D$ از فضای سه بعدی $xyz$ پیوسته باشند. در این صورت اگر نقطه $(x_0,a,b)\in D$ باشد. آنگاه بازه ای حول نقطهٔ $x_0$ موجود است که معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''=f(x,y,y')$$

دارای جواب یکتای $y=\phi(x)$ می باشد که در شرط اولیهٔ $y(x_0)=a$ و $y'(x_0)=b$ صدق می کند.

**مثال.** برای معادلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''=xy\cos(yy')\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=3$$

داریم $f(x,y,z)=xy\cos(yz)$ که $f$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در همسایگی نقطهٔ $(0,1,3)$ پیوسته هستند. پس معادله دارای جواب یکتای $y=\phi(x)$ است که بر بازهٔ شامل مبدأ تعریف شده است.

نظریهٔ معادلات مرتبهٔ دوم بسیار پیچیده می باشد، به همین خاطر معادلات خطی مرتبهٔ دوم را مطالعه می کنیم.

شکل کلی **معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم** به صورت زیر است:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (۱)$$

که $p$، $q$ و $r$ توابعی از $x$ هستند.

اگر در معادلهٔ (۱)، $r(x)=0$ معادله را **همگن** نامیم که به صورت زیر است:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۱) در صورتی که، $r(x)\neq 0$ معادلهٔ مرتبهٔ دوم **غیر همگن** نامیده می شود.

قضیهٔ وجود و یکتایی جواب، برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، به صورت زیر قابل بیان می باشد.

**قضیهٔ ۲:** اگر توابع $p$ و $q$ و $r$ دربازه باز $I$ پیوسته باشند. در این صورت تابع منحصر به فرد $y=\phi(x)$ وجود دارد که در تمام نقاط $x\in I$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) و شرایط اولیهٔ $y(x_0)=a$ و $y'(x_0)=b$ صدق می کند.

**اثبات:** فرض کنید $f(x,y,z)=r(x)-q(x)y-p(x)z$. چون $r(x)$، $\frac{\partial f}{\partial y}=-q(x)$ و $\frac{\partial f}{\partial z}=-p(x)$ روی بازه باز $I$ پیوسته هستند در این صورت بنا به قضیهٔ ۱ دارای جواب یکتا می باشد که در شرایط اولیه صدق می کند.

**مثال ۱.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-3y'+2y=0$$

با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=2$ را حل کنید.

**حل:** به آسانی دیده می شود. توابع $y=e^{2x}$ و $y=e^{x}$ جواب این معادلهٔ دیفرانسیل هستند که تابع $y=e^{2x}$ در شرایط داده شده صدق می کند. پس بنا به قضیهٔ (۲) جواب یکتای معادله می باشد. .

**مثال ۲.** معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

در فاصله $I$ همراه با شرایط اولیه $y(x_0)=y'(x_0)=0$ که $x_0\in I$ دارای جواب یکتای $y=0$ می باشد.

**قضیهٔ ۳.** فرض کنید توابع $y_1$ و $y_2$ جواب های معادلهٔ همگن (۲) باشند، در این صورت $y=c_1y_1+c_2y_2$ که $c_1$ و $c_2$ ثابت های دلخواه می باشند، جواب معادلهٔ (۲) می باشد.

**اثبات:** چون عملگر مشتق خطی است به راحتی دیده می شود.

**تعریف ۱:** توابع $y_1$ و $y_2$ روی بازه $I$ **مستقل خطی** نامیده می شوند، اگر برای ثابت های $c_1$ و $c_2$ نتوان مقادیری به جزء $c_1=c_2=0$ تعیین کرد که

$$c_1y_1+c_2y_2=0$$

دو تابع که مستقل خطی نباشند، وابستهٔ خطی نامیده می شوند. در دو تابع وابستهٔ خطی یکی مضربی ثابت از دیگری است.

**مثال ۳.** توابع $y=e^{x}$ و $y=e^{2x}$ مستقل خطی می باشند زیرا یکی مضربی از دیگری نمی باشد. ولی توابع $y=e^{x}$ و $y=-2e^{x}$ وابستهٔ خطی می باشند.

**تعریف ۲:** **رونسکین** توابع مشتقپذیر $y_1$ و $y_2$ روی بازه $I$ که با $w(y_1,y_2)$ نشان داده می شود، به وسیلهٔ دترمینان زیر تعریف می شود:

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

**مثال.**

$$w(\sin x,\cos x)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1$$

$$y_g = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x + (c_4 + c_5 x)\cos x + (c_6 + c_7 x)\sin x$$

جواب عمومی معادله می باشد.

## ۶.۳ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه $n$ام غیر همگن با ضرایب ثابت

در این بخش دو روش، برای محاسبهٔ جواب خصوصی $y_p$ یک معادلهٔ خطی غیر همگن مرتبهٔ $n$ام ، بیان می کنیم.

### ۱.۶.۳ روش تغییر پارامترها

در صورتی که $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جواب های مستقل خطی معادلهٔ همگن

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \qquad (۲۰)$$

باشند، در این صورت

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \qquad (۲۱)$$

جواب عمومی معادلهٔ همگن فوق می باشد، با جانشینی توابع $v_1$، $v_2$، ...، $v_n$ به جای ثابت‌های $c_1$، $c_2$، ...، $c_n$ جواب عمومی معادلهٔ همگن، جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = r(x) \qquad (۲۲)$$

را به صورت

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \qquad (۲۳)$$

در نظر گرفته داریم:

$$y_p' = (v_1 y_1' + v_2 y_2' + \cdots + v_n y_n') + (v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n)$$

با اعمال شرط زیر برای سادگی محاسبه

$$v_1' y_1^{(m-1)} + v_2' y_2^{(m-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(m-1)} = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1$$

مشتق مرتبهٔ $n$ام $y_p$ عبارت است از:

$$y_p^{(n)} = v_1 y_1^{(n)} + \cdots + v_n y_n^{(n)}$$

چون $y_p$ جواب معادلهٔ (۲۲) می باشد، دستگاه معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' + \cdots + y_nv_n' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' + \cdots + y_n'v_n' = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}v_1' + y_2^{(n-2)}v_2' + \cdots + y_n^{(n-2)}v_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)}v_1' + y_2^{(n-1)}v_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}v_n' = r(x) \end{cases}$$

چون توابع $y_1$، $y_2$، ...، $y_n$ جواب های مستقل معادلهٔ همگن می باشند بنابراین $w(y_1,y_2,\ldots,y_n) \neq 0$ پس دترمینان ضرایب دستگاه فوق همواره ناصفر بوده لذا می توان $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ را محاسبه نمود. با توجه به قاعدهٔ کرامر

$$v_i'(x) = \frac{r(x)\,w_i(x)}{w(x)} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

که در آن $w(x) = w(y_1,y_2,\ldots,y_n) \neq 0$ رونسکین جواب ها و $w_i(x)$ دترمینان حاصل از قرار دادن ستون $(0,0,\ldots,0,1)$ به جای ستون $i$ ام رونسکین $w(y_1,y_2,\ldots y_n)$ می باشد. با انتگرال گیری

$$v_i = \int^x \frac{r(x)w_i(x)}{w(x)}dx$$

و بنابراین

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int^x \frac{r(x)w_i(x)}{w(x)}dx \qquad (۲۴)$$

جواب خصوصی معادلهٔ (۲۲) می باشد.

**مثال.** در صورتی $x$ و $x^2$ و $x^{-1}$ جواب های معادلهٔ $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ باشند معادلهٔ $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^4$ را حل کنید. $(x > 0)$

**حل:** با تقسیم طرفین معادله بر $x^3$ داریم:

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 3x$$

بنابراین $r(x) = 3x$ و

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 6x^{-1}$$

$$w_1=\begin{vmatrix}0 & x^2 & x^{-1}\\ 0 & 2x & -x^{-2}\\ 1 & 1 & 2x^{-3}\end{vmatrix}=-3\,,\quad w_2=\begin{vmatrix}x & 0 & x^{-1}\\ 1 & 0 & -x^{-2}\\ 0 & 1 & 2x^{-3}\end{vmatrix}=2x^{-1}$$

و

$$w_3=\begin{vmatrix}x & x^2 & 0\\ 1 & 2x & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=x^2$$

بنابراین با جانشینی روابط اخیر در رابطهٔ (۲۴) داریم:

$$y_p=\frac{1}{10}x^4$$

حال

$$y=y_g+y_p=c_1x+c_2x^2+c_3x^{-1}+\frac{1}{10}x^4$$

جواب عمومی معادله است.

**مثال.** معادلهٔ $y'''-2y''-y'+2y=e^{4x}$ را حل کنید.

**حل:** ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر $y'''-2y''-y'+2y=0$ را به دست می آوریم.

معادلهٔ مشخصه عبارت است از $r^3-2r^2-r+2=0$ یا $(r-2)(r^2-1)=0$ و ریشه های آن $r=-1$، $r=1$ و $r=2$ است. پس جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر عبارت است از:

$$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$$

حال به روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن را به دست می آوریم.

بنا به رابطهٔ (۲۴)داریم

$$y_p=\sum_{i=1}^{3}y_i\int^x\frac{r(x)w_i(x)}{w(x)}dx$$

که

$$w(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}=6e^{2x} \quad , \quad w_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & e^{x} & e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 2e^{2x} \\ 1 & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}=e^{3x}$$

و

$$w_2(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & e^{2x} \\ -e^{-x} & 0 & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 1 & 4e^{2x} \end{vmatrix}=-3e^{x} \quad , \quad w_3(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{x} & 0 \\ e^{-x} & e^{x} & 1 \end{vmatrix}=2$$

بنابراین

$$y_p=e^{-x}\int \frac{e^{4x}\cdot e^{3x}}{6e^{2x}}dx+e^{x}\int \frac{e^{4x}\cdot(-3e^{x})}{6e^{2x}}dx+e^{2x}\int \frac{e^{4x}(2)}{6e^{2x}}dx$$

پس

$$y_p=e^{-x}\left(\frac{1}{30}e^{5x}\right)+e^{x}\left(-\frac{1}{6}e^{3x}\right)+e^{2x}\left(\frac{1}{6}e^{2x}\right)$$

بنابراین $y_p=\frac{1}{30}e^{4x}$ لذا $y=y_g+y_p$ جواب عمومی معادله می باشد.

## ۳. ۶. ۲ روش ضرایب نامعین

در معادلهٔ خطی غیر همگن با ضرایب ثابت

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=r(x) \qquad (۲۵)$$

در صورتی که $r(x)$ تابعی چند جمله ای، نمائی، سینوسی، کسینوسی یا ترکیبی از مجموع یا حاصلضرب توابع فوق باشد به **روش ضرایب نامعین** می توان جواب خصوصی $y_p$ را به دست آورد. در این روش با توجه به شکل $r(x)$ ترکیبی مناسب از توابع چند جمله ای، نمایی و ... با ضرایب ثابت نامعین برای $y_p$ در نظر می گیریم سپس، با جانشینی در معادلهٔ (۲۵) ضرایب نامعین را به دست می آوریم. هر چند روش تغییر پارامترها کلی تر از روش ضرایب نامعین می باشد، ولی روش ضرایب نامعین در بسیاری مسائل به سهولت قابل اعمال می باشد. با توجه به شکل $r(x)$ چند حالت داریم که در زیر مورد مطالعه قرار می گیرد.

ابتدا فرض کنید $r_1$، $r_2$، …، $r_n$ ریشه های معادلهٔ همگن نظیر معادلهٔ (۲۵) زیر باشد.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (۲۶)$$

**حالت اول.** اگر $r(x)$ تابعی چند جمله ای به صورت $r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ باشد. در صورتی که $r = 0$ یک ریشهٔ با تکرار $k$ معادلهٔ مشخصه باشد، آنگاه جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_p = x^k (A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$$

و اگر $r \neq 0$، قرار می دهیم $k = 0$.

با جانشینی در معادلهٔ غیر همگن (۲۵) ضرایب $A_0, A_1, \ldots, A_m$ را به دست می آوریم.

**مثال.** یک شکل مناسب برای جواب خصوصی معادلهٔ $y''' - 2y'' + y' = x^3$ بیابید.

**حل:** معادلهٔ همگن نظیر $y''' - 2y'' + y' = 0$ دارای معادلهٔ مشخصهٔ $r^3 - 2r^2 + r = 0$ می باشد که $r = 0$ و $r = 1$ با تکرار ۲ ریشه های آن می باشد. پس با توجه به $r(x) = x^3$ که تابعی چند جمله ای از درجه ۳ است داریم:

$$y_p = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3)$$

**حالت دوم.** اگر $r(x) = ae^{bx}$ که $a$ و $b$ ثابت هستند و معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن (۲۶) $r = b$ را به عنوان ریشه تکراری از مرتبهٔ $k$ داشته باشد آنگاه

$$y_p = Ax^k e^{bx}$$

و در صورتی که $r = b$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد $k = 0$ است.

**مثال.** معادلهٔ $y''' - y' = 2e^x$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ همگن نظیر $y''' - y' = 0$ و معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن $r^3 - r = 0$ می باشد که دارای ریشه های $r = 0$ و $r = \pm 1$ است پس $y_p = Axe^x$ می باشد که $y'_p = Ae^x + Axe^x$، $y''_p = 2Ae^x + Axe^x$ و $y'''_p = 3Ae^x + Axe^x$.

با جانشینی در معادلهٔ داده شده داریم

$$3Ae^x + Axe^x - Ae^x - Axe^x = 2e^x$$

که $2Ae^x = 2e^x$ پس $A = 1$ لذا $y_p = xe^x$ بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر می باشد.

(۲) $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + x e^{x}$$

**حالت سوم.** اگر $r(x)$ برابر $a\sin bx$ یا $a\cos bx$ که $a$ و $b$ عدد ثابت و $r^2 + b^2$ یک عامل با تکرار $k$ معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن باشد، در این صورت قرار می دهیم:

$$y_p = x^k (A\sin bx + B\cos bx)$$

و اگر $r^2 + b^2$ یک عامل معادلهٔ مشخصه نباشد $k = 0$ قرار می دهیم.

**مثال.** معادلهٔ $y'' + y = \cos x$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن نظیر، $r^2 + 1 = 0$ و ریشه های آن $r_1 = i$ و $r_2 = -i$ می باشند. پس جواب عمومی معادلهٔ همگن $y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ است. حال با توجه به اینکه $r^2 + 1$ یک عامل با تکرار $k = 1$ برای معادلهٔ مشخصه می باشد پس $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$ و با جانشینی در معادله داریم $y_p = \frac{1}{2} x\sin x$ بنابراین $y = y_g + y_p$ جواب عمومی معادلهٔ داده شده می باشد.

**حالت چهارم.** اگر $r(x) = p(x)e^{bx}$ که $p(x)$ چند جمله ای از درجهٔ $m$ است. لذا در صورتی که $b$ ریشهٔ با تکرار $k$ معادلهٔ مشخصه باشد، شکل کلی جواب خصوصی معادله عبارت است از:

$$y_p = x^k (A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m) e^{bx}$$

اما اگر $b$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد قرار می دهیم $k = 0$.

**مثال.** یک جواب خصوصی معادلهٔ $y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2 + 3)e^{-x}$ به صورت $y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$ می باشد که می توان با جانشینی در معادله، ضرایب نامعین را به دست آورد.

**حالت پنجم.** اگر $r(x) = p(x)\sin bx + q(x)\cos bx$ که $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله ایهای به ترتیب ازدرجه $m$ و $n$ از $x$ هستند. در این حالت اگر $bi$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ با تکرار $k$ باشد آنگاه

$$y_p = x^k \left[ (A_0 + \cdots + A_s x^s)\sin bx + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_s x^s)\cos bx \right]$$

که $s = \max\{m,n\}$. در صورتی که $bi$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد $k=0$ است.

**مثال.** یک جواب خصوصی $y'' - y = x\sin x$ به شکل زیر است:

$$y_p = (A+Bx)\sin x + (C+Dx)\cos x$$

**حالت ششم.** اگر $r(x) = k_1 e^{ax}\cos bx + k_2 e^{ax}\sin bx$ و حداقل یکی از دو ثابت $k_1$ و $k_2$ صفر نیست در این حالت اگر $\alpha + bi$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ با تکرار $k$ باشد

$$y_p = x^k (Ae^{ax}\sin bx + Be^{ax}\cos bx)$$

و در صورتی که $\alpha + bi$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد $k=0$.

**حالت هفتم.** اگر $r(x) = e^{ax}[M(x)\cos bx + N(x)\sin bx]$ که $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله ای، در این صورت اگر $a+bi$ ، $k$ بار ریشهٔ معادلهٔ مشخصه باشد در این صورت

$$y_p = x^k e^{ax}[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx]$$

که $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله ای از درجه $n$ بزرگترین درجهٔ $M(x)$ و $N(x)$ می باشند.

**مثال.** شکل مناسب یک جواب خصوصی $y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x}\sin x$ را بیابید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر به صورت $r^2 - 4r + 5 = 0$ می باشد که دارای ریشه های $r = 2 \mp i$ است. پس

$$y_p = xe^{2x}[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$$

**حالت هشتم.** اگر $r(x)$ به صورت مجموع چند تابع از نوع توابع داده شده باشد از اصل بر همنهی استفاده می کنیم.

**مثال.** یک جواب خصوصی مناسب برای $y^{(4)} + 4y'' = \sin 2x + xe^x + 4$ بیابید.

**حل:** بنا به اصل بر همنهی جواب های خصوصی معادله های $y^{(4)} + 4y'' = \sin 2x$، $y^{(4)} + 4y'' = xe^x$ و $y^{(4)} + 4y'' = 4$ را به دست آورده و با هم جمع می کنیم. بنابراین

$$y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x) + (Cx+D)e^x + Ex^2$$

یک شکل مناسب جواب خصوصی با ضرایب نامعین است.

### تمرین

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y''' - y'' - y' + y = 0$ ب) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$

ج) $y''' + y' = 0$ د) $y^{iv} - y = 0$

ه) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$ و) $y^{vi} - y'' = 0$

ز) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ ح) $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

ط) $y''' - 3y' + 2y = 0$ ی) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

۲. جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $y'' + y = x\sin x$ ب) $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x$

ج) $y^{(4)} + 4y = e^x \sin 2x \cos x$ د) $y''' + y' = \tan x$

ه) $y''' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$ و) $y''' - y' = x$

۳. صورت مناسبی برای $y_p(x)$ به منظور استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. محاسبه ضرایب لزومی ندارد.

الف) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$

ب) $y^{iv} + 4y'' = \sin 2x + xe^x + 4$

ج) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x$

## ۳. ۷ روش عملگر

معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = r(x)$$

چون $Dy = y'$، $D^2y = y''$، ...، $D^n y = y^{(n)}$ داریم:

$$\varphi(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)y = r(x)$$

می توان $D$ را مانند یک کمیت جبری در نظر گرفت، ولی توجه کنید که $D$ دارای مقدار عددی نمی باشد. همچنین در تجزیهٔ $\varphi(D)$ اگر ضرایب $a_1$، $a_2$، ...، $a_n$ ثابت نباشند، ترتیب نوشتن عوامل مهم است. برای مثال:

$$(D + x)(D + 2)y = D^2 y + 2Dy + xDy + 2xy$$

$$(D+2)(D+x)y = D^2y + Dxy + 2Dy + 2xy$$

در معادلهٔ غیر همگن $\varphi(D)y = r(x)$ به صورت صوری داریم $y_p = \frac{1}{\varphi(D)}r(x)$ اما

معنی $\frac{1}{\varphi(D)}$ چیست؟

اگر $\varphi(D) = D$ در اینصورت $y = \frac{1}{D}r(x)$ بنابراین $Dy = r(x)$ یک معادلهٔ مرتبهٔ اول می باشد که با انتگرال گیری داریم:

$$y = \int r(x)dx$$

پس

$$\frac{1}{D}r(x) = \int r(x)\,dx$$

اگر $\varphi(D) = D - a$ در این صورت $y = \frac{1}{D-a}r(x)$ سپس $(D-a)y = r(x)$ یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می باشد که $y = e^{ax}\int e^{-ax}r(x)dx$ پس داریم

$$\frac{1}{D-a}r(x) = e^{ax}\int e^{-ax}r(x)\,dx$$

مشابهٔ فوق داریم:

$$\frac{1}{(D-a)(D-b)}r(x) = \frac{1}{D-a}\left(\frac{1}{D-b}r(x)\right)$$
$$= \frac{1}{D-a}\left[e^{bx}\int e^{-bx}r(x)dx\right]$$
$$= e^{ax}\int e^{-ax}\left[e^{bx}\int e^{-bx}r(x)\,dx\right]dx$$

همچنین می توان به صورت زیر عمل نمود

$$\frac{1}{(D-a)(D-b)}r(x) = \frac{A}{D-a}r(x) + \frac{B}{D-b}r(x)$$
$$= Ae^{ax}\int e^{-ax}r(x)d(x) + Be^{bx}\int e^{-bx}r(x)dx$$

**مثال ۱.** معادلهٔ $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن نظیر، $r^2-4r+3=0$ می باشد که دارای ریشه های $r=1$ و $r=3$ است پس $y_g=c_1e^x+c_2e^{3x}$ جواب عمومی معادلهٔ همگن است. حال

$$(D^2-4D+3)y=e^{3x}\Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}e^{3x}$$
$$=\frac{1}{(D-1)(D-3)}e^{3x}$$
$$=\frac{1}{D-1}(e^{3x}\int e^{-3x}\cdot e^{3x}dx)$$
$$=\frac{1}{D-1}(e^{3x}x)=e^x\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{3x}-\frac{1}{4}e^{3x}$$

بنابراین

$$y=y_g+y_p=c_1e^x+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}xe^{3x}-\frac{1}{4}e^{3x}$$

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال ۲.** معادلهٔ $y''-3y'=2e^{4x}$ را حل کنید.

**حل:** داریم $(D^2-3D)y=2e^{4x}$ پس

$$y=\frac{1}{D(D-3)}(2e^{4x})=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D-3}2e^{4x}\right)$$
$$=\frac{1}{D}(e^{3x}\int 2e^x dx)$$
$$=\frac{1}{D}\left[e^{3x}(2e^x+c_1)\right]$$
$$=\frac{1}{D}(2e^{4x}+c_1e^{3x})=\int(2e^{4x}+c_1e^{3x})dx$$

پس

$$y=\frac{1}{2}e^{4x}+\frac{1}{3}c_1e^{3x}+c_2$$

توجه داشته باشید با حذف ثابت ها، همان جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن را داریم.

**مثال ۳.** معادلهٔ $y''+2y'+y=x^3e^{-x}$ را حل کنید .

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ $r^2+2r+1=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $r=-1$ می باشد. پس جواب عمومی معادلهٔ همگن نظیر $y_g=(c_1+c_2x)e^{-x}$ است.

حال

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2}(x^3 e^{-x})$$
$$= \frac{1}{D+1}(e^{-x}\int e^{x} x^3 e^{-x} dx) = \frac{1}{D+1}\left(\frac{x^4}{4}e^{-x}\right)$$
$$= \left(e^{-x}\int e^{x}\frac{x^4}{4}e^{-x}dx\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{20}x^5\right)$$

بنابراین $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{20}x^5 e^{-x}$ جواب عمومی معادله می باشد.

اگر $r(x) = e^{bx}$ در این صورت

$$\frac{1}{D-a}e^{bx} = \frac{1}{b-a}e^{bx} \qquad b \neq a$$

همینطور اگر $b$ ریشهٔ مخرج نباشد. داریم:

$$\frac{1}{(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)}e^{bx} = \frac{1}{(b-a_1)(b-a_2)\cdots(b-a_n)}e^{bx}$$

پس

$$\frac{1}{\varphi(D)}e^{bx} = \frac{1}{\varphi(b)}e^{bx} \qquad \varphi(b) \neq 0 \qquad (۲۷)$$

با توجه به روابط

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}, \quad \cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}$$

و

$$\sinh ax = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}, \qquad \cosh ax = \frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}$$

اهمیت فرمول (۲۷) بیشتر مشخص می شود.

**مثال ٤.** یک جواب خصوصی $y'' - y = e^{2x}$ را بنویسید.

**حل:** داریم $(D^2 - 1)y = e^{2x}$ پس

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 1}e^{2x} = \frac{1}{2^2 - 1}e^{2x} = \frac{1}{3}e^{2x}$$

یک جواب خصوصی معادله می باشد.

**مثال ۵.** معادلهٔ $y''+y=\sin 2x$ را حل کنید.

**حل:** داریم $(D^2+1)y=\sin 2x$ پس معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن نظیر $r^2+1=0$ دارای ریشه های مختلط $r=\pm i$ می باشد. بنابراین $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ جواب عمومی معادلهٔ همگن است. حال

$$y_p=\frac{1}{D^2+1}(\sin 2x)=\frac{1}{D^2+1}(\operatorname{Im}e^{2ix})$$
$$=\operatorname{Im}\frac{1}{(2i)^2+1}e^{2ix}=\operatorname{Im}[-\frac{1}{3}(\cos 2x+i\sin 2x)]$$

لذا $y_p=-\frac{1}{3}\sin 2x$ یک جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن می باشد پس $y=y_g+y_p$ جواب عمومی معادله است.

**مثال ٦.** مقدار عبارت $\frac{1}{D-a}e^{ax}$ را بیابید.

**حل:** داریم

$$\frac{1}{D-a}e^{ax}=e^{ax}\int e^{-ax}\cdot e^{ax}dx=xe^{ax}$$

پس

$$\frac{1}{D-a}e^{ax}=xe^{ax}$$

**مثال ۷.** معادلهٔ $y''+y'-2y=e^x\cos x$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ $r^2+r-2=0$ دارای ریشه های $r=1$ و $r=-2$ است بنابراین $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$ جواب عمومی معادلهٔ همگن است. حال

$$y_p=\frac{1}{D^2+D-2}(\operatorname{Re}e^{(1+i)x})$$
$$=\operatorname{Re}\frac{1}{-1+3i}e^{(1+i)x}=\operatorname{Re}\frac{-1-3i}{1+9}e^x(\cos x+i\sin x)$$

پس، قسمت حقیقی، جواب خصوصی معادله است یعنی

$$y_p=-\frac{1}{10}e^x\cos x+\frac{3}{10}e^x\sin x$$

## قضیهٔ انتقال تابع نمائی

اگر $f(x)$ تابعی از $x$ و $a$ عددی ثابت باشد، آنگاه

$$\frac{1}{\phi(D)}\left[e^{ax}f(x)\right]=e^{ax}\left[\frac{1}{\phi(D+a)}f(x)\right]$$

**اثبات:** به راحتی به استقراء، برای هر $n$ داریم:

$$D^n\left[e^{ax}f(x)\right]=e^{ax}(D+a)^n f(x)$$

با توجه $\phi(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_0$ دیده می شود.

$$\phi(D)\left[e^{ax}f(x)\right]=e^{ax}\left[\phi(D+a)f(x)\right]$$

حال

$$\phi(D)\left[e^{ax}\frac{1}{\phi(D+a)}f(x)\right]=e^{ax}\phi(D+a)\left[\frac{1}{\phi(D+a)}f(x)\right]=e^{ax}f(x)$$

پس با اعمال $\frac{1}{\phi(D)}$ بر طرفین رابطه فوق داریم:

$$\frac{1}{\phi(D)}\left[e^{ax}f(x)\right]=e^{ax}\frac{1}{\phi(D+a)}f(x)$$

**مثال ۸.** معادلهٔ $y''+y=2\sin x$ را حل کنید.

**حـــل:** معادلـهٔ مشخـصهٔ $r^2+1=0$ دارای ریـشه هـای $r=i$ و $r=-i$ اسـت. پـس $y_g=c_1\cos x+c_2\sin x$ جواب عمومی معادلهٔ همگن نظیر است. حال

$$y_p=\frac{1}{D^2+1}(2\operatorname{Im}e^{ix})=\operatorname{Im}e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}(2)$$

$$=e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}(2)=e^{ix}\frac{1}{D}(-i)=-ixe^{ix}$$

با انتخاب قسمت موهومی و رابطـهٔ اویلـر $y_p=-x\cos x$ جـواب خـصوصی معادلـهٔ غیـر همگن است. پس $y=y_g+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x-x\cos x$ جواب عمـومی معادلـه می باشد.

**مثال ۹.** بنا به قاعدهٔ انتقال تابع نمائی

$$\frac{1}{D-a}e^{ax}=e^{ax}\frac{1}{D}(1)=e^{ax}x$$
$$\frac{1}{(D-a)^2}e^{ax}=e^{ax}\frac{1}{D^2}(1)=\frac{x^2}{2}e^{ax}$$

همینطور

$$\frac{1}{(D-a)^n}e^{ax}=e^{ax}\frac{1}{D^n}(1)=\frac{x^n}{n!}e^{ax}$$

اگر $\phi(a)=0$ در این صورت بایستی $\phi(D)$ شامل یک عامل $(D-a)^k$ باشد. پس $\phi(D)=(D-a)^k L(D)$ که $L(a)\neq 0$ بنابراین

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^k L(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^k}\left(\frac{e^{ax}}{L(a)}\right)$$
$$=\frac{e^{ax}}{L(a)}\frac{x^k}{k!}$$

**مثال ۱۰.** معادلهٔ $y''+2y'+y=e^{-x}$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ $r^2+2r+1=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $-1$ می باشد.

پس $y_g=(c_1+c_2x)e^{-x}$ جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر است. حال

$$y_p=\frac{1}{(D+1)^2}e^{-x}=e^{-x}\frac{1}{D^2}(1)=\frac{x^2}{2!}e^{-x}$$

بنابراین $y=y_g+y_p$ جواب عمومی معادله است.

**مثال ۱۱.** معادلهٔ $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$ را حل کنید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر $r^2+2r+2=0$ دارای ریشه های $-1\pm i$ می باشد پس $y_g=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن است.

حال

$$y_p=\mathrm{Re}\frac{1}{(D+1-i)(D+1+i)}e^{(-1+i)x}$$
$$=\mathrm{Re}\frac{1}{D+1-i}\left[\frac{1}{2i}e^{(-1+i)x}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\frac{1}{2i}e^{(-1+i)x}\left(\frac{1}{D}1\right)$$

$$= \mathrm{Re}\frac{e^{-x}}{2i}(\cos x + i\sin x)x$$

$$= \mathrm{Re}[-\frac{1}{2}xe^{-x}(-\sin x + i\cos x)]$$

پس $y_p = \frac{1}{2}xe^{-x}\sin x$ جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن است. بنابراین $y = y_g + y_p$ جواب عمومی معادله است.

چون

$$(1-D)(1+D+D^2+\cdots+D^n) = 1-D^{n+1}$$

اگر $f(x)$ یک چند جمله ای از درجه $n$ باشد، داریم:

$$D^{n+1}f(x) = 0$$

پس

$$(1-D)(1+D+D^2+\cdots+D^n)f(x) = f(x)$$

بنابراین

$$\frac{1}{1-D}f(x) = (1+D+D^2+\cdots+D^n)f(x)$$

و همچنین

$$\frac{1}{1+D}f(x) = \left[1-D+D^2-D^3+\cdots+(-1)^n D^n\right]f(x)$$

**مثال ۱۲.** جواب عمومی معادلهٔ $y''-3y'+2y = 8x^3e^{2x}$ را بیابید.

**حل:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر $r^2-3r+2=0$ می باشد که دارای ریشه های $r=1$ و $r=2$ بوده پس جواب عمومی معادلهٔ همگن $y_g = c_1e^x + c_2e^{2x}$ است و

$$y_p = \frac{1}{(D-2)(D-1)}(8x^3e^{2x})$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D(D+1)}8x^3 = e^{2x}\frac{1}{D+1}(2x^4)$$

$$= e^{2x}(1-D+D^2-D^3+D^4)(2x^4)$$

$$= e^{2x}(2x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 48x + 48)$$

پس $y = y_g + y_p$ جواب عمومی است.

**مثال ۱۳.** یک جواب خصوصی معادلهٔ $y'' - y' + y = x^3 + 2x$ را بیابید.

**حل:**

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{1-(D-D^2)}(x^3+2x) \\ &= \left[1 + (D-D^2) + (D-D^2)^2 + (D-D^2)^3\right](x^3+2x) \\ &= (1 + D - D^3)(x^3+2x) \\ &= x^3 + 2x + 3x^2 + 2 - 6 \end{aligned}$$

پس $y_p = x^3 + 3x^2 + 2x - 4$ یک جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن می باشد.

## تمرین

به روش عملگر حل کنید.

الف) $y'' - y = xe^{3x}$ ب) $y'' - 2y' - y = e^x \sin x$

ج) $y'' - y = 2e^x \cos x$ د) $y'' + y' + y = xe^x + x^2 e^x$

ه) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \sin x$ و) $y^{iv} + 4y = e^x \sin 2x \cos x$

ز) $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{2x} - 2$ ح) $y'' + 4y = \sin 2x$

ط) $y'' + 4y = x \sin x$ ی) $y'' + 2y' + 3y = xe^{2x} \cos x$

## ۸.۳ معادلهٔ اویلر

در بخش های قبل این فصل دیدیم در حالت کلی قادر به حل یک معادلهٔ خطی با ضرایب متغیر نیستیم. اما بعضی معادلات با ضرایب متغیر را می توان به یک معادلهٔ با ضرایب ثابت تبدیل نمود. معادلهٔ اویلر از این دسته معادلات با ضرایب متغیر می باشند.

شکل کلی **معادلهٔ اویلر** مرتبهٔ $n$ به صورت زیر می باشد.

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = r(x) \qquad (۲۸)$$

که در آن $a_n, \cdots, a_1, a_0$ مقدار ثابتی می باشند.

# ۵

## تبدیل لاپلاس

به روش تبدیل لاپلاس، یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل با مقدار اولیه را به دست می آوریم، بدون آنکه نیازمند محاسبه جواب عمومی معادله باشیم. جواب های خصوصی یک معادلهٔ دیفرانسیل، معمولاً در زمینه های مختلفی از مسائل عملی از جمله فیزیک، شیمی و مکانیک مورد استفاده قرار می گیرند. در این فصل بیشتر به کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی توجه داریم.

### ۵. ۱ تعریف تبدیل لاپلاس

**تعریف ۱:** تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که $t \geq 0$ را با $L\{f(t)\}$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s) \qquad (۱)$$

اگر این انتگرال موجود باشد، تابع $F(s)$ را **تبدیل لاپلاس** $f(t)$ و $L$ را **عملگر تبدیل لاپلاس** نامیم.

با توجه به خطی بودن انتگرال، عملگر $L$ خطی است یعنی اگر $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آنها موجود است و $c_1$ و $c_2$ ثابت های اختیاری باشند آنگاه

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} \qquad (۲)$$

با توجه به تعریف فوق تبدیل لاپلاس برخی از توابع را محاسبه می کنیم:

۱) اگر $f(t)=1$ باشد. تبدیل لاپلاس آن عبارت است از:

$$L\{1\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s}$$

دیده می شود انتگرال فوق در صورتی که $s>0$ موجود است. بنابراین

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \qquad s>0$$

۲) اگر $f(t)=e^{at}$، داریم:

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=\lim_{u\to\infty}\int_0^{u} e^{-(s-a)t}dt$$

$$\lim_{u\to\infty}\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^u=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{-(s-a)u}}{-(s-a)}+\frac{1}{s-a}\right)$$

اگر $s>a$، آنگاه حدّ فوق موجود است و داریم:

$$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a} \quad , \quad s>a \qquad (۳)$$

۳) اگر $f(t)=t^{\alpha}$ که $\alpha>-1$، در این صورت خواهیم داشت

$$L\{t^{\alpha}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha}dt$$

قرار می دهیم $u=st$ در این صورت $du=sdt$ پس داریم:

$$L\{t^{\alpha}\}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha}du$$

بنابراین

$$L\{t^{\alpha}\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha>-1 \qquad (۴)$$

حال اگر $n\in N$، داریم:

$$L\{t^{n}\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s>0 \qquad (۵)$$

۴)

$$L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}, \quad L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

بنا به رابطهٔ اویلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس داریم:

$$L\{e^{ait}\} = L\{\cos at + i\sin at\} = L\{\cos at\} + iL\{\sin at\}$$

همچنین بنا به رابطهٔ (۳) خواهیم داشت

$$L\{e^{ait}\} = \frac{1}{s-ai} = \frac{1}{s-ai}\,\frac{s+ai}{s+ai} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

از تساوی روابط فوق داریم:

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

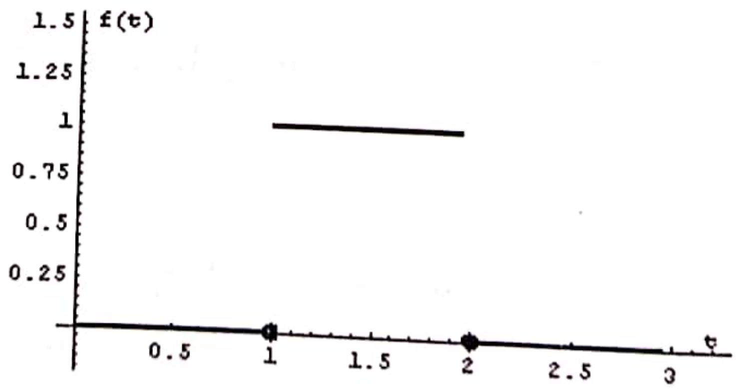
**مثال ۱.** تابع $H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس آن را بنویسید. (تابع $H(t-a)$ که با $u_a(t)$ هم نمایش داده می شود به **تابع پله ای واحد هوی ساید** یا **تابع پله ای واحد** معروف است.)

**حل:**

$$L\{H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{e^{-sa}}{s} \qquad s > 0$$

**مثال ۲.** تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده است را بیابید.



**حل:** بنا به تعریف ۱ خواهیم داشت:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_1^2 e^{-st}dt = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

**مثال ۳.** مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-2t} \cos t\, dt$ را حساب کنید.

**حل:** بنا به تعریف ۱ داریم:

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

با قرار دادن $s = 2$ داریم،

$$\int_0^\infty e^{-2t} \cos t\, dt = \frac{2}{5}$$

**تعریف ۲:** تابع $f(t)$ را روی بـازه $[a,b]$ **قطعـه ای پیوسـته** نـامیم اگـر $f$ روی $[a,b]$، جز در تعدادی متناهی از نقاط، پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی، حدّ چـپ و حـدّ راست داشته باشد.

**مثال٤.** تابع $f(t) = [t]$ بر بازهٔ $[0,3]$ قطعه ای پیوسته است. ولی $\sin\frac{1}{t}$ در هـیچ بـازه، شامل مبدا قطعه ای پیوسته نیست.

**تعریف ۳:** تابع $f(t)$ روی بازه $[0,+\infty)$ از **مرتبهٔ نمائی** است، هرگاه ثابت های $\alpha$ و $M$ و $T$ موجود باشند، به طوری که

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \quad t > T$$

**مثال.** هر تابع کراندار، از مرتبهٔ نمائی با $\alpha = 0$ است. همچنین $e^{ax}$ تابع ازمرتبهٔ نمائی با $\alpha = a$ می باشد. و $x^n$ از مرتبهٔ نمائی با هر عدد مثبتی برای $\alpha$ می باشد. اما $e^{x^2}$ از مرتبه نمائی نمی باشد.

**قضیهٔ ۱:** فرض کنید $f(t)$ روی $[0,+\infty)$ تابعی قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمائی باشد آنگاه $L\{f(t)\}$ برای $s > a$ موجود می باشد.

**اثبات:** بنا به تعریف

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

حال چون $f$ قطعه ای پیوسته پس $\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ موجود است.

چون

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \le Me^{-st}e^{\alpha t} = Me^{(\alpha-s)t}, \quad t \ge T$$

اگـر $s > \alpha$، آنگـاه $\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ همگراسـت و بنـابراین $\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ همگـرا می باشد. پس اثبات قضیه کامل است.

**مثال ۵.** اگر $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ بنا به (۴) دیده می شود:

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

همچنین با توجه به اینکه تابع $f(t)$ از مرتبه نمائی نمی باشد پـس شـرایط قـضیهٔ فـوق برای وجود تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ کافی است اما لازم نمی باشد. بنابراین دامنهٔ عملگر تبدیل لاپلاس $L$ بزرگتر از مجموعهٔ توابع قطعه ای پیوسته و از مرتبهٔ نمائی است.

**قضیه ۲:** اگر $f(t)$ روی $[0,+\infty)$ تابعی قطعـه ای پیوسـته و از مرتبـهٔ نمـائی باشـد و $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$$

اثبات قضیه را به خواننده واگذار می کنیم.

با توجه به قضیهٔ ۲ دیده می شود اگر $\lim_{s\to+\infty} F(s) \neq 0$ آنگـاه $F(s)$ نمـی توانـد تبـدیل لاپلاس تابعی مانند $f(t)$ باشد برای نمونه $F(s) = \frac{s}{s+1}$ نمی توانـد تبـدیل لاپـلاس هیچ تابع قطعه ای پیوسته از مرتبهٔ نمائی باشد زیرا $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 1 \neq 0$.

## تبدیل معکوس لاپلاس

فرض کنید $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد یعنی

$$L\{f(t)\}=F(s)$$

در این صورت $f(t)$ را **تبدیل معکوس لاپلاس** $F(s)$ نامیده، داریم:

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$$

تبدیل معکوس لاپلاس نیز یک تبدیل خطی است یعنی:

$$L^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(s)\}=c_1L^{-1}\{F(s)\}+c_2L^{-1}\{G(s)\}$$
$$=c_1f(t)+c_2g(t)$$

در صورتی که $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ و $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}$.

**مثال ٦.** اگر $L\{f\}=\dfrac{1}{s^2+25}$ ، $f(t)$ را بیابید.

**حل:**

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5^2}\right\}=\frac{1}{5}\sin 5t$$

**مثال ۷.** تابعی مانند $f(t)$ بیابید که

$$L\{f(t)\}=\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}$$

**حل:** بنا به روش تبدیل به کسرهای جزئی داریم:

$$\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}$$

پس خواهیم داشت: $A=-\dfrac{4}{3}$ و $B=-\dfrac{1}{6}$ و $C=\dfrac{7}{2}$

بنابراین به دست می آید.

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\}$$
$$=-\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{7}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$
$$=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

**مثال ۸.** نشان دهید اگر $L\{f(t)\}=F(s)$، در این صورت داریم:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad a > 0 \qquad (۶)$$

**حل:**

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt$$

فرض کنید $u = at$ در اینصورت $dt = \frac{1}{a}du$ پس

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

**مثال ۹.** اگر $L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع $\frac{1-e^{-2t}}{t}$ را به دست آورید.

**حل:** فرض کنید $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ در این صورت داریم:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

پس خواهیم داشت:

$$L\left\{\frac{1-e^{-2t}}{t}\right\} = 2L\{\frac{1-e^{2t}}{2t}\} = 2L\{f(2t)\} = F\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{\frac{s}{2}}\right) = \ln\frac{s+2}{s}.$$

## تمرین

۱. تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

الف) $\sinh at$ ب) $\cosh at$

پ) $e^{bt}\sinh at$ ت) $e^{at}\cos bt$

ث) $t\sin at$ ج) $t^n e^{at}$

ذ) $\sqrt{t}$    ر) $t\sqrt{t}$

ز) $[t]$

۲. تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}}$    ب) $\dfrac{1}{s^2+25}$

پ) $\dfrac{1}{25s^2-9}$    ت) $\dfrac{1}{s^4}$

ث) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$    ج) $\dfrac{1}{s^2+s}$

چ) $\dfrac{1}{s^3(s-4)}$    ح) $\dfrac{s-1}{s(s^2+2s+1)}$

خ) $\dfrac{(s+2)^2}{s^5}$    د) $\dfrac{2s^3+s}{(s^2-1)(s^2+1)}$

۳. نشان دهید اگر $k$ عددی مثبت داریم:

$$L\left\{\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)\right\}=F(ks)$$

۴. اگر $a$ و $b$ عدد ثابت و $a>0$ نشان دهید:

$$L\left\{\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=F(as+b)$$

۵. تابع بسل نوع اول از مرتبه $n$ به صورت زیر است.

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}$$

ثابت کنید

$$L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}},\quad s>1$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

(راهنمایی: تبدیل لاپلاس $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt$ را محاسبه کنید.)

## ۲.۵ ویژگی های دیگر تبدیل لاپلاس

حال ویژگی هایی دیگر از تبدیل لاپلاس را تحت عنوان چند قضیه بیان می کنیم:

**قضیهٔ ۱:** اگر $L\{f(t)\} = F(s)$، در این صورت داریم:

الف) $L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ (۷)

ب) $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)\,, \quad n \in \aleph$ (۸)

**اثبات:** الف)

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at}f(t))\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a)$$

ب) بنا به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه نسبت به $s$ داریم:

$$F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt = -L\{tf(t)\}$$

با مشتق گیری مجدد از طرفین رابطهٔ اخیر نسبت به $s$ داریم:

$$F''(s) = \int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)\,dt = (-1)^2 L\{t^2 f(t)\}$$

به همین ترتیب با $n$ بار مشتق گیری، خواهیم داشت:

$$F^{(n)}(s)=\int_0^{\infty}(-1)^n t^n f(t)e^{-st}dt=(-1)^n L\{t^n f(t)\}$$

**مثال ۱.** تبدیل لاپلاس تابع $e^{-t}\cos 2t$ را بیابید.

**حل:** می دانیم اگر $f(t)=\cos 2t$ آنگاه

$$F(s)=L\{f(t)\}=\frac{s}{s^2+4}$$

بنابراین بنا به (۷) داریم،

$$L\{e^{-t}\cos 2t\}=F(s+1)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

**مثال ۲.** تبدیل لاپلاس $\sqrt{t}e^t$ را محاسبه کنید.

**حل:** بنا به رابطهٔ (۴) داریم:

$$F(s)=L\{\sqrt{t}\}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}$$

پس بنا به (۷)

$$L\{\sqrt{t}e^t\}=F(s-1)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(s-1)^{\frac{3}{2}}}$$

**مثال ۳.** تابعی مانند $f(t)$ بیابید که

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2+3s+\frac{13}{4}}$$

**حل:**

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+\frac{13}{4}}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+1}\right\}=e^{-\frac{3}{2}t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=e^{-\frac{3}{2}t}\sin t$$

**مثال ٤.** $L\{t\cos t\}$ را بیابید.

**حل:** چون $F(s) = L\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$ پس بنا به (۸) داریم:

$$L\{t\cos t\} = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

**مثال ۵.** تبدیل لاپلاس $L\{x^3e^{4x}\}$ را بیابید.

**حل:** داریم

$$F(s) = L\{e^{4x}\} = \frac{1}{s-4}$$

بنا به قضیهٔ ۱ (ب) داریم:

$$L\{x^3e^{4x}\} = (-1)^3F'''(s)$$

پس

$$L\{x^3e^{4x}\} = \frac{6}{(s-4)^4}$$

**مثال ٦.** مقدار $\int_0^\infty te^{-t}\sin 2t\,dt$ را محاسبه کنید.

**حل:** بنا به تعریف تبدیل لاپلاس و رابطهٔ (۸) داریم:

$$\int_0^\infty te^{-st}\sin 2t\,dt = L\{t\sin 2t\} = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = \frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

حال

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\sin 2t\,dt = \frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}\Bigg|_{s=1} = \frac{4}{25}$$

**مثال ۷.** تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{-t}t\cos 2t$ را بیابید.

**حل:** داریم

$$L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$$

که

$$L\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

بنابراین

$$L\{te^{t}\cos 2t\}=-\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)'=\frac{(s+1)^2-4}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}$$

**مثال ۸.** $L^{-1}\left(\ln(1+\frac{1}{s})\right)$ را بیابید.

**حل:** بنا به قضیه ۱ (ب) خواهیم داشت.

$$L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

بنابراین با تبدیل معکوس لاپلاس گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$tf(t)=-L^{-1}\{F'(s)\}$$

بنابراین

$$f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(S)\}$$

حال در مثال بالا قرار می دهیم:

$$F(S)=\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

با مشتق گیری از طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$F'(S)=\frac{d}{ds}\left\{\ln\frac{s+1}{s}\right\}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

بنابراین

$$f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right\}=-\frac{1}{t}\left(e^{-t}-1\right)=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

**قضیه ۲:** فرض کنید $f$ تابعی پیوسته و $f'$ تابعی قطعه ای پیوسته روی $[0,+\infty)$ باشند، به علاوه فرض کنید $f$ تابعی از مرتبهٔ نمائی روی $[0,+\infty)$ باشد. آنگاه تبدیل لاپلاس $f'$ موجود بوده و داریم

$$L\{f'\}=sL\{f\}-f(0)$$

**اثبات:**

$$L\{f'(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f'(t)dt$$

$$= e^{-st} f(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$
$$= -f(0) + sL\{f(t)\}$$

به همین ترتیب مشابه قضیهٔ اخیر اگر توابع $f$ ، $f'$ ،... و $f^{(n-1)}$ قطعه ای پیوسته و از مرتبه نمائی روی $[0,\infty)$ باشند و $f^{(n)}$ تابعی قطعه ای پیوسته باشد، داریم:

$$L\{f''(t)\} = sL\{f'\} - f'(0)$$
$$= s(sL\{f\} - f(0)) - f'(0)$$

پس

$$L\{f''\} = s^2 L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

به طریق مشابه داریم:

$$L\{f'''\} = s^3 L\{f\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

و در حالت کلی برای هر عدد صحیح مثبت $n$ داریم:

$$L\{f^{(n)}\} = s^n L\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (۹)$$

**مثال ۹.** تبدیل لاپلاس $f(t) = \sin^2 t$ را بیابید.

**حل:** داریم:

$$f'(t) = \sin 2t\,, \qquad f(0) = 0$$

و

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sL\{f(t)\}$$

از طرفی داریم:

$$L\{f'(t)\} = L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}\ , \quad s > 0$$

حال از تساوی طرف دوم رابطه های اخیر داریم:

$$sL\{f(t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

بنابراین:

$$L\{f(t)\} = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad , \quad s>0$$

**مثال ۱۰.** اگر $L\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4s}}$ تبدیل لاپلاس $L\left\{\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right\}$ را بیابید.

**حل:** فرض کنید $f(t) = \sin\sqrt{t}$ در این صورت $f'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$ و

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\right\} = L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sL\{f(t)\}$$

که

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = 2sL\{f(t)\} = 2sL\{\sin\sqrt{t}\}$$

پس

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4s}}$$

**قضیهٔ ۳.** هرگاه $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه

الف) $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$

ب) $L\left\{\int_0^t f(r)dr\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

**اثبات:** الف)

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right] ds = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-st} f(t)ds\right] dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-st} ds\right] dt = \int_0^\infty f(t)\left[\frac{1}{t}e^{-st}\right] dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t} dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

با قرار دادن $s=0$ در رابطهٔ (الف) داریم:

$$\int_0^{\infty} F(s)ds = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt \qquad (۱۰)$$

ب) فرض کنید

$$y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

داریم $y'(x) = f(x)$ و $y(0) = 0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$L\{f(x)\} = L\{y'\} = sL\{y\} - y(0) = sL\{y\}$$

پس

$$L\{f(x)\} = sL\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\}$$

بنابراین

$$L\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{L\{f(x)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

**نتیجه:** قسمت (ب) قضیه بیشتر در تبدیل معکوس لاپلاس به کار گرفته می شود یعنی

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(r)dr$$

که $F(s) = L\{f(t)\}$.

**مثال ۱۱.** تبدیل لاپلاس $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ را بیابید.

**حل:** داریم

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

بنا به قضیهٔ۳ (الف)

$$L\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\{\sin t\}ds = \int_s^{\infty} \frac{1}{s^2+1} ds$$

$$= \tan^{-1} s \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

**مثال ۱۲.** مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ را حساب کنید.

**حل:** داریم

$$L\{e^{-ax}-e^{-bx}\}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$$

پس

$$L\left\{\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\ln|s+a|-\ln|s+b|\Big|_s^\infty=\ln\frac{s+a}{s+b}\Big|_s^\infty=\ln\frac{s+b}{s+a}$$

حال با توجه به (۱۰) داریم

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{s+b}{s+a}\Big|_{s=0}=\ln\frac{b}{a}$$

**مثال ۱۳.** مقدار $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt$ را بیابید.

**حل:**

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^\infty L\{\sin t\}ds=\int_0^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=\tan^{-1}s\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

**مثال ۱٤.** تبدیل لاپلاس $f(t)=\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx$ را محاسبه کنید.

**حل:** داریم

$$L\{f(t)\}=L\{\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx\}=\frac{1}{s}L\{\frac{\sin x}{x}\}$$

پس بنا به مثال ۱۱داریم:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s)$$

## معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه

به کمک تبدیل لاپلاس، می توان معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیهٔ معینی را حل نمود. برای این کار ابتدا از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می گیریم و سپس تبدیل معکوس لاپلاس، ما را به جواب خصوصی مورد نظر می رساند.

**مثــال ۱۵.** معادلـهٔ دیفرانــسیل $y''-3y'+2y=2e^{-t}$ بـا شــرایط اولیـهٔ $y'(0)=-1$ و $y(0)=2$ را حل کنید.

**حل:** از طرفین معادلهٔ داده شده تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{y''\}-3L\{y'\}+2L\{y\}=2L\{e^{-t}\}$$

با اعمال قاعدهٔ مشتق خواهیم داشت:

$$L\{y\}=\frac{2s^2-5s-5}{(s-2)(s-1)(s+1)}$$

به روش تبدیل به کسرهای جزئی داریم:

$$\frac{2s^2-5s-5}{(s-2)(s-1)(s+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-1}+\frac{c}{s+1}$$

که خواهیم داشت $c=\frac{1}{3}$ و $B=4$ و $A=-\frac{7}{3}$

پس

$$y=L^{-1}\left\{\frac{-\frac{7}{3}}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{4}{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{s+1}\right\}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y=-\frac{7}{3}e^{2t}+4e^{t}+\frac{1}{3}e^{-t}$$

**مثال ۱۶.** مقدار هر جواب مسأله $y''+y=\sin 2x$ ، $y(0)=0$ در نقطه $x=\pi$ را بیابید.

**حل:** از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم،

$$L\{y''\}+L\{y\}=L\{\sin 2x\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+L\{y\}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{y\}=\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}+\frac{y'(0)}{s^2+1}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{-\frac{2}{3}}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{y'(0)}{s^2+1}\right\}$$

$$y = -\frac{1}{3}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin x + y'(0)\sin x$$

حال

$$y(\pi) = 0$$

**مثال ۱۷.** معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + (1+x)y' + y = 0$ با شرایط اولیهٔ $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ را حل کنید.

**حل:** از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{xy''\} + L\{y'\} + L\{xy'\} + L\{y\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}L\{y''\} + sL\{y\} - y(0) - \frac{d}{ds}L\{y'\} + L\{y\} = 0$$

با فرض $Y(s) = L\{y\}$ داریم

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + sY(s) - y(0) - \frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = 0$$

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + 1 + sY(s) - 1 - Y(s) - sY'(s) + Y(s) = 0$$

$$-Y'(s)(s^2+s) - sY(s) = 0$$

پس

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{1}{s+1}$$

با انتگرال از طرفین این رابطه داریم:

$$\ln Y(s) = -\ln(s+1) = \ln\frac{1}{s+1}$$

پس $y(s) = \frac{1}{s+1}$ بنابراین

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-x}$$

## تمرین

۱. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

الف) $t^2e^{-t}\sin t$

ب) $e^{3t}\sin(2t+5)$

پ) $t^ne^{at}$

ت) $2e^{-2t}\sin 2t$

ث) $e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$

ج) $t^2e^{3t}$

چ) $\dfrac{x}{2a}\sin ax$

ح) $\dfrac{\sin 4t}{t}$

خ) $\int_0^t \sqrt{x}e^{-3x}dx$

د) $\int_0^t e^x\sin 3xdx$

ذ) $\sin$[illegible]$t\cos t$

ر) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

ز) $t\int_0^t xe^x\sin xdx$

ژ) $\dfrac{1}{t}\int_0^t e^x\cos xdx$

۲. تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

الف) $\dfrac{3s}{s^2+4s+5}$

ب) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$

پ) $\dfrac{1}{s^2+2s}$

ت) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

ث) $Arc\cot\dfrac{s}{w}$

ج) $\dfrac{1}{s}\tan^{-1}\dfrac{1}{s}$

چ) $\ln\dfrac{s+1}{s+3}$

ح) $\ln\dfrac{s}{s-1}$

خ) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

د) $\tan^{-1}s$

ذ) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

ر) $\ln\dfrac{s^2+1}{s(s+1)}$

ز) $\dfrac{s+2}{(s^2+4s+3)^2}$

ژ) $\dfrac{s^2+s+1}{s^3-s^2+2}$

$s+2$

$s^2+1$

۳. اگر $f(t)=\frac{g(t)}{t}$، $t>0$، و اگر توابع $f$ و $g$ دارای تبدیل لاپلاس به ترتیب $F(s)$ و $G(s)$ باشند، آنگاه $F'(s)=-G(s)$، فرض می کنیم $F(s)=\ln\frac{(s^2+4a^2)^{\frac{1}{4}}}{s^{\frac{1}{2}}}$، $a$ عددی حقیقی و ثابت. در این صورت $f(t)$ را حساب کنید.

۴. انتگرال های زیر را محاسبه کنید

الف) $\int_0^\infty \frac{\sin t-\sin 2t}{t}dt$ ب) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos t}{t}dt$

پ) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ ت) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

ث) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt$ ج) $\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx$

۵. هرگاه $L\{f(t)\}=\frac{\sqrt{s^2-s+1}}{\sqrt{s^3+1}}$ مقدار انتگرال $\int_0^\infty f(x)dx$ را حساب کنید.

۶. هر یک از مسائل مقدار اولیهٔ زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

الف) $Z''+Z'-2Z=0\ ;\quad Z'(0)=1,\quad Z(0)=4$

ب) $y''+3y'+2y=0\ ;\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=0$

پ) $y^{(4)}-y=0\ ;\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y''(0)=1\ ,\ y'''(0)=0$

ت) $y''+4y'=\cos 2t\ ;\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=0$

ث) $y''+4y=\cos 2t\ ;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ج) $y''-2y'+2y=\sin t\ ;\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=0$

ح) $xy''+(1-x)y'+y=0\ ;\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=-1$

چ) $ty''+2y'+ty=0\ ;\quad y(0)=1$

ح) $xy''+y'+xy=0;\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=0$

خ) $f'''(t)+8f'(t)+16f(t)=0\ ;\quad f'(0)=1\ ,\quad f(0)=2$

د) $y''-y'+y=t\ ;\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=0$