ریاضی عمومی (۲)

با تأکید بر حل مسأله

$$f(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sin r}{r} & r\neq ۰\\ ۱ & r=۰\end{cases}$$

مؤلفین

اسماعیل یوسفی　　ناصر عزیزی

حمید رضا رضازاده　　محمد جواد نیک مهر

توابع چندمتغیره

تعریف: به تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ تابع nمتغیره می‌گویند.
که حوزه تعریف آن $\mathbb{R}^n$ و حوزه مقادیر آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

مثال ۱. تابع $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ را در نظر بگیرید.
در این‌صورت:

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \quad , \quad R_f = \mathbb{R}^+$$

۱.۵ حد و پیوستگی توابع‌چندمتغیره

تعریف: اگر $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$، $r \in \mathbb{R}$ عدد ثابت باشد، در این‌صورت همسایگی به مرکز A و شعاع r را به‌صورت $N_r(A)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از:

$$N_r(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|X - A\| < r\}$$

که در آن $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و

$$\|X - A\|^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2$$

بدیهی است، اگر $n = ۱$ باشد، آنگاه همسایگی فاصله باز به مرکز $A = a_۱$ و شعاع r است، اگر $n = ۲$ باشد، آنگاه همسایگی داخل دایره‌ای به مرکز $A = (a_۱, a_۲)$ و شعاع r است و اگر $n = ۳$ باشد آنگاه همسایگی داخل کره‌ای به مرکز $A = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و شعاع r است.

تعریف: اگر A را از همسایگی فوق حذف کنیم به آن همسایگی محذوف به مرکز A و شعاع r می‌گویند و به‌صورت $N'_r(A)$ نمایش می‌دهند. یعنی:

$$N'_r(A) = N_r(A) - \{A\}$$

۱.۱.۵ حد توابع چندمتغیره

تعریف: تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطه $z = f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ را که در همسایگی نقطه $A = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ تعریف شده است در نظر بگیرید. در این‌صورت اگر با نزدیک کردن $X \in \mathbb{R}^n$ به $A \in \mathbb{R}^n$، تابع $f(X)$ به سمت عددی مانند $L \in \mathbb{R}$ نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع $f(X)$ وقتی که X به سمت A میل می‌کند برابر L است. به عبارت دیگر:

$$\lim_{X \to A} f(X) = L \iff$$
$$\forall\, \varepsilon > ۰\ \exists\, \delta > ۰\ ;\ (\forall\, X \in \mathbb{R}^n\ ;\ ۰ < \|X - A\| < \delta \Rightarrow |f(X) - L| < \varepsilon)$$

مثال ۲. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{\substack{x \to ۲ \\ y \to ۳}} (x + y) = ۵$

باید نشان دهیم:

$$\forall\, \varepsilon > ۰\quad \exists\, \delta > ۰\ ;\ (\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^۲\ ;\ ۰ < \sqrt{(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲} < \delta$$
$$\Rightarrow |x + y - ۵| < \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}|x + y - ۵| &= |x - ۲ + y - ۳| \le |x - ۲| + |y - ۳| \\ &\le \sqrt{(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲} + \sqrt{(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲} \\ &= ۲\sqrt{(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲} < ۲\delta\end{aligned}$$

در نتیجه با فرض $\delta \le \frac{\varepsilon}{۲}$ حکم برقرار است.

۲.۵ مشتقات جزئی

در تابع چند متغیره $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ هرگاه نسبت به یک متغیره مشتق بگیریم و بقیه متغیرها را ثابت فرض کنیم، به آن مشتق جزئی تابع نسبت به آن متغیر می‌گویند. به عنوان نمونه، مشتق جزئی تابع دو متغیره $f(x, y)$ نسبت به x عبارتست از:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

که در آن y ثابت در نظر گرفته شده است. اگر حد فوق موجود و متناهی باشد می‌گوییم تابع $f(x, y)$ نسبت به x **مشتق جزئی مرتبه اول** دارد.

مشتق جزئی نسبت به x را با یکی از نمادهای زیر نمایش می‌دهند.

$$\frac{\partial}{\partial x} f \ , \ D_x f \ , \ f_x \ , \ D_1 f \ , \ f_1$$

به‌طور مشابه، مشتق جزئی تابع دومتغیره $z = f(x,y)$ نسبت به y عبارتست از:

$$\lim_{\Delta y \to ۰} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

که در آن x ثابت در نظرگرفته شده است. اگر حد فوق موجود و متناهی باشد، می‌گوییم تابع $f(x,y)$ نسبت به y مشتق جزئی مرتبه اول دارد و آن را با یکی از نمادهای زیر نمایش می‌دهند

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ D_y f\ ,\ f_y\ ,\ D_۲ f\ ,\ f_۲$$

مثال ۱۰. مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $f(x,y) = e^{x+۲y}$ در $(۰,۰)$ وجود دارد، زیرا:

$$\begin{aligned}
f_x(۰,۰) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۰+\Delta x, ۰) - f(۰,۰)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{e^{(۰+\Delta x)+۰} - e^{۰}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{e^{\Delta x} - ۱}{\Delta x} = ۱ \\
f_y(۰,۰) &= \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{f(۰, ۰+۲\Delta y) - f(۰,۰)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{e^{۰+(۰+۲\Delta y)} - e^{۰}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to ۰} ۲e^{\Delta y} = ۲
\end{aligned}$$

مثال ۱۱. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x,y) = x\sqrt[۳]{y^۲}$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned}
f_x(۱,۰) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۱+\Delta x, ۰) - f(۱,۰)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(۱+\Delta x)(\sqrt[۳]{۰}) - ۰}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۰}{\Delta x} = ۰ \\
f_y(۱,۰) &= \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{f(۱, ۰+\Delta y) - f(۱,۰)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{(۱)\sqrt[۳]{(\Delta y)^۲} - ۰}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{\Delta y}} = \infty
\end{aligned}$$

بنابراین مشتقات جزئی مرتبه اول f در نقطه $(۱,۰)$ موجود نیست.

۱.۲.۵ مشتقات جزئی مراتب بالاتر

هرگاه $D_x f$ و $D_y f$ مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $z = f(x, y)$ باشند و اگر مشتقات $D_x f$ و $D_y f$ موجود باشند به آنها مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $f(x, y)$ می‌گویند. بنابراین:

$$D_x(D_x f) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = f_{xx}(x, y) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$
$$D_y(D_y f) = \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = f_{yy}(x, y) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f_y(x, y + \Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$
$$D_y(D_x f) = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$
$$D_x(D_y f) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}))$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}))$$

مثال ۱۳. اگر $f(x,y)=xe^{\frac{x}{y}}$ در این‌صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}})=\frac{-2x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}}=-(\frac{2x}{y^2}+\frac{x^2}{y^3})e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}))=-(\frac{2}{y^2}+\frac{2x}{y^3}+\frac{2x}{y^3}+\frac{x^2}{y^4})e^{\frac{x}{y}}$$

$$=-\frac{1}{y^4}(2y^2+4xy+x^2)e^{\frac{x}{y}}$$

مثال ۱۴. مشتقات نسبی مرتبه دوم تابع $f(x,y)=\ln xy+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1}=\frac{1}{x}-\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2+y^2})=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}+\frac{x}{x^2+y^2})=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2+y^2})=-\frac{1}{x^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}+\frac{x}{x^2+y^2})=-\frac{1}{y^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در این مثال $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

قضیه ۲: هرگاه تابع $f(x,y)$ در همسایگی نقطه (x_0,y_0) پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته f_{yx} ، f_{xy} ، f_y ، f_x باشد، آنگاه

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

۵.۵ مشتق‌گیری ضمنی

قضیه ۷: اگر تابع $F(x,y,z)=0$ به‌طور ضمنی مشتق‌پذیر باشد که در آن $z=z(x,y)$، آنگاه داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

مثال ۲۴. اگر $z = z(x,y)$ و $f(x,y,z) = \sin xy + ۲e^{xyz}$ در این صورت:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{y\cos xy + ۲yze^{xyz}}{۲xye^{xyz}} \\
&= -\frac{۱}{۲x}e^{-xyz}\cos xy - \frac{z}{x} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{x\cos xy + ۲xze^{xyz}}{۲xye^{xyz}} \\
&= -\frac{۱}{۲y}e^{-xyz}\cos xy - \frac{z}{y}
\end{aligned}$$

تعریف: به بردار $\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ ، بردار گرادیان می‌گویند با $\operatorname{grad} f$ یا ∇f نمایش می‌دهند که در آن

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

نتیجه: با توجه به تعریف بردار گرادیان می‌توان مشتق تابع $w = f(x, y, z)$ در جهت بردار یکه $\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$ به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) &= (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\cos\beta \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\cos\gamma)\cdot(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) \\
&= \nabla f(x, y, z)\cdot\mathbf{u} = \nabla f\cdot\mathbf{u}
\end{aligned}$$

مثال ۳۳. مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$ را در نقطه $M(۱, ۲, -۲)$ در امتداد مماس بر منحنی $x = t, y = ۲t^۲, z = -۲t^۴$ به‌دست می‌آوریم.

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + ۲t^۲\mathbf{j} - ۲t^۴\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + ۴t\mathbf{j} - ۸t^۳\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(۱) = \mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۸\mathbf{k}$$

$$f = x(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$\begin{aligned}
f_x &= (x^۲ + y^۲ + z^۲)^{\frac{-۱}{۲}} + x(۲x)(\frac{-۱}{۲})(x^۲ + y^۲ + z^۲)^{\frac{-۳}{۲}} \\
&= \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}} - \frac{x^۲}{(\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲})^۳}
\end{aligned}$$

$$f_y = \frac{-xy}{(\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲})^۳}\ ,\ f_z = \frac{-xz}{(\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲})^۳}$$

$$f_x(۱, ۲, -۲) = \frac{۵ - ۱}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۴}{۵\sqrt{۵}}\ ,\ f_y(۱, ۲, -۲) = \frac{-۲}{۵\sqrt{۵}}\ ,\ f_z(۱, ۲, -۲) = \frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$$

$$\|\mathbf{r}'(۱)\| = \sqrt{۱ + ۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۸۱} = ۹ \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}'(۱)}{\|\mathbf{r}'(۱)\|} = \frac{۱}{۹}\mathbf{i} + \frac{۴}{۹}\mathbf{j} - \frac{۸}{۹}\mathbf{k}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(۱, ۲, -۲) = \frac{۱}{۹} \times \frac{۴}{۵\sqrt{۵}} + \frac{۴}{۹} \times \frac{-۲}{۵\sqrt{۵}} - \frac{۸}{۹}\frac{۲}{۵\sqrt{۵}} = \frac{-۲۰}{۹ \times ۵\sqrt{۵}} = \frac{-۴}{۹\sqrt{۵}}$$

مثال ۳۴. مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = e^{xyz}$ را در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ در راستای بردار گرادیان تعیین می‌کنیم

$$\nabla f = yze^{xyz}\mathbf{i} + xze^{xyz}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$$

$$\nabla f(۱, ۱, ۱) = e\mathbf{i} + e\mathbf{j} + e\mathbf{k} = e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

بنابراین

$$D_{\mathbf{u}}f(۱, ۱, ۱) = \nabla f(۱, ۱, ۱) \cdot \mathbf{u} = e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{۱}{\sqrt{۳}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= \frac{e}{\sqrt{۳}}(۳) = \sqrt{۳}e$$

تذکر ۲: با توجه به تعریف ضرب داخلی بردارها داریم:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\|\|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین ∇f و $\mathbf{u}$ است.

بنابراین مشتق جهتی وقتی بیشترین مقدار مثبت را دارد که $\cos\theta = ۱$ یعنی $\mathbf{u}$ و بردار گرادیان هم‌جهت باشند. $(\theta = ۰)$

$$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos(۰) = \|\nabla f\|$$

به همین ترتیب وقتی که $\theta = \pi$ یعنی $\cos\theta = -۱$ آنگاه f در جهت $-\nabla f$، سریع‌ترین کاهش را دارد.

$$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| \cos\pi = -\|\nabla f\|$$

همچنین

$$D_{-\mathbf{u}} = \nabla f \cdot (-\mathbf{u}) = -D_{\mathbf{u}}f$$

قضیه ۱۱: اگر f و g توابع چند متغیره باشند که دارای مشتقات جزئی باشند، آنگاه:

۱) $$\nabla(kf) = k\nabla f \quad (\text{ثابت } k)$$

۲) $$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

۳) $$\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

۸.۵ صفحات مماس و خطوط قائم بر رویه‌ها

رویه S با معادله $F(x,y,z) = ۰$ مفروض است و F دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد. فرض کنید $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ نقطه‌ای روی S باشد که F_x و F_y و F_z در آن نقطه همگی همزمان صفر نباشند، و C یک خم دلخواه با تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t)\mathbf{i} + \mathbf{y}(t)\mathbf{j} + \mathbf{z}(t)\mathbf{k}$ واقع بر سطوح S باشد. بنابراین معادلات پارامتری $x = \mathbf{x}(t), y = \mathbf{y}(t), z = \mathbf{z}(t)$ در معادله $F(x,y,z) = ۰$ صدق می‌کند، لذا بنا به قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = ۰ \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = ۰ \\ &\Rightarrow \nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = ۰\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که ∇F عمود بر خم C واقع بر سطح S است. پس ∇F در هر نقطه بر سطح S عمود است. بنابراین صورت معادله صفحه مماس بر رویه S به معادله $F(x,y,z) = ۰$ در نقطه $P_{\circ}$ عبارتست از:

$$F_x(P_{\circ})(x - x_{\circ}) + F_y(P_{\circ})(y - y_{\circ}) + F_z(P_{\circ})(z - z_{\circ}) = ۰$$

و معادله خط قائم بر رویه عبارتست از:

$$\frac{x - x_{\circ}}{F_x(P_{\circ})} = \frac{y - y_{\circ}}{F_y(P_{\circ})} = \frac{z - z_{\circ}}{F_z(P_{\circ})}$$

بدیهی است اگر $z = f(x,y)$، در آن‌صورت اگر قرار دهیم $F(x,y,z) = f(x,y) - z$، آنگاه معادله صفحه مماس در نقطه $P_{\circ}$ بر رویه S عبارتست از:

$$f_x(x_{\circ}, y_{\circ})(x - x_{\circ}) + f_y(x_{\circ}, y_{\circ})(y - y_{\circ}) + (-۱)(z - z_{\circ}) = ۰$$

مثال ۳۵. معادله صفحه مماس و خط قائم بر کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ را در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ به‌دست می‌آوریم.

قرار می‌دهیم

$$F(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳$$

از این‌رو

$$F_x = ۲x \ , \ F_y = ۲y \ , \ F_z = ۲z$$

بنابراین

$$\mathbf{n} = \nabla F(۱, ۱, ۱) = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

در نتیجه معادله صفحه مماس عبارتست از:

$$۲(x - ۱) + ۲(y - ۱) + ۲(z - ۱) = ۰$$

یا

$$x + y + z = ۳$$

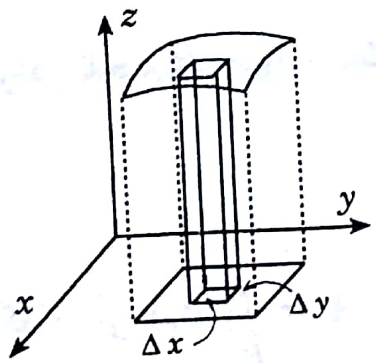
و معادله خط قائم برابر است با:

$$\frac{x - ۱}{۲} = \frac{y - ۱}{۲} = \frac{z - ۱}{۲}$$

انتگرال‌های چندگانه و آنالیز برداری

۱.۶ انتگرال دوگانه

فرض کنید S رویه متناظر با تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ باشد که روی ناحیه‌ی بسته R در صفحه‌ی xoy تعریف شده و پیوسته است. R را به n زیر ناحیه تقسیم می‌کنیم.
روی هر یک از این زیرناحیه‌ها مکعب‌مستطیلی می‌سازیم که از بالا به رویه S محدود شود، هر کدام از این مکعب‌مستطیل‌ها حجمی را تشکیل می‌دهند و داریم:



$$\text{حجم ناحیه‌ی } i \text{ ـ ام} = \Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$
$$= f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

$$\text{مساحت ناحیه‌ی } i \text{ ـ ام} = \Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

$$\text{حجم کل محدود به ناحیه‌ی } R \text{ و رویه‌ی } S = V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

بنابراین
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

اگر حد فوق موجود و متناهی باشد آنگاه تابع $z = f(x,y)$ را روی ناحیه R انتگرال‌پذیر گویند و مقدار حد حاصل را با نماد زیر نمایش می‌دهند که به آن انتگرال دوگانه یا دوبل می‌گویند.
$$V = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dydx$$

۱.۱.۶ ویژگی‌های انتگرال دوگانه

الف) $\iint_R dA = A$

ب) $\iint_R \{af(x,y) \pm bg(x,y)\}ds = a\iint_R f(x,y)dA \pm b\iint_R g(x,y)dA$

ج) اگر $R = R_1 \cup R_2$ به شرطی که $R_1 \cap R_2 = \phi$ آنگاه:
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

د) اگر در ناحیه R داشته باشیم: $f(x,y) \leq g(x,y)$ آنگاه:
$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

ه) اگر در ناحیه R همواره داشته باشیم: $m \leq f(x,y) \leq M$ آنگاه:
$$mA \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA$$

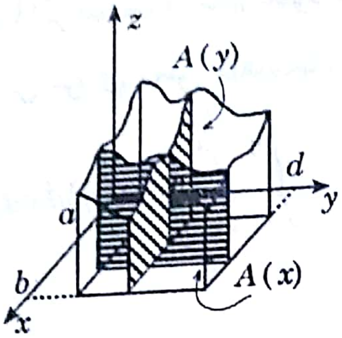
که در آن $A = \iint_R dA$ مساحت ناحیه R است.

قضیه ۱: اگر تابع $z = f(x,y)$ روی ناحیه‌ی بسته و متناهی R پیوسته باشد آنگاه انتگرال‌پذیر است.

۱.۲.۶ روش محاسبه انتگرال‌گیری دوگانه در مختصات دکارتی

الف) اگر صفحه $x = x_0$ را از نمودار $z = f(x,y)$ بگذرانیم که $a \leq x_0 \leq b$ آنگاه:
$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx$$

که $A(x)$ اندازه مساحت سطح مقطع جسم موردنظر با صفحه‌ی $x = x_\circ$ می‌باشد و



$$A(x) = \int_c^d Rf(x,y)dy$$

بنابراین:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

ب) به‌طور مشابه اگر صفحه‌ی $y = y_\circ$ $(c \leq y_\circ \leq d)$ را از نمودار $z = f(x,y)$ بگذرانیم آنگاه:

$$V = \int_R \int f(x,y)dA$$
$$= \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

قرارداد: اگر محل برخورد صفحات قائم $A(x)$$(A(y))$ با ناحیه‌ی R را با فلش نمایش دهیم آنگاه:

الف) اگر فلش موازی محور xها باشد، آنگاه اولین دیفرانسیل dx می‌باشد.

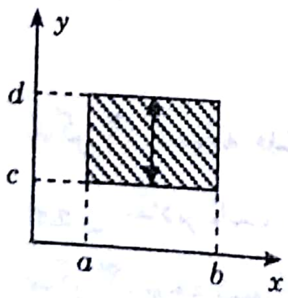
ب) اگر فلش موازی محور yها باشد، آنگاه اولین دیفرانسیل dy می‌باشد.

تذکر ۱: در محاسبه انتگرال دوگانه و سه‌گانه مهم‌ترین نکته تعیین حدود انتگرال‌گیری می‌باشد که باید شکل‌های فضایی را به خوبی درک کرد.

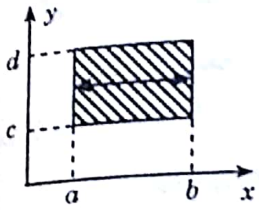
به‌طور کلی ناحیه انتگرال‌گیری را به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

حالت اول:

الف) اگر صفحه‌ی قائم عمود بر محور xها بگذرانیم آنگاه فلش موازی محور y هاست.

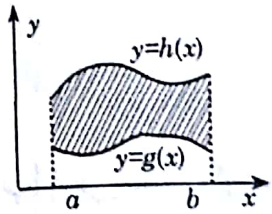


$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$



ب) اگر صفحه‌ی قائم عمود بر محور yها بگذرانیم فلش موازی محور xهاست.

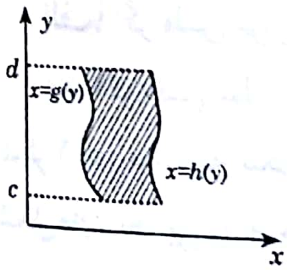
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$



حالت دوم: اگر ناحیه‌ی R محصور به منحنی‌های $y = h(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد و

$$\forall x \in [a,b]\ ;\ g(x) \leq h(x)$$

که توابع h و g روی $[a,b]$ پیوسته‌اند آنگاه بنا به قرارداد، فلش موازی محور yهاست، پس اولین دیفرانسیل dy می‌باشد.



حالت سوم: اگر ناحیه R محصور به منحنی‌های $x = h(y)$ و $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ باشد و $\forall y \in [c,d]\ ;\ g(y) \leq h(y)$ و h و g روی $[c,d]$ پیوسته باشند آنگاه بنا به قرارداد، فلش موازی محور xهاست، پس اولین دیفرانسیل dx است.

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy$$

تذکر ۲: همیشه فلش بین دو منحنی قرار می‌گیرد زیرا حدود انتگرال درونی تابع و حدود انتگرال بیرونی مقادیر ثابت هستند.

تذکر ۳: توجه کنید که با تعویض دیفرانسیل همواره نمی‌توان جای انتگرال‌ها را هم تغییر داد البته این نکته فقط در حالت اول صدق می‌کند یعنی وقتی که ناحیه انتگرال‌گیری مستطیلی شکل است و تابع f در این ناحیه پیوسته باشد داریم:

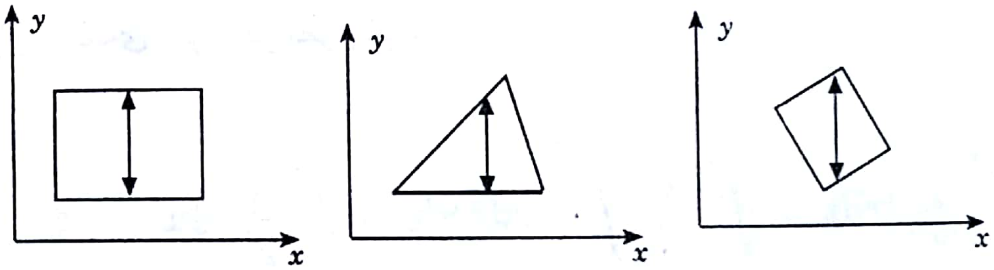
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

ولی برای حالت ۲ و ۳ برقرار نمی‌باشد، یعنی:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx \neq \int_{g(x)}^{h(x)} \int_a^b f(x,y)dxdy$$
$$\int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy \neq \int_{g(y)}^{h(y)} \int_c^d f(x,y)dydx$$

زیرا بنا به تذکر ۳ حدود انتگرال درونی همیشه توابع هستند (که می‌توانند تابع ثابت هم باشند) و حدود انتگرال بیرونی مقادیر ثابت هستند در حالیکه تحت شرایط حالت دوم و سوم می‌توان جای دیفرانسیل‌ها را عوض کرد (به مثال ۲ مراجعه شود).

تذکر ۴: باید ناحیه‌ی انتگرال‌گیری که با فلش کار می‌کنیم حتماً منظم باشد یعنی اگر آن فلش را حرکت دهیم دو نوک فلش ناحیه انتگرال‌گیری را باید در دو مرز (هر مرز دارای یک تابع می‌باشد) قطع کند. به عنوان مثال:

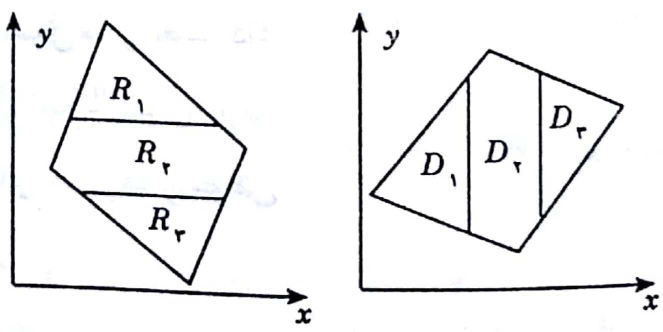


نسبت به هر دو محور نامنظم

نسبت به محور x منظم
نسبت به محور y نامنظم

نسبت به هر دو محور منظم

تذکر ۵: اگر ناحیه انتگرال‌کیری نسبت به هر دو محور نامنظم باشد در صورت امکان آن را به نواحی منظم تقسیم می‌کنیم و از ویژگی ۳ انتگرال را حساب می‌کنیم. مثلاً در مورد شکل زیر می‌توان در دو حالت انتگرال را حساب کرد:



$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + \iint_{R_3} f(x,y)dA$$

که $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ ، $R_i \cap R_j = \phi$ ، $1 \leq i \neq j \leq 3$

و $dA = dxdy$ (چون نواحی R_iها نسبت به x منظم‌اند)

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA + \iint_{D_3} f(x,y)dA$$

که $R = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ، $D_i \cap D_j = \phi$ ، $1 \leq i \neq j \leq 3$

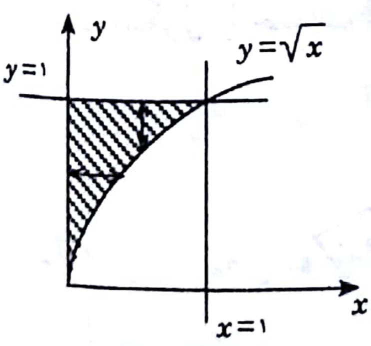
و $dA = dydx$(چون نواحی D_iها نسبت به y منظم‌اند)

تذکر ۶: وقتی که حدود انتگرال‌ها از روی شکل‌ها مشخص شد به راحتی می‌توان انتگرال‌ها را حل کرد که در مثال‌های زیر مشاهده خواهید کرد.

مثال ۱. انتگرال دوگانه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_0^2 \int_0^{y^{\frac{3}{2}}} \frac{x}{y^2} dxdy = \int_0^2 \frac{1}{y^2}\left(\int_0^{y^{\frac{3}{2}}} xdx\right)dy = \int_0^2 \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{y^{\frac{3}{2}}} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{y^2}(y^3 - 0)dy = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(4-0) = 1$$

مثال ۲. انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dydx$ را حل می‌کنیم.



مشاهده می‌کنید که انتگرال فوق نسبت به dy حل نمی‌شود پس باید جای دیفرانسیل‌ها را تغییر داد اما بنا به تذکر ۴ ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را در صفحه ترسیم می‌کنیم پس جای فلش‌ها را عوض می‌کنیم.

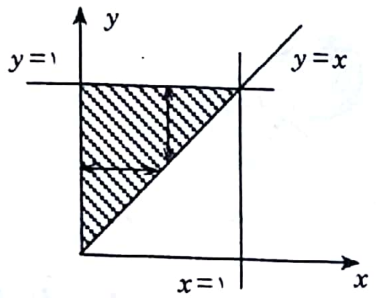
فلش موازی محور yهاست چون در صورت مسأله اولین دیفرانسیل dy است که $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 1$ پس ناحیه‌ی انتگرال‌گیری R در شکل مشخص می‌شود. فلش را با (توابع معکوس)

تغییر می‌دهیم و بنا به حالت سوم داریم:

$$\begin{cases} 0 \le x \le y^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}dx\right)\right)dy = \int_0^1 y\left(e^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2}\right)dy = \int_0^1 y(e^y - 1)dy$$

$$= \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 y dy = [(y-1)e^y]_0^1 - [\frac{y^2}{2}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



مثال ۳. انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy dx$ را حل کنید.

این مثال مشابه مثال قبلی است. با توجه به اینکه انتگرال فوق نسبت به dy حل نمی‌شود بنابراین تحت شرایطی جای دیفرانسیل‌ها را عوض می‌کنیم.

$$\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\left(\int_0^y dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - 0)dy = \int_0^1 \sin y dy = -\cos y|_0^1 = 1 - \cos 1$$

۱.۳.۶ تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

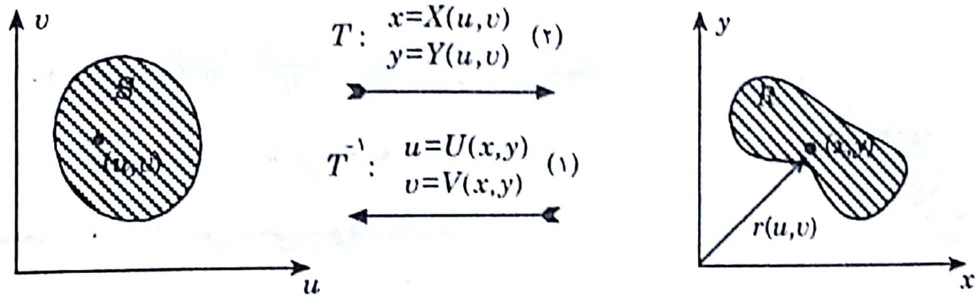
در نظریه‌ی انتگرال‌گیری یک بعدی اغلب به روش تغییر متغیر می‌توان انتگرال‌های پیچیده را با تبدیل آنها به انتگرال‌های ساده‌تر محاسبه کرد روش کار مبتنی به فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt \qquad (1)$$

است که در آن $a = g(c)$ و $b = g(d)$. این فرمول با این مفروضات که g مشتق پیوسته بر بازه $[c, d]$ داشته و f بر مجموعه مقادیر $g(t)$، وقتی t در بازه $[c, d]$ تغییر می‌کند، پیوسته است ثابت شده است.

مشابه رابطه (۱)، فرمول تغییر متغیر در انتگرال دوگانه نیز وجود دارد. این فرمول انتگرال به شکل $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ که روی ناحیه‌ی R در صفحه‌ی xy گرفته شده را به انتگرال دوگانه دیگر $\iint\limits_R F(u,v)dudv$ که روی ناحیه‌ی جدید S در صفحه‌ی uv گرفته شده، تبدیل می‌کند.

اگر $T(u,v)=(x,y)$ آنگاه نقطه‌ی (x,y) را نقش نقطه‌ی (u,v) می‌نامند. اگر هیچ دو نقطه‌ای دارای یک نقش نباشند، آنگاه تبدیل را یک‌به‌یک می‌نامند. شکل زیر تبدیل T بر ناحیه‌ی S واقع در صفحه‌ی uv را نشان می‌دهند T ناحیه‌ی S از صفحه‌ی uv را به ناحیه‌ی R در صفحه‌ی xy می‌برد. R را نقش S می‌نامند.



تعریف: هرگاه از مبدأ در صفحه xy بردار شعاعی r را به نقطه‌ی (x,y) از R رسم کنیم، بردار r که تابعی از دو متغیر مستقل v,u است را می‌توان یک تابع برداری دو متغیره گرفت که با معادله‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$r(u,v)=X(u,v)\mathbf{i}+Y(u,v)\mathbf{j} \quad , \quad (u,v)\in S$$

که آن رامعادله‌ی برداری این تبدیل می‌نامیم. وقتی (u,v) نقاط S را بگیرد، نقطه‌ی انتهایی $r(u,v)$ نقاط R را رسم خواهد کرد.

گاهی معادله (۲) را می‌توان نسبت به u و v بر حسب x و y حل کرد. در صورت امکان آن، می‌توان نتیجه را به شکل

$$u=U(x,y) \quad , \quad v=V(x,y)$$

بیان کرد. تبدیل‌های یک‌به‌یک از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. به‌طوری‌که نقاط متمایز S را به نقاط R نگاشت می‌دهند. به عبارت دیگر، هیچ دو نقطه متمایز S با یک تبدیل یک‌به‌یک روی یک نقطه از R نگاشته نمی‌شوند.

تبدیل‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آنها توابع X و Y بر S پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی پیوسته $\frac{\partial X}{\partial u}$ و $\frac{\partial X}{\partial v}$ و $\frac{\partial Y}{\partial u}$ و $\frac{\partial Y}{\partial v}$ بر این مجموعه باشند.

فرمول تبدیل انتگرال‌های دوگانه (مضاعف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv \qquad (۳)$$

عامل $J(u,v)$ در انتگرال سمت راست نقش عامل $g'(t)$ در فرمول یک بعدی (۱) را دارد. که ژاکوبی تبدیل تعریف شده با (۲) نامیده می‌شود، و مساوی است با:

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix}$$

می‌توان نشان داد که اگر، علاوه بر فرض‌های پیوستگی فوق در مورد X و Y، U و V، تبدیل T از S به R یک‌به‌یک بوده و $J(u,v) \neq ۰$، رابطه (۳) برقرار است. در حالت خاص برای $f(x.y) = ۱$ داریم

$$\iint_R dxdy = \iint_S |J(u,v)|dudv \qquad (۴)$$

مثال ۵. انتگرال دوگانه $\iint\limits_T e^{(\frac{y-x}{y+x})}dxdy$ را به کمک تعویض متغیر مناسب حل کنید. به‌طوری‌که T ناحیه مثلثی شکل به رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌باشد.

$$\iint\limits_T e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy = \int_۰^۱\int_۰^{۱-y} e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy = I$$

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که $۰ \le x \le ۱-y$ و $۰ \le y \le ۱$. اکنون از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم بنابراین ناحیه جدید S در صفحه uv بر اساس محدودهای زیر بدست می‌آید.

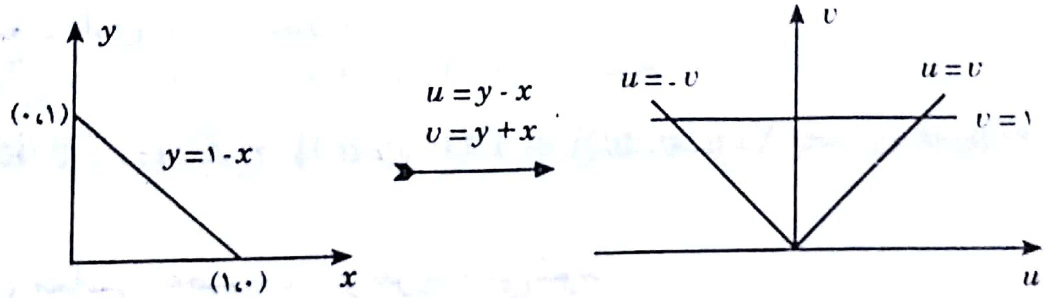
$$x = ۰ \Rightarrow u = v$$

u و v متغیرهای جدید هستند و x و y متغیرهای قدیمی می‌باشند

$$y = ۰ \Rightarrow u = -v$$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$x = ۱ - y \Rightarrow x + y = ۱ \Rightarrow v = ۱$$



ناحیه بسته بالا، ناحیه جدید S است. بنا به مثال ۲ از مبحث قبلی اولین دیفرانسیل، حتماً du باید باشد پس فلش، موازی محور u می‌باشد که منظم است.

$$I = \iint\limits_S e^{\frac{u}{v}}|J|dudv \quad , \quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}} = -\frac{۱}{۲}$$

$$I = \int_۰^۱\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\frac{۱}{۲}dudv = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ v[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}(\frac{۱}{v}du)]dv = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ v[e^{\frac{u}{v}}|_{-v}^{v}]dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ v(e - e^{-۱})dv = \frac{۱}{۲}(e - \frac{۱}{e})\frac{۱}{۲}v^۲|_۰^۱ = \frac{۱}{۴}(e - \frac{۱}{e})$$

تذکر ۷: در محاسبه انتگرال دوگانه تابع $f(r,\theta)$ روی ناحیه R به کمک **مختصات قطبی**، ضریب r ظاهر می‌شود، در واقع می‌توان گفت $f(r,\theta)$ همان تابع $F(x,y)$ است به‌طوری که

$$F(x,y) = F(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r,\theta)$$

و r همان ژاکوبین تبدیل زیر است

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

اما نکته جالب توجه آن است که انتگرال روی R تعیین می‌شود و تعویض متغیر از (x,y) به (r,θ)، R را به R' تعویض نمی‌کند و فقط سیستم مختصات از دکارتی به قطبی تبدیل می‌شود یعنی $\int_R\int F(x,y)dxdy = \int_R\int F(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$.

مثال ۷. مطلوبست حجم جسمی که قاعده‌اش ناحیه داخلی دلنمای $r = ۱ + \cos\theta$ و خارج دایره $r = ۱$ و از بالا به صفحه $Z = r\cos\theta$ محصور شده است.

$$V = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۱+\cos\theta} (Z_۲ - Z_۱) r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۱+\cos\theta} (r\cos\theta - ۰) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۱+\cos\theta} r^۲ \cos\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۳} r^۳ \Big|_{۰}^{۱+\cos\theta} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{۱}{۳} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos\theta + \cos^۴\theta + ۳\cos^۳\theta + ۳\cos^۲\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{۱}{۳}\Big[\frac{۳}{۸}\pi + ۲ + \frac{\pi}{۲}\Big] = \frac{۷}{۲۴}\pi + \frac{۲}{۳}$$

۲.۶ انتگرال سه‌گانه