ریاضی عمومی ۱

جابر عامری

عناوین کلی

فصل اول (تابع)

فهرست مطالب فصل اول

عنوان..

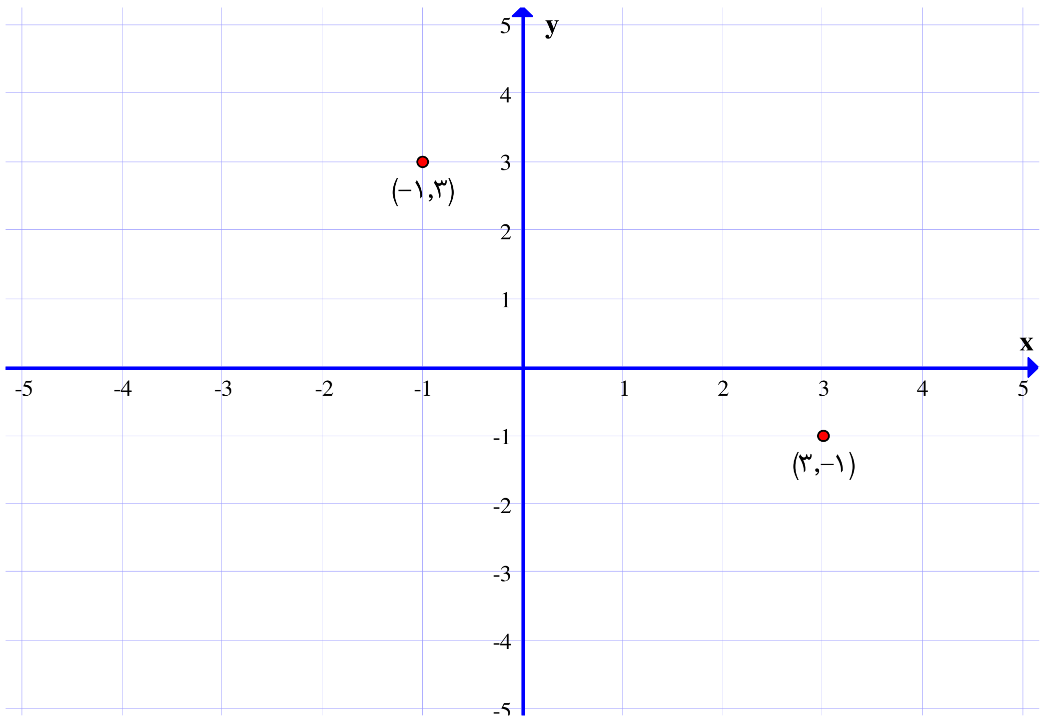
باسمه تعالی

فصل اول : تابع

زوج مرتب

هر دو تایی از اعداد حقیقی به صورت (a,b) که در آن مکان دو عدد a و b مهم باشد را زوج مرتب می نامند. در زوج مرتب (a,b) عدد a را مؤلفه ی اول یا مختص اول و عدد b را مؤلفه ی دوم یا مختص دوم می نامند. بدیهی است که اگر در یک زوج مرتب جای مؤلفه های اول و دوم را عوض کنیم آن زوج مرتب تغییر می کند.

برای مثال موقعیت هر نقطه در صفحه، با یک زوج مرتب به نام مختصات آن نقطه نمایش داده می شود. بدیهی است که اگر جای مولفه ها ی یک نقطه، جابجا شوند، موقعیت نقطه در صفحه نیز تغییر می کند.



دو زوج مرتب تایی (a,b) و (c,d) را مساوی می نامند در صورتی که مؤلفه ای نظیر به نظیر آنها مساوی باشند. یعنی:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c, b=d$$

***

تمرین: دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار n و m را بیابید.

$$(۲m+۳n\ ,۳m-۲n) \quad \text{و} \quad (۸,-۱)$$

حل:

$$\begin{cases} ۲m+۳n=۸ \\ ۳m-۲n=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ۲\times \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۲m+۳n=۸ \\ ۳m-۲n=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۴m+۶n=۱۶ \\ ۹m-۶n=-۳ \end{cases}$$

$$+)\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$۱۳m=۱۳ \rightarrow m=۱$$

$$۲m+۳n=۸ \xrightarrow{m=۱} ۲(۱)+۳n=۸ \rightarrow n=۲$$

***

تمرین برای حل: دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار b و a را بیابید.

$$(۲a-b\,,۵) \quad \text{و} \quad (۳,a+۳b)$$

***

تابع

تعریف : تابع ، مجموعه ی زوج های مرتبی است که هیچ دو زوج متمایز آن مؤلفه ی اول یکسان نداشته باشند.

به عنوان مثال، مجموعه ی $f=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$ تابع است،

ولی مجموعه ی $g=\{(۲,۴),(۱,۳),(۴,۸),(۱,-۱)\}$ تابع نیست، زیرا دو زوج متمـایز $(۱,۳)$ و $(۱,-۱)$ در آن مؤلفـه ی اول یکسان دارند.

***

نتیجه: اگر (a,b) و (a,c) دو زوج از یک تابع باشند، در این صورت لازم است که $b=c$ باشد.

***

تمرین : مجموعه ی $f=\{(۲,۳),(۰,۵),(۴,۱),(۰,m^۲+۴m)\}$ ، یک تابع است. مقدار m را بیابید.

حل: این مجموعه وقتی می تواند تابع باشد که دو زوج $(۰,m^۲+۴m)$ و $(۰,۵)$ مساوی باشند. یعنی $m^۲+۴m=۵$

$$m^۲+۴k=۵ \rightarrow m^۲+۴m-۵=۰ \rightarrow (m+۵)(m-۱)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} m+۵=۰ \rightarrow m=-۵ \\ m-۱=۰ \rightarrow m=۱ \end{cases}$$

***

تمرین برای حل:

۱ : کدام یک از مجموعه های زیر تابع است و کدام یک تابع نیست.

الف) $f_{۱} = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$

ب) $f_{۲} = \{(۱,۳),(۲,۵),(۱,۲)\}$

ج) $f_{۳} = \{(۲,۵),(۵,۲),(۳,۲),(۲,۳),(۰,۰)\}$

۲ : اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار k را بیابید.

$$f = \{(۱,۳),(۲,۰),(۴,۷),(۱,k^{۲}-۲k)\}$$

۳ : مجموعه ی زیر یک تابع است. مقدار b و a را به دست آورید.

$$f = \{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۳),(۳,۵),(۰,-۱),(۵,۳)\}$$

۴ : اگر $f = \{(۳,۵),(۴,-۴),(۷,۲),(۱,۰)\}$ و $g = \{(۴,۴),(۳,۵),(۷,۲)\}$ دو تابع باشند، تحقیق کنید که آیا $f \cup g$ و $f \cap g$ و $f-g$ تابع هستند یا خیر؟

نتیجه:

۱- زیر مجموعه ی هر تابع همیشه یک تابع است.(حتی اگر تهی باشد.)

۲- اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد ولی اشتراک و تفاضل دو تابع همیشه یک تابع است.

***

دامنه و برد تابع

مجموعه ی مؤلفه های اول زوج های مرتب یک تابع را دامنه (حوزه ی تعریف) و مجموعه ی مؤلفه های دوم آنرا برد (حوزه ی مقادیر) می نامند. مثلاً در تابع $f = \{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$

دامنه $D_f = \{۱,۲,۳,۰\}$

برد $R_f = \{۲,۰,-۱\}$

تمرین برای حل :

۱: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید. $f = \{(۳,۲),(۵,۲),(-۳,۲),(۲,۲),(۱,۲)\}$

۲ : دو تابع بنویسید که دامنه و برد آنها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آنها یکسان نباشند.

ضابطه ی تابع

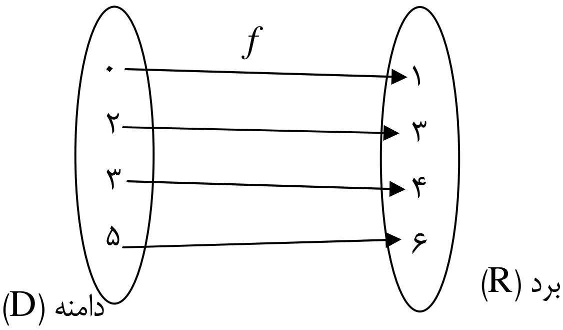
در واقع باید بین مؤلفه های اول و مؤلفه های دوم زوج های مرتب تابع یک ارتباط یکسان برقرار باشد،به عبارت دیگر در هر تابع رابطه ای باید وجود داشته باشدکه طول هر زوج را به عرض آن تبدیل کند،این رابطه را ضابطه یا معادله ی تابع می گویند. به عبارتی دیگر ضابطه ی تابع معادله ای است که هر عضو دامنه را به یک عضو منحصر بفرد از برد نظیر کند.

$$f : D \to R$$
$$y = f(x)$$

مثلاً در تابع $f = \{(2,3),(3,4),(0,1),(5,6)\}$ مؤلفه ی دوم هر زوج یک واحد از مؤلفه ی اول آن بیشتر است. پس می توان نوشت:

$$f = \{(x,y) \mid y = x+1\}$$

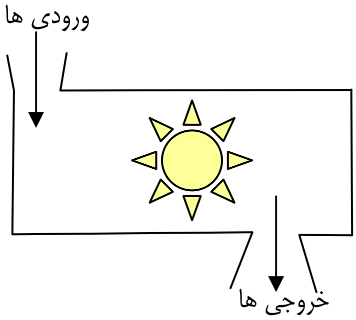
که در آن $x \in D_f = \{0,2,3,5\}$ می باشد.



مثال : تابعی که هر عضو از اعداد حقیقی را دو برابر کند، دارای ضابطه ای به شکل $y = 2x$ می باشد. پس

$$f : R \to R$$
$$y = f(x) = 2x$$

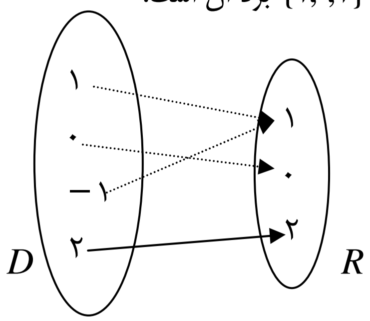
***



نتیجه : طبق تعریف فوق می توان تابع را به عنوان یک عملگر(ماشین)در نظر گرفت که یک عضو از دامنه را می گیرد و یک عضو منحصر بفرد از برد می دهد.

مجموعه ی ورودی ها دامنه و مجموعه ی خروجی ها برد تابع می باشند.

مثال: مجموعه ی $\{(۲,۲),(-۱,۱),(۰,۰),(۱,۱)\} = f$ یک تابع می باشد و معادله ی $y=|x|$ آن می شود. همچنین مجموعه ی $\{۱,۰,-۱,۲\}$ دامنه و مجموعه ی $\{۱,۰,۲\}$ برد آن است.



***

هر تابع که دامنه و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی یا زیر مجموعه ای از آن باشد را **تابع حقیقی** می نامند.

***

تمرین برای حل:

۱ : معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت مربع را به ضلع آن وابسته کند.

۲ : معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت مربع را به قطر آن وابسته کند.

۳ : معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع آن وابسته کند.

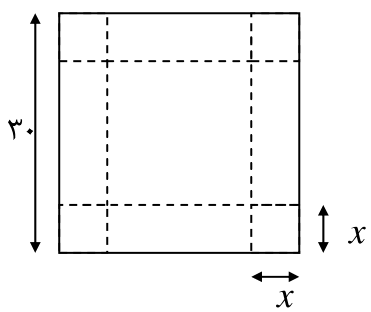
۴ : معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت یک شش ضلعی منتظم را به ضلع آن وابسته کند.

۵ : معادله ی تابعی را بنویسید که حجم یک مکعب را به ضلع آن وابسته کند.

۶ : معادله ی تابعی را بنویسید که حجم کره را به شعاع آن وابسته کند.

۷ : مجموع دو عدد ۱۰ است. اگر یکی از آنها x باشد. معادله ی تابعی را بنویسید که حاصل ضرب آنها را به x وابسته کند.

۸ : از چهار گوشه ی مقوایی مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتی متر ، مربع های دیگری به ضلع x سانتی مترجدا می کنیم. سپس لبه های مقوا را از روی خط چین تا می کنیم تا جعبه ای (بدون در) به دست آید. حجم جعبه را به صورت تابعی از x بنویسید.



***

توجه: گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد.

$$f(x)=\begin{cases} m(x) & x\in D_m \\ n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

که در این صورت دامنه این تابع با اجتماع دامنه های تمام ضابطه های آن برابر است. $D_f = D_m \cup D_n$

توجه کنید که دامنه های ضابطه ها در تابع چند ضابطه ای بنابر بر تعریف تابع باید جدا از هم باشند. $D_m \cap D_n = \Phi$

مثال۱) تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x< ۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R \mid x< ۰\}=R$$

$$R_f=\{y\in R \mid y\geq ۰\}=R^{\geq ۰}$$

مثال۲) تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$S(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R \mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x>۰\}=R$$
$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تذکر: تابع علامت را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

$$Sign(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

مثال ۳) تابع جزء صحیح یعنی $f(x)=[x]$ یک تابع دو ضابطه ای است. که به صورت زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد. $[x]$ با خود x برابر است. مثلاً $[۵]=۵$

اگر x عدد صحیح نباشد. $[x]$ با عدد صحیح قبل از x برابر است. مثلاً $[۲/۵]=۲$ و $[-۳/۵]=-۴$

واضح است که دامنه ی این تابع مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد صحیح است.

***

مقدار تابع در یک نقطه

در تابع $f=\{(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱),(-۲,۵)\}$ مقدار تابع در نقطه ی ۲ برابر ۵ است و می نویسند: $f(۲)=۵$ همچنین مقدار تابع در نقطه ی ۰ برابر ۳ است، لذا $f(۰)=۳$

اگر معادله ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه ی $x_۰$ از دامنه ی آن، کافی است مقدار $x_۰$ را در معادلـه ی تـابع به جای x جایگزین کنیم. یعنی $y_۰=f(x_۰)$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ مقدار تابع را در نقاط داده شده، یافته و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۱	۲	۰	-۲	۳
$f(x)$						

تمرین: اگر $f(x)=-x^۲+۳x$ و $g(x)=۳x^۲-۳x+۱$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $f(-۱)=$　　۳) $۴f(۳)=$　　۵) $۲f(۰)-g(۱)=$

۲) $g(۲)=$　　۴) $f(-۱)+g(۴)=$　　۶) $\frac{f(۴)+g(۲)}{g(۰)}=$

تمرین: با توجه به تابع مقابل تساوی های زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-x+۱ & x\geq ۲ \\ |[x]| & x<۲ \end{cases}$$

۱) $f(-۱/۵)=$　　۳) $f(-۴)=$　　۵) $f(۱/۸)=$

۲) $f(\sqrt{۲})=$　　۴) $f(۳)=$

تمرین : درتابع زیر، اگر $f(۲)=۲$ و $f(-۲)=۰$ باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{ax}{x-۱} & x>۱ \\ x+b & x\leq ۱ \end{cases}$$

تمرین: در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که $f(f(۲))=۵$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۷ & x>۱ \\ ax^۲-۴x & x\leq ۱ \end{cases}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^۲-۱$ یک تابع حقیقی باشد، تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $f(\sqrt{۵})=$ 　　 ج) $f(۲x-۱)=$ 　　 هـ) $f(f(x))=$

ب) $f(۳k)=$ 　　 د) $f(x+\Delta x)=$

تمرین: اگر $f(x)=۲^x$ نشان دهید که: $\dfrac{f(x+۳)}{f(x-۱)}=f(۴)$

***

روش تشخیص تابع بودن یک معادله

طبق تعریف تابع واضح است که اگر f یک تابع بوده و $(a,b)\in f$ و $(a,c)\in f$ آنگاه $b=c$ می باشد.

این نتیجه برای تشخیص تابع بودن یک معادله بکار می رود.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f\\(a,c)\in f\end{array}\right\}\to b=c}$$

***

توجه : در هر یک از تساوی های زیر نمی توان نتیجه گرفت $b=c$

الف) $b^۲=c^۲ \nrightarrow b=c$ 　　 ب) $|b|=|c| \nrightarrow b=c$ 　　 ج) $[b]=[c] \nrightarrow b=c$

تمرین : کدام یک از معادلات زیر، تابع است.

الف) $y=x^۲+۱$ 　　 ج) $x^۲+y^۲=۱$

ب) $y=x^۳-۲$ 　　 د) $y=x^۲+۲x$

حل:

الف:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f\to b=a^۲+۱\\(a,c)\in f\to c=a^۲+۱\end{array}\right\}\to b=c$$

معادله ی $y=x^۲+۱$، تابع است.

ب:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f\rightarrow b=a^{3}-2\\(a,c)\in f\rightarrow c=a^{3}-2\end{array}\right\}\rightarrow b=c$$

معادله ی $y=x^{3}-2$ ، تابع است.

ج:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f\rightarrow a^{2}+b^{2}=1\\(a,c)\in f\rightarrow a^{2}+c^{2}=1\end{array}\right\}\rightarrow a^{2}+b^{2}=a^{2}+c^{2}\rightarrow b^{2}=c^{2}\nrightarrow b=c$$

معادله ی $x^{2}+y^{2}=1$، تابع نیست.

د:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f\rightarrow b=a^{2}+2a\\(a,c)\in f\rightarrow c=a^{2}+2a\end{array}\right\}\rightarrow b=c$$

معادله ی $y=x^{2}+2x$ ، تابع است.

***

تمرین برای حل : کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند.

۱) $x=|y|+3$

۲) $1+\sqrt{y}=x$

۳) $y=|x|-1$

۴) $[y+1]=x^{2}$

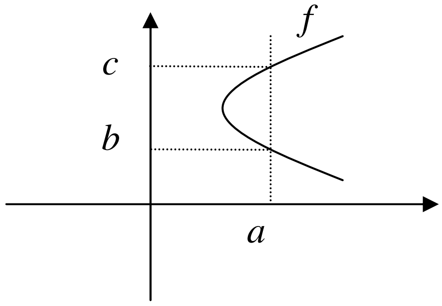
۵) $y=\dfrac{3x-1}{x+5}$

۶) $y=x^{2}+2x$

۷) $y^{3}+3y^{2}+3y+x^{3}+x=5$

***

نتیجه : یک نمودار مربوط به یک تابع است هرگاه هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، در غیر این صورت نمودار مربوط به یک تابع نمی باشد. برای مثال نمودار داده شده در شکل مقابل یک تابع را مشخص نمی کند.

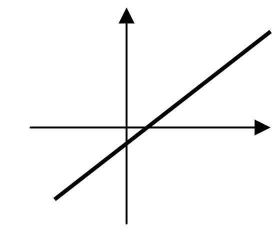


$(a,b)\in f,(a,c)\in f\nrightarrow b=c$

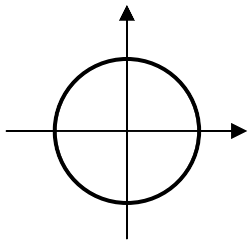
این نتیجه که به **آزمون خط قائم** موسوم است برای تشخیص تابع بودن یک نمودار بکار می رود.

***

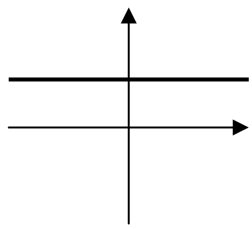
تمرین: تعیین کنیدکه کدام نمودار مربوط به یک تابع است.



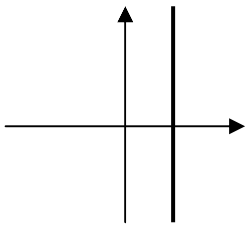
(الف)



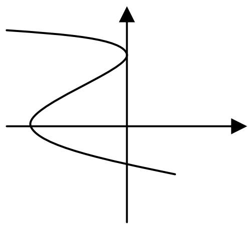
(ب)



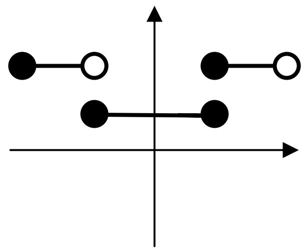
(ج)



(د)



(هـ)

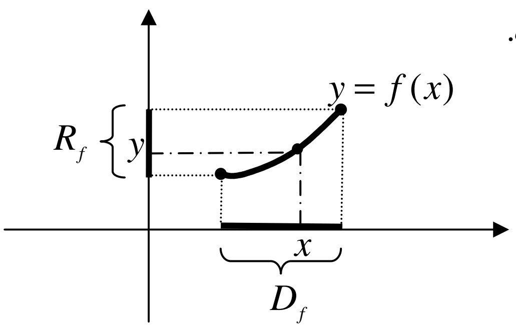


(و)

***

نمودار تابع

نمودار تابع مجموعه ی نقاط نظیر زوج های مرتب (x, y) از آن تابع است.

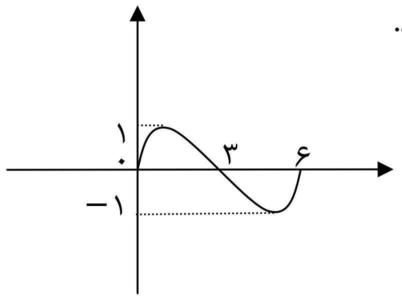


نتیجه: تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها، برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر

$D_f = \{x \in R \mid (x, y) \in f\}$ دامنه

$R_f = \{y \in R \mid (x, y) \in f\}$ برد

تمرین: دامنه و برد تابع با نمودار زیر را مشخص کنید.



تمرین: نمودار توابع زیر را در مجموعه ی اعداد حقیقی رسم کنید و دامنه و برد آنها را تعیین کنید.

الف) $y=2x+1$ ب) $y=x^2+6x-1$ د) $y=-|2x-6|+1$

تذکر: برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای کافی است که نمودار هر ضابطه را به طور مجزا رسم کرده و روی هرکدام از نمـودار ها قسمت هایی را که در دامنه شان است،پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.

تمرین: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>1\\ x^2 & -1\le x\le 1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱: نمودار تابع قدر مطلق را رسم کنید.

۲: نمودار تابع علامت را رسم کنید.

۳: نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}\qquad 2)\ g(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$

۴ : نمودار تابع $f(x)=x.\text{sgn}(x-1)$ را رسم کنید.

***

تساوی دو تابع

تعریف: دو تابع مانند g و f را مساوی گویند، هرگاه:

الف) دامنه ی آنها مساوی باشد.($D_f=D_g$)

ب) به ازاء هر عضو دامنه مقادیر یکسان داشته باشند. ($\forall x \in D \to f(x) = g(x)$)

تمرین: کدام مورد دو تابع مساوی را نشان می دهد.

الف) $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$

ب) $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x|x|$

ج) $f(x) = \sqrt{x^۲}$ و $g(x) = |x|$

حل :

الف :

تابع f چند جمله ای است. $\to D_f = R$

تابع g کسری است. $\to D_g = R - \{۱\}$

$\Rightarrow D_f \neq D_g$

لذا دو تابع مساوی نیستند.

ب:

$D_f = D_g = R$

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱) = (-۱)^۲ = ۱ \\ g(-۱) = -۱|-۱| = -۱(۱) = -۱ \end{array}\right\} \to f(x) \neq g(x)$$

لذا دو تابع مساوی نیستند.

ج:

$D_f = D_g = R$

$f(x) = \sqrt{x^۲} = |x| = g(x)$

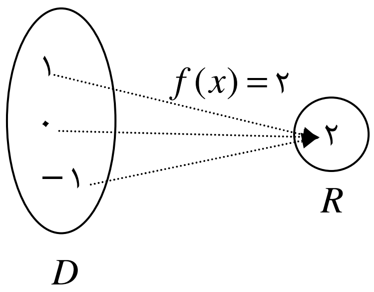
لذا دو تابع مساوی هستند.

نتیجه : دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در تمام نقاط یکسان باشند و برعکس

❇❇❇

معرفی چند تابع خاص

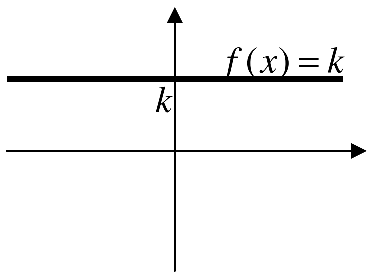
الف : تابع ثابت



تعریف: یک تابع را ثابت گویند، هرگاه برد آن فقط یک عضو داشته باشد. مانند:

$$f=\{(۱,۲),(۰,۲),(-۱,۲)\}$$

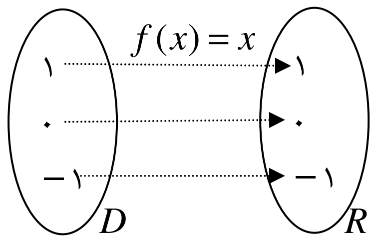
نتیجه: نمودار هر تابع ثابت در اعداد حقیقی، خطی است که با محور طول ها موازی می باشد.



معادله ی تابع ثابت $f(x)=k$

❋❋❋

ب : تابع همانی



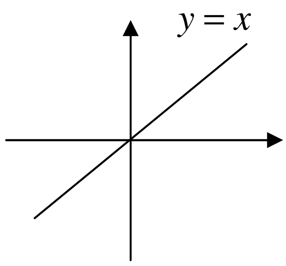
تعریف: یک تابع را همانی گویند، هرگاه هر عضو دامنه را به همان عضو از برد نظیر کند. مانند:

$$f=\{(۱,۱),(۰,۰),(-۱,-۱)\}$$

نتیجه:

۱- طبق تعریف دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. $D_f=R_f$

۲- نمودار تابع همانی در اعداد حقیقی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



معادله ی تابع همانی $I(x)=x$

❋❋❋

ج : تابع قدر مطلق

هر تابع به شکل زیر را یک تابع قدر مطلق گویند.

$$f(x) = |P(x)| = \begin{cases} P(x) & P(x) \geq ۰ \\ -P(x) & P(x) < ۰ \end{cases}$$

تمرین : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $|۳/۵| =$

۲) $|-\sqrt{۵}| =$

۳) $|\sqrt{۵} - \sqrt{۷}| =$

۴) $|۳ - \sqrt{۸}| =$

تمرین : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

۱) $y = ۲|x - ۳| + ۱$

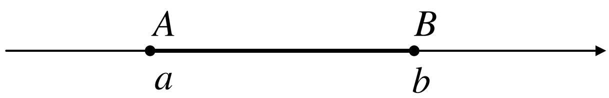
۲) $y = -|x + ۱| - ۵$

تمرین برای حل : نمودار توابع $y = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

***

ویژگی های قدر مطلق

اگر b و a دو عدد حقیقی باشند. با نگاهی دیگر می توان گفت ، طول پاره خطی که دو سر آن نقاط متناظر با اعداد b و a باشند برابر $|b - a|$ است.



با این دیدگاه می توان خواص زیر را برای قدر مطلق نام برد.

۱) هر دو عدد قرینه قدر مطلق های مساوی دارند. $|-a| = |a|$

نتیجه : $|P(x)| = |Q(x)| \to P(x) = \pm Q(x)$

۲) قدر مطلق صفر برابر صفر است. $|a| = ۰ \leftrightarrow a = ۰$

۳) $\sqrt{a^۲} = |a|$

۴) $|a^۲| = |a|^۲ = a^۲$

۵) اگر $k > ۰$ آنگاه $|a| < k \leftrightarrow -k < a < k$

۶) اگر $k > ۰$ آنگاه $|a| > k \leftrightarrow a > k$ یا $a < -k$

۷) $|a.b|=|a|.|b|$

۸) $b\neq ۰$ و $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

۹) $|a-b|=|b-a|$

۱۰) نامساوی مثلثی $|a+b|\leq|a|+|b|$

تمرین: نامعادله های زیر را به کمک ویژگی های قدر مطلق حل کنید.

۱) $|۲x-۳|<۶$ ۲) $|۲x-۶|>۴$

تمرین: معادله ی زیر را حل کنید.

$$|۲x-۱|=|x|$$

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=|x+۲|+|x-۲|$ ۲) $y=|x+۲|-|x-۲|$

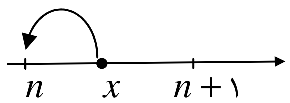
❋❋❋

د : تابع جزء صحیح

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه جزء صحیح x که با علامت $[x]$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنند.

اگر x عدد صحیح باشد،آنگاه جزء صحیح x برابر x است.

اگر x عدد صحیح نباشد،آنگاه جزء صحیح x برابر عدد صحیح کوچکتر از x است.



نتیجه :

۱. جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

$$[x]=n\leftrightarrow n\leq x<n+۱$$

تمرین: تساوی های زیررا کامل کنید.

۱. $[۲/۳]=$ **۲.** $[-۵]=$ **۳.** $[-۵/۷]=$ **۴.** $[\frac{۵}{۷}]=$ **۵.** $[-\sqrt{۲}]=$

نتیجه: اگر k یک عدد صحیح و x عدد حقیقی باشد، در این صورت تساوی زیر همواره برقرار است. $[x+k]=[x]+k$

تمرین: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $[x+۱]+[x+۲]=۵$ ‏ ‏ ‏ ۲) $[x+۱]+[x-۲]=۴$ ‏ ‏ ‏ ۳) $[x-[x]]+[x+۲]=۵$

حل۲:

$$[x+۱]+[x-۲]=۴ \to [x]+۱+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۵ \to [x]=\frac{۵}{۲}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

تمرین: معادله ی $۲^{[x]+[x-۲]}=۱۶$ را حل کنید.

$$۲^{[x]+[x-۲]}=۲^۴ \to [x]+[x-۲]=۴$$
$$\to [x]+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۶ \to [x]=۳ \to ۳\le x<۴$$

تمرین برای حل :

۱: دامنه و برد تابع $f(x)=|[x]|$ را بیابید.

۲: اگر $[x]=۷$ باشد، مقادیر $[\frac{۱+x}{۲}]$ را بیابید.

***

برای رسم نمودار تابع جزء صحیح دو روش وجود دارد.

در **روش اول** در یک فاصله ی معین بازه هایی به شکل $[a,b)$ را طوری انتخاب می کنیم که جزء صحیح اعداد هر یک ، عدد صحیح مشخصی باشد.

تمرین: نمودار توابع زیر را در فاصله ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

۱. $y=[x-۱]$ ‏ ‏ ۴. $y=x-[x]$ ‏ ‏ ۷. $y=|[x]|$

۲. $y=[۲x]$ ‏ ‏ ۵. $y=x+[x]$

۳. $y=[\frac{۱}{۲}x]$ ‏ ‏ ۶. $y=۲[x]-۱$

در **روش دوم** ابتدا نمودار تابع $y=P(x)$ را رسم نموده و سپس جزء صحیح عرض نقاط نمودار را تعیین می کنیم.

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱. $y=[۲x]$ ‏ ‏ ۲. $y=[x^۲]$ ‏ ‏ ۳. $y=[\sin x]$

تمرین: نمودار تابع $y=[x]+[-x]$ را رسم کنید.

نتیجه: برای هر عدد حقیقی x داریم:

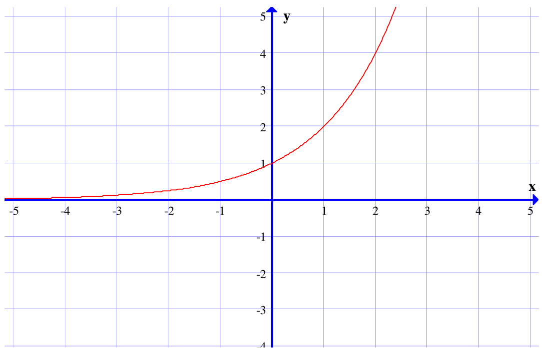
$$IF\ \ x\in Z \to [x]+[-x]=۰$$
$$IF\ \ x\notin Z \to [x]+[-x]=-۱$$

***

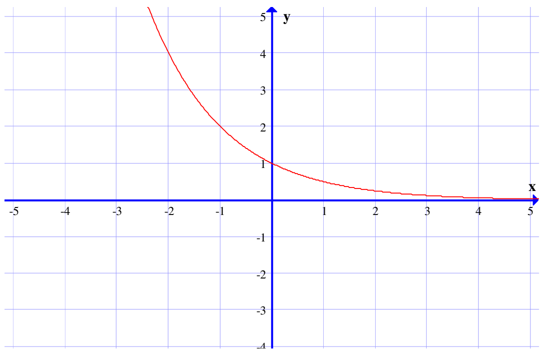
۵ : تابع نمایی

هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، را یک تابع نمایی می نامند.

اگر $a>۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی است.



همچنین اگر $۰<a<۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی می باشد.



اگر پایه ی تابع نمایی عدد نپرین $(e=۲/۷۱)$ باشد. تابع ، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

تمرین برای حل : دامنه و برد تابع نمایی را بنویسید.

خواص تابع نمایی :

با توجه به تابع نمایی ، روابط زیر را به راحتی می توان ثابت کرد.

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^{\circ}=۱ \\ a\neq ۰ \end{cases}$$

۲ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}} \\ a\neq ۰ \end{cases}$$

۳ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج باشد، باید $a\geq ۰$ باشد.

۴ : توان توان

$$(a^{m})^{n}=a^{m.n}$$

۵ : ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

۶ : تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$$

۷ : هر گاه دو عدد تواندار مساوی،پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^{m}=a^{n}\rightarrow m=n \\ a\neq ۰,۱,-۱ \end{cases}$$

❋❋❋

۶ : تابع لگاریتمی

لگاریتم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت و مخالف یک a ، عددی مانند x است که اگر a به توان x برسد، حاصل برابر b می شود.

$$\log_a^b = x \leftrightarrow a^x = b$$
$$\begin{cases} a,b > ۰ \\ a \neq ۱ \end{cases}$$

برای مثال: $$۲^۳ = ۸ \to \log_۲^۸ = ۳$$

تمرین : مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_۷^{۴۹} = ۲x - ۱$$

حل:

$$\log_۷^{۴۹} = ۲x - ۱ \to ۷^{۲x-۱} = ۴۹ \to ۷^{۲x-۱} = ۷^۲ \to ۲x - ۱ = ۲ \to ۲x = ۳ \to x = \frac{۳}{۲}$$

نتیجه:

۱ : لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases} \log_a^a = ۱ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

۲ : لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases} \log_a^۱ = ۰ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

تمرین : نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_۶^۴ + \log_۶^۹ = ۲$$

حل: قرار می دهیم $\log_۶^۴ = x$ و $\log_۶^۹ = y$ و نشان می دهیم که $x + y = ۲$

$$\left.\begin{matrix} \log_۶^۴ = x \to ۶^x = ۴ \\ \log_۶^۹ = y \to ۶^y = ۹ \end{matrix}\right\} \to ۶^x \times ۶^y = ۴ \times ۹ \to ۶^{x+y} = ۳۶ \to ۶^{x+y} = ۶^۲ \to x + y = ۲$$

***

تذکر۱ : لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_{a}^{۰} = \text{نامعین}$$

تذکر ۲ : لگاریتم، روی اعداد منفی ، تعریف نمی شود.

تذکر ۳ : اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را ***لگاریتم اعشاری*** می نامند. معمولاً در لگاریتم اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{۱۰}^{a} = \log a$$

تذکر ۴ : . اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین $(e = ۲/۷۱)$ باشد، لگاریتم را ***لگاریتم طبیعی*** می نامند. معمولاً مبنای e نوشته نمی شود. حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود، $\log$ را به صورت L_e می نویسند.

$$\log_{e}^{a} = L_n\, a$$

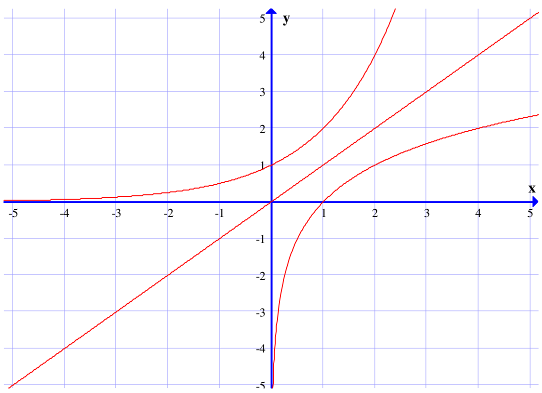
واضح است که :

$$L_n\, e = \log_{e}^{e} = ۱ \qquad \text{و} \qquad L_n\, ۱ = \log_{e}^{۱} = ۰$$

***

هر تابع به صورت $f(x) = \log_{a}^{x}$ را یک تابع لگاریتمی در مبنای a می نامند به شرط اینکه در آن x و a دو عدد مثبت بوده و a مخالف یک باشد.

واضح است که نمودار هر تابع لگاریتمی، قرینه ی تابع یک تابع نمایی متناظر آن، نسبت به خط $y = x$ می باشد. در زیر نمودار دو تابع $y = ۲^{x}$ و $y = \log_{۲}^{x}$ رسم شده است.



روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را می توان به راحتی ثابت کرد.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_{x}^{a} + \log_{x}^{b} = \log_{x}^{ab}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

۳: لگاریتم عدد توان‌دار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

۴: لگاریتم مبنای توان‌دار

$$\log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

۵ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

۶ : دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_x^a = \log_x^b \rightarrow a = b$$

***

تمرین برای حل :

۱ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\log_{\sqrt{۳}}^{۸۱}$ ب) $\log^{۲۵} + \log^{۴}$ ج) $\log_{۴}^{۳} \times \log_{۳}^{۱۶}$

۲ : اگر $f(x) = \log^x$ نشان دهید که $\frac{f(x+۲) - f(x)}{۲} = \log\sqrt{\frac{x+۲}{x}}$

۳ : دامنه ی تابع $f(x) = \log^{۲x-۱}$ را به دست آورید.

۴: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۲}^{x} = ۸$ ب) $\log_{۲}^{x-۱} + \log_{۲}^{x+۱} = \log_{۲}^{۳۵}$ ج) $\log_{۳}^{۳-x} + \log_{۳}^{۱-x} = \log_{۳}^{۷۰} - \log_{۳}^{۲}$

د) $(L_n x - ۲)(L_n x + ۵) = ۰$

***

روش های تعیین دامنه ی بعضی از توابع حقیقی

بزرگترین مجموعه ای که یک تابع به ازاء تمام اعضای آن معین باشد را دامنه می نامند، در این صورت:

۱- دامنه ی هر تابع چند جمله ای مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots \Rightarrow D_f=R$$

تمرین: دامنه ی تابع به معادله ی $f(x)=x^3-2x+5$ را تعیین کنید.

۲- دامنه ی هر تابع کسری مجموعه ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج آن است.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D_f=\{x\in R \mid q(x)\neq 0\}$$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\frac{3x}{8-2x}$ ب) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x}$ ج) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4}$

د) $f(x)=\frac{x+1}{[x]-2}$ هـ) $f(x)=\frac{x+1}{[x]-x}$

۳- دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) مجموعه ی اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

$$f(x)=\sqrt[2k]{p(x)}, k\in N \Rightarrow D_f=\{x\in R \mid p(x)\geq 0\}$$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-3x}$ ب) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ج) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2-x}{x^2-9x+20}}$

د) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x-6}}$ هـ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2x-6}$

۴- دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی فرد با دامنه ی عبارت زیر رادیکال آن برابر است.

$$f(x)=\sqrt[2k+1]{p(x)}, k\in N \Rightarrow D_f=D_p$$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}-۳x}$ 　　　　 ب) $g(x)=\sqrt[۵]{\frac{-۳x}{۱-۲x}}$

۵- دامنه ی هر تابع لگاریتمی مجموعه ی اعداد حقیقی است که به ازای آنها شرایط زیر برقرار باشند.

$$f(x)=\log_{q(x)}^{p(x)} \Rightarrow \begin{cases} p(x)>۰ \\ q(x)>۰ \\ q(x)\neq ۱ \end{cases}$$

شرایط مبنا

$$D_f=\{x\in R \mid p(x)>۰, q(x)>۰, q(x)\neq ۰\}$$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $f(x)=\log_{۱+x}^{۳x-۴}$ 　　　 ب) $f(x)=\log^{۱-x}$ 　　　 ج) $f(x)=\log^{x^{۲}+x}$

***

۶- دامنه ی توابع مثلثاتی

الف) دامنه ی توابع سینوس وکسینوس با دامنه ی زاویه ی آنها برابر است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin P(x) \\ f(x)=\cos P(x) \end{array}\right\} \rightarrow D_f=D_P$$

ب) دامنه ی توابع تانژانت و کتانژانت مجموعه ی مقادیری از دامنه ی زاویه ی آنها است بطوری که اگر به سینوس وکسینوس تبدیل شوند مخر ج کسر صفر نشود.

$$f(x)=\tan P(x)=\frac{\sin P(x)}{\cos P(x)} \rightarrow D_f=\{x\in D_P \mid \cos P(x)\neq ۰\}=D_P-\{x \mid \cos P(x)=۰\}$$

$$f(x)=\cot P(x)=\frac{\cos P(x)}{\sin P(x)} \rightarrow D_f=\{x\in D_P \mid \sin P(x)\neq ۰\}=D_P-\{x \mid \sin P(x)=۰\}$$

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد. در این صورت :

۱) $\sin P(x)=۰ \rightarrow P(x)=k\pi$ 　　　 ۲) $\cos P(x)=۰ \rightarrow P(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\sin(۳x^{۲}-۵x+۱)$

ب) $f(x)=\cos\dfrac{۵x}{x^{۲}-۶x+۹}$

ج) $f(x)=\sin\sqrt{x-۱}$

د) $f(x)=\cos\sqrt{x-x^{۲}}$

هـ) $f(x)=\tan x$

و) $f(x)=\cot(۲x+\dfrac{\pi}{۴})$

***

تمرین:

۱- دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۹}$

ب) $f(x)=۱+\sin x$

ج) $f(x)=x-[x]$

د) $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$

حل:

الف) دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج مجموعه ی مقادیری است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

$x^{۲}-۹\geq ۰$

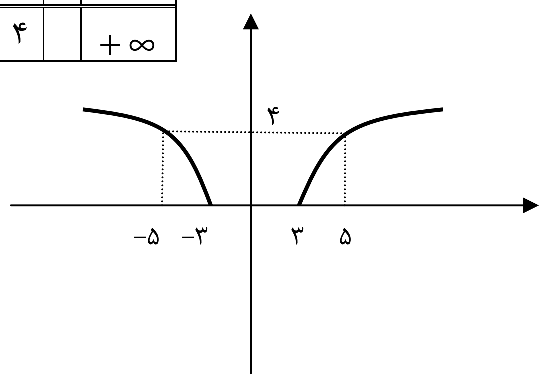
معادله ی هم ارز $\rightarrow x^{۲}-۹=۰\rightarrow x=۳, x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^{۲}-۹$		+	۰	-	۰	+	

$D_f=(-\infty,۳]\cup[۳,+\infty)$

حال برای تعیین برد تابع کافی است نمودار تابع را در دامنه اش رسم کنیم.

x	$-\infty$		-۵	-۳		۳	۵		$+\infty$
y	$+\infty$		۴	۰		۰	۴		$+\infty$



$R_f=[۰,+\infty)$

ب) واضح است که $D_f = R$

از طرفی

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \xrightarrow{+۱} ۰ \le ۱ + \sin x \le ۲ \rightarrow ۰ \le y \le ۲$$
$$R_f = [۰,۲]$$

توجه داشته باشید که به کمک رسم نمودار تابع $y = ۱ + \sin x$ دامنه و برد آن را نیز می توان مشخص کرد.

....

ج) واضح است که $D_f = R$

حال فرض کنیم که $[x] = k$ پس:

$$k \le x < k + ۱ \xrightarrow{-k} ۰ \le x - [x] < ۱ \rightarrow ۰ \le y < ۱ \Rightarrow R_f = [۰,۱)$$

....

د) با توجه به نکته ی زیر واضح است که

$$[x] + [-x] \ge ۰ \rightarrow \begin{cases} [x] + [-x] = ۰ \rightarrow x \in Z \\ [x] + [-x] > ۰ \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$
$$D_f = Z$$
$$Rf = \{۰\}$$

۲- دامنه ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \dfrac{۳}{[x] + [-x]}$ ج) $f(x) = \sqrt{\dfrac{۵}{[x] + [-x]}}$ هـ) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x - ۱}}$

ب) $f(x) = \dfrac{\sqrt{۱۶ - x^۲}}{[x] - ۳}$ د) $f(x) = \sqrt[۳]{x - \sqrt{۲x - ۱}}$ و) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{۲x - ۱}}$

۳- دامنه ی توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۲۵}$ ۳) $f(x) = \sqrt{[x] - ۲}$ ۵) $f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۲ - x}}$

۲) $f(x) = \dfrac{\sqrt{۴ - x^۲}}{|x| - ۱}$ ۴) $f(x) = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - [x]}}$

حل۲)

$$\begin{cases} ۴-x^{۲}\geq ۰\rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \\ |x|-۱=۰\rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$$

$$\therefore D_f=[-۲,-۱)\bigcup(-۱,۱)\bigcup(۱,۲]$$

حل۳)

$$[x]-۲\geq ۰\rightarrow [x]\geq ۲\rightarrow x\geq ۲$$

$$\therefore D_f=[۲,+\infty)$$

۴- هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{|x|}$ ب) $f(x)=\sqrt{|x-۲|}$ ج) $f(x)=|x+۱|+|x-۱|$

حل: الف)

$$x\neq ۰\rightarrow D_f=R-\{۰\}$$

$$\begin{cases} x>۰\rightarrow |x|=x\rightarrow \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{x}=۲ \\ x<۰\rightarrow |x|=-x\rightarrow \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{-x}=-۲ \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۲ & x<۰ \end{cases}$$

ب) بدیهی است که $|x-۲|\geq ۰$

$$\begin{cases} x\geq ۲\rightarrow x-۲\geq ۰\rightarrow |x-۲|=x-۲ \\ x<۲\rightarrow x-۲<۰\rightarrow |x-۲|=-(x-۲) \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۲} & x\geq ۲ \\ \sqrt{-(x-۲)} & x<۲ \end{cases}$$

ج)

$$D_f=R$$

$$x+۱=۰\rightarrow x=-۱$$

$$x-۱=۰\rightarrow x=۱$$

$$\begin{cases} x<-۱\rightarrow h(x)=|x+۱|+|x-۱|=-(x+۱)+[-(x-۱)]=-x-۱-x+۱=-۲x \\ -۱\leq x\leq ۱\rightarrow h(x)=|x+۱|+|x-۱|=(x+۱)+[-(x-۱)]=x+۱-x+۱=۲ \\ x>۱\rightarrow h(x)=|x+۱|+|x-۱|=(x+۱)+(x-۱)=x+۱+x-۱=۲x \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۲ & -۱\le x\le ۱ \\ -۲x & x<-۱ \end{cases}$$

....

۵- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۳}{x+|x|} \qquad ۲)\ f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{[x]+[-x]+۱} \qquad ۳)\ f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{[x]+[-x]}$$

حل)

۱)

$x+|x|=۰ \rightarrow x\le ۰$

$\therefore D_f=R^{>۰}$

....

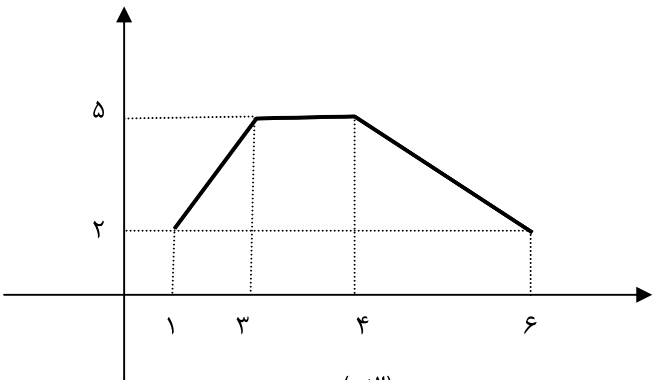
۲)

$۹-x^{۲}\ge ۰\rightarrow$ تشکیل معادله ی هم ارز وتعیین علامت $\rightarrow -۳\le x\le ۳$

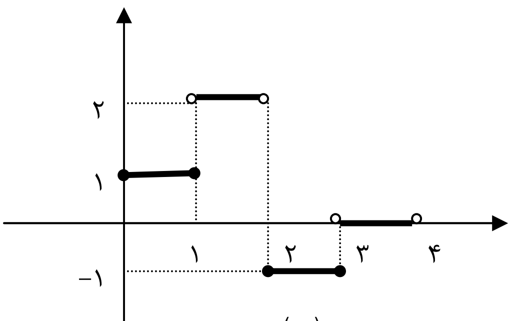
$[x]+[-x]+۱\ne ۰\rightarrow [x]+[-x]\ne -۱\rightarrow x\in Z$

$\therefore D_f=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

۶- دامنه و برد توابع زیر را تعیین نموده و سپس ضابطه ی آنها را بنویسید.



(الف)



(ب)

***

اعمال روی توابع

اگر g و f دو تابع بوده r یک عدد حقیقی باشد،در این صورت اعمال روی این دو تابع را به ازای هر $x \in D_f \cap D_g$ می توان به شکل زیر تعریف کرد.

ردیف	عمل	تعریف	دامنه تابع حاصل
۱	جمع دو تابع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f \cap D_g$
۲	تفاضل دو تابع	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f \cap D_g$
۳	ضرب دو تابع	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f \cap D_g$
۴	ضرب عدد در تابع	$(r.f)(x)=r.f(x)$	$D_{r.f}=D_f$
۵	توان یک تابع	$(f^{۲})(x)=f(x).f(x)$	$D_{f^{۲}}=D_f$
۶	ریشه ی دوم تابع	$(\sqrt{f})(x)=\sqrt{f(x)}$	$D_{\sqrt{f}}=D_f-\{x \mid f(x)<۰\}$
۷	تقسیم دو تابع	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$

تمرین : اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$ ابتدا دامنه ی تابع $f+g$ را نوشته و سپس آن را به صورت زوج های مرتب بنویسید.

تمرین برای حل : اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

هر یک از توابع زیر را پس از تعیین دامنه ی آنها ، بنویسید.

۱) $f-g$ ۳) $\frac{f}{g}$ ۵) $\sqrt{f}$

۲) $f.g$ ۴) $f^{۲}$

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{۱۶-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{۶-۲x}$ مطلوب است تعیین D_{f+g}

تمرین: اگر $f(x)=x^{۲}+۳x$ و $g(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$ باشد،عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(g-f)(۱)$ د) $(۲f-۳g)(۲)$

نتیجه: اگر تابعی بصورت مجموع ، تفاضل یا ضربی از دو یا چند تابع دیگر باشد،دامنه ی آن با اشتراک دامنه های آن توابع برابر است.

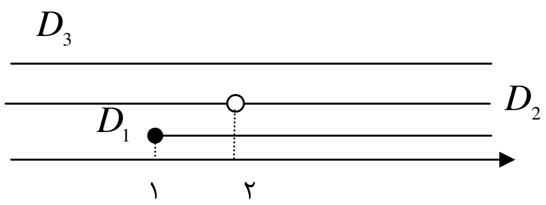
تمرین: در هر مورد دامنه ی تابع داده شده را بدست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۱}+\frac{۱}{x-۲}+۵x^{۲}-۳$ ب) $f(x)=\sin\frac{۱}{x-۴}+\sqrt{\frac{۳}{[x]-۲}}$

....

حل الف)

$$f_{۱}(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_{۱}=\{x\in R \mid x\geq ۱\}$$
$$f_{۲}(x)=\frac{۱}{x-۲}\rightarrow D_{۲}=\{x\in R \mid x\neq ۲\}$$
$$f_{۳}(x)=۵x^{۲}-۳\rightarrow D_{۳}=R$$
$$\therefore D_{f}=D_{۱}\cap D_{۲}\cap D_{۳}=[۱,۲)\cup(۲,+\infty)$$



حل ب)

$$f_{۱}(x)=\sin\frac{۱}{x-۴}\rightarrow D_{۱}=R-\{۴\}$$
$$f_{۲}(x)=\sqrt{\frac{۳}{[x]-۲}}\xrightarrow{[x]-۲>۰\rightarrow[x]>۲\rightarrow x\geq ۳}D_{۲}=[۳,+\infty)$$
$$\therefore D_{f}=D_{۱}\cap D_{۲}=[۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$

....

تمرین: دامنه ی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}+\sqrt{x^{۲}+x}$ ۲) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}+\sqrt{x^{۲}+۲x-۳}$

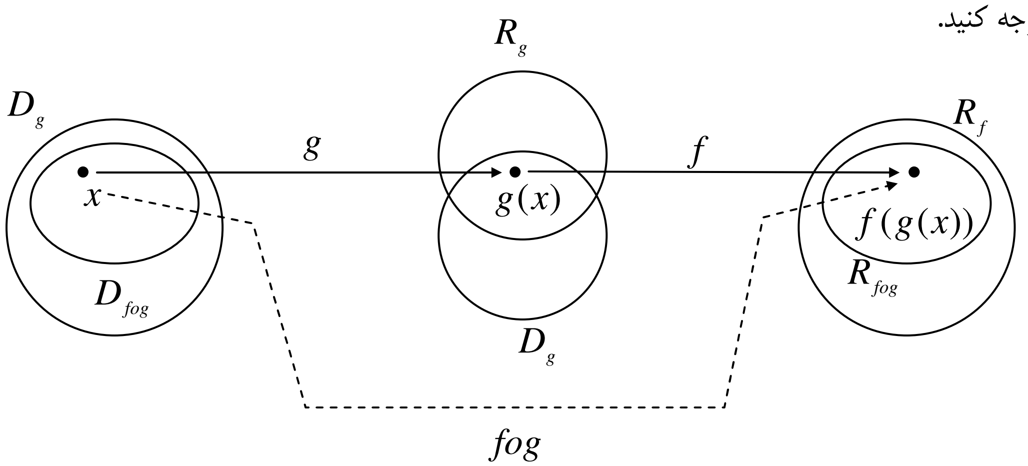
***

ترکیب توابع

هرگاه g و f دو تابع حقیقی باشند، در این صورت ترکیب تابع g در f که به صورت fog نمایش داده می شـود را بـه صـورت زیر تعریف می کنند.

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



دامنه ی تابع مرکب fog با توجه به نمودار فوق بشکل زیر مشخص می شود.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

***

تمرین: اگر $f = \{(۱,-۱),(۲,۵),(۴,۰)\}$ و $g = \{(۱,۱),(۲,۴),(۰,۶)\}$

الف) دامنه ی تابع fog را بدست آورید.

ب)تابع fog را مشخص کنید.

تمرین: اگر $g(x) = x^۲ - ۴x$ و $f(x) = ۲x - ۱$ باشد. توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

نتیجه: با توجه به تمرین فوق و با در نظر گرفتن تعریف دو تابع مساوی واضـح اسـت کـه در حالـت کلـی ترکیـب دو تـابع خاصـیت جابجایی ندارد. یعنی $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

تمرین:اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = ۲x + ۳$ باشد. مطلوبست محاسبه ی

ب) $(fof)(x)$ الف) $(fog)(۴)$

تمرین:اگر $n(x)=\sqrt{x-1}$ و $m(x)=x-2$ ابتدا دامنه ی تابع mon را تعیین نموده و سپس معادله ی آنرا بدست آورید.

تمرین: توابع $g(x)=2x-3$ و $f(x)=\sqrt{x+1}$ داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف) $(gof)(x)$ ب) D_{fog}

تمرین: اگر $f(x)=2x-1$ و $(fog)(x)=6x+9$ باشد. معادله ی تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

تمرین:اگر $f(x)=x^2-1$ و $(fog)(x)=x^2-4x+2$ باشد. معادله ی تابع $g(x)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $g(x)=5x-1$ و $(fog)(x)=10x+1$ معادله ی تابع $f(x)$ را بیابید.

تمرین: توابع زیر را به صورت ترکیبی از دو تابع دیگر بنویسید.

الف) $f(x)=3\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ ب) $g(x)=\dfrac{1}{x}.\sin(\dfrac{x+1}{x})$ ج) $h(x)=x^6+x^3$

تمرین: اگر $g(x)=2x^2-x+1$ و $f(x)=x+3$. مقدار m را طوری تعیین کنید که

$$(fog)(m)=(gof)(m)$$

حل:

$$(fog)(m)=f(g(m))=f(2m^2-m+1)=2m^2-m+4$$
$$(gof)(m)=g(f(m))=g(m+3)=2(m+3)^2-(m+3)+1=2m^2+11m+16$$
$$\therefore 2m^2-m+4=2m^2+11m+16\rightarrow m=-1$$

توجه: ترکیب هر تابع با تابع همانی برابر همان تابع است.

***

تابع زوج

تعریف: تابع f را زوج گویند، هرگاه

الف) دامنه ی آن متقارن باشد. یعنی ($\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$)

ب) به ازاء هر x عضو دامنه داشته باشیم $f(-x) = f(x)$.

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x) = x^{۲} + \cos x$ زوج است.

حل :

اولاً: $D_f = R$ پس دامنه ی تابع متقارن است

ثانیاً: $f(-x) = (-x)^{۲} + \cos(-x) = x^{۲} + \cos x = f(x)$

توجه: $\cos(-x) = \cos x \quad , \quad \sin(-x) = -\sin x$

***

تابع فرد

تعریف: تابع f را فرد گویند، هرگاه

الف) دامنه ی آن متقارن باشد. یعنی ($\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$)

ب) به ازاء هر x عضو دامنه داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$.

تمرین : نشان دهید که تابع $f(x) = x - \sin x$ فرد است .

حل :

اولاً: $D_f = R$ پس دامنه ی تابع متقارن است

ثانیاً: $f(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x + \sin x = -(x - \sin x) = -f(x)$

....

تمرین : زوج یا فرد بودن تابع های زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{۴ - x^{۲}}$ ۲) $f(x) = ۳ + \sqrt{x - ۱}$ ۳) $f(x) = x + \sqrt{x^{۲} - ۱}$

تمرین برای حل: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=|x|+\sin x$

۲) $f(x)=۲x^{۳}+\frac{۱}{x}+۱$

۳) $f(x)=۱+\sin(\cos x)$

۴) $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۹}$

۵) $f(x)=۲\sqrt{x-۱}$

۶) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲۵-x^{۲}}}$

۷) $f(x)=\frac{x^{۳}}{\sqrt{۲۵-x^{۲}}}$

تمرین: ثابت کنید که اگر f تابعی هم زوج و هم فرد باشد،آنگاه $f(x)=۰$.

حل:

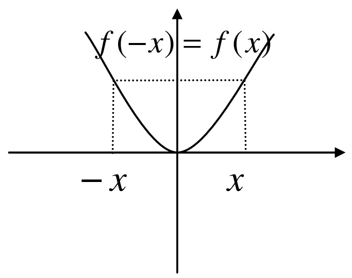
تابع f زوج است، پس $f(x)=f(-x)$

تابع f فرد است ، پس $f(x)=-f(-x)$

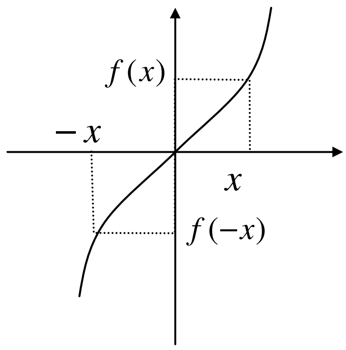
پس با جمع طرفین این تساوی ها داریم:

$$\Rightarrow f(x)+f(x)=f(-x)+(-f(-x))\Rightarrow ۲f(x)=f(-x)-f(-x)\Rightarrow ۲f(x)=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

نتیجه:



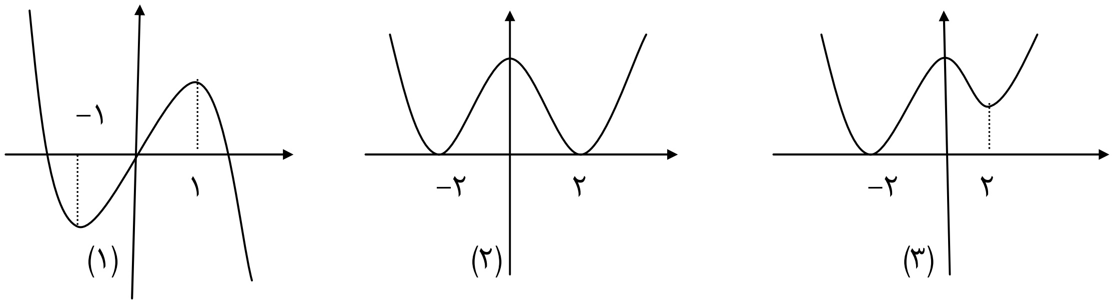
۱: نمودار هر تابع زوج نسبت به محور عرض ها متقارن است.

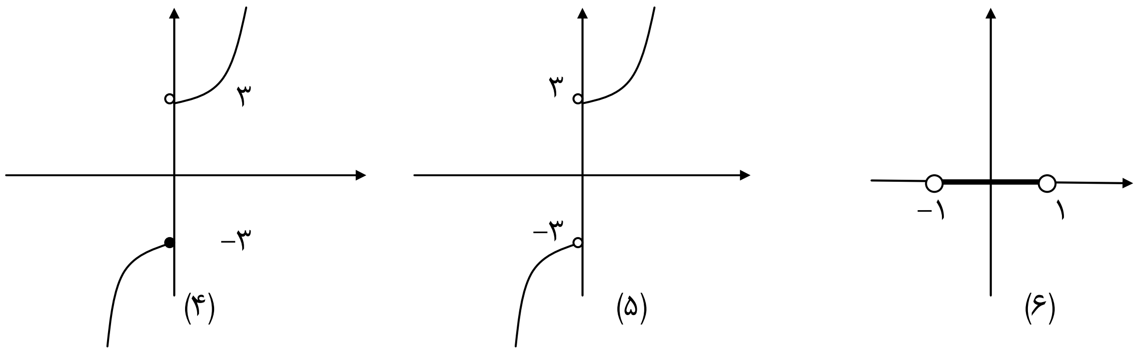


۲: نمودار هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۳ : تابع ثابت زوج و تابع همانی فرد است.

تمرین: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.





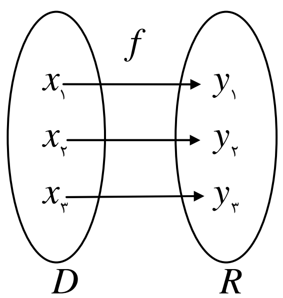
***

تمرین: با رسم نمودار، زوج یا فرد بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -(x^{۲}+۱) & x<۰ \end{cases}$$

***

تابع یک به یک



یک تابع مانند f را یک به یک می نامند،هرگاه به ازاء هرعضو از بـردش یـک وفقـط یـک عـضو از دامنه اش وجود داشته باشد.

برای مثال تابع $f=\{(۱,۲),(۰,۳),(۴,۷),(-۱,۵)\}$ یک به یک است ولی تابع $g=\{(۱,۲),(۰,۳),(۴,۲)\}$ یک به یک نیست.

نتیجه ی ۱) در تابع یک به یک هیچ دو زوج متمایز با مؤلفه های دوم برابر وجود ندارد.

نتیجه ی ۲) اگر f یک تابع یک به یک باشد در این صورت طبق تعریف داریم:

$$\forall x_۱,x_۲\in D_f\,, IF \quad x_۱\neq x_۲\rightarrow f(x_۱)\neq f(x_۲)$$

و با توجه به خاصیت عکس نقیض یک گزاره ی شرطی می توان نوشت:

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f \, , IF \;\; f(x_۱) = f(x_۲) \rightarrow x_۱ = x_۲$$

این مطلب می تواند به عنوان روشی برای تشخیص یک به یک بودن تابعی که معادله ی آن معلوم باشد، بکار برود.

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{x+۲}{۲x-۱}$ یک به یک است.

تمرین: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید[1].

۱) $f(x) = x^۲ + ۴$ ۲) $f(x) = ۲x^۳ - ۱$ ۳) $f(x) = x^۲ + ۶x$

۴) $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x$ ۵) $f(x) = \log^{x-۱}$

حل۳)

$$f(x) = x^۲ + ۶x = x^۲ + ۶x + ۹ - ۹ = (x+۳)^۲ - ۹$$
$$f(x_۱) = f(x_۲) \rightarrow (x_۱+۳)^۲ - ۹ = (x_۲+۳)^۲ - ۹ \rightarrow (x_۱+۳)^۲ = (x_۲+۳)^۲$$
$$\nrightarrow x_۱ + ۳ = x_۲ + ۳ \rightarrow x_۱ = x_۲$$

لذا تابع $f(x)$ یک به یک نیست.

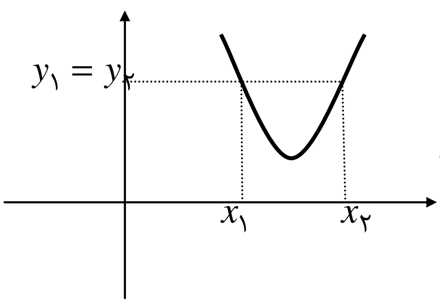
حل۴)

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ - ۱ = (x+۱)^۳ - ۱$$
$$f(x_۱) = f(x_۲) \rightarrow (x_۱+۱)^۳ - ۱ = (x_۲+۱)^۳ - ۱ \rightarrow (x_۱+۱)^۳ = (x_۲+۱)^۳$$
$$\rightarrow x_۱ + ۱ = x_۲ + ۱ \rightarrow x_۱ = x_۲$$

لذا تابع $f(x)$ یک به یک است.

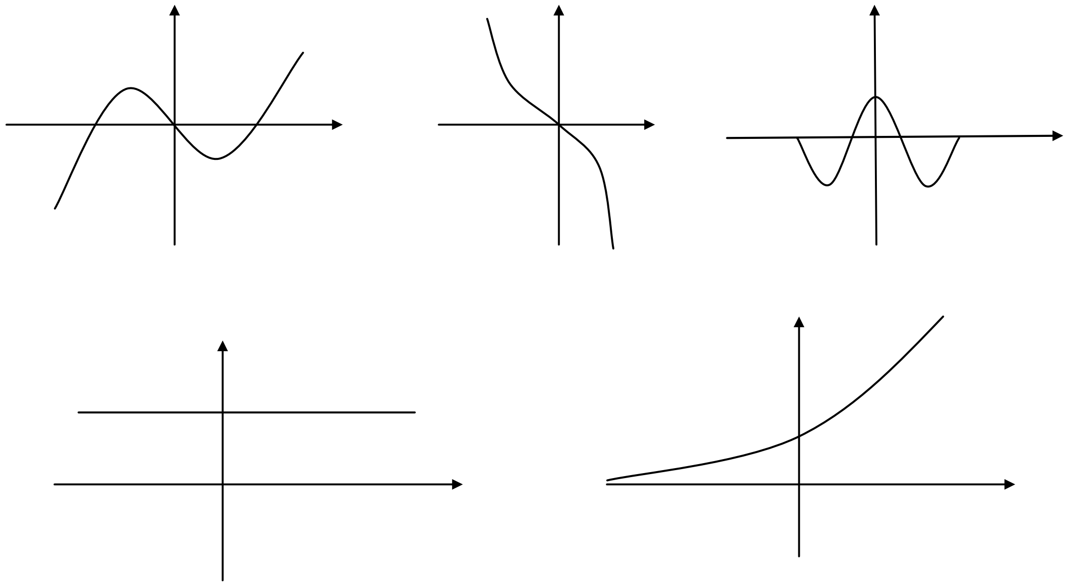
نتیجه ی۳) تابعی یک به یک است ، هرگاه هر خط موازی محور طول ها نمودار آنرا حداکثر در یک نقطه قطع کند. این نتیجه که به <u>**آزمون خط افقی**</u> موسوم است. این آزمون، برای تشخیص یک به یک بودن یک تابع که نمودار آن داده شده باشد، بکار می رود.

$$y_۱ = y_۲ \nrightarrow x_۱ = x_۲$$



[1] . برای بررسی معکوس پذیری یک تابع گاهی لازم است به روشی تعداد x ها را کاهش داد.

تمرین: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع یک به یک است؟



نتیجه ی ۴) تابع همانی یک به یک است ولی تابع ثابت یک به یک نیست.

تمرین: به کمک رسم نمودار، یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ۲) $g(x)=2^{x}-1$ ۳) $h(x)=\begin{cases} x^{2}-1 & x\geq 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$

***

معکوس تابع

دو تابع را معکوس همدیگر می نامند، هرگاه ترکیب آنها یک تابع همانی باشد. یعنی اگر f و g معکوس همدیگر باشند. یعنی

$$(fog)(x)=x,(gof)(x)=x$$

تمرین: نشان دهید که تابع های زیر معکوس یکدیگرند.

$$f(x)=2x^{3}-1 \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

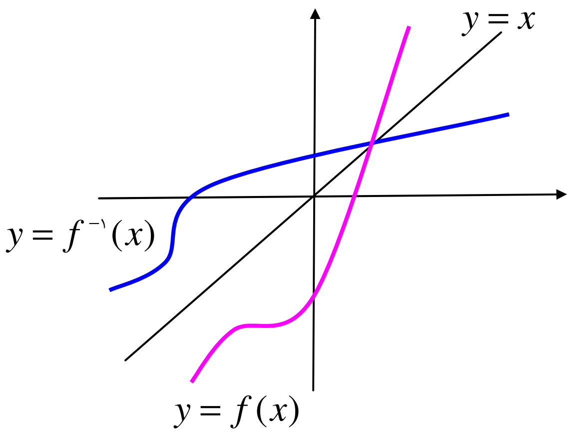
حل: کافی است که نشان دهیم $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ همانی هستند.

$$f(g(x))=f(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}})=2(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}})^{3}-1=2(\frac{x+1}{2})-1=(x+1)-1=x$$

$$g(f(x))=g(2x^{3}-1)=\sqrt[3]{\frac{(2x^{3}-1)+1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{2x^{3}}{2}}=\sqrt[3]{x^{3}}=x$$

توجه: اگر f یک تابع باشد، معکوس آن را با f^{-1} نمایش می دهند.

نتیجه: معکوس هر تابع از جابجایی مؤلفه های زوج های مرتب آن بدست می آید، بنابراین نمودار هر تـابع ومعکـوس آن نـسبت بـه نیمساز ربع اول وسوم ($y=x$) قرینه ی یکدیگرند و $D_{f^{-1}}=R_f\,,R_{f^{-1}}=D_f$



توجه: معکوس هر تابع ممکن است تابع نباشد. مانند تابع $f=\{(1,2),(3,0),(4,-1),(2,0)\}$ که معکوس آن تابع نیست.

تعریف : تابعی را معکوس پذیر می نامند، هرگاه معکوس آن خود نیز تابع باشد.

قضیه: تابع f معکوس پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

تمرین: ثابت کنید که اگر تابع $f(x)\neq 0$ زوج باشد، آنگاه معکوس پذیر نیست.

حل: تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است،پس هر خط موازی محور طول ها نمودار آنرا در بیش از یک نقطه قطـع مـی کنـد، پس یک به یک نیست و لذا معکوس پذیر نمی باشد.

نتیجه: برای تعیین معکوس یک تابع که معادله ی آن معلوم باشد.ابتدا نشان می دهیم که تابع معکوس پذیراست، سپس:

مرحله ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{2x-3}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_1)=f(x_2)\rightarrow\sqrt{2x_1-3}=\sqrt{2x_2-3}\rightarrow 2x_1-3=2x_2-3$$
$$\rightarrow 2x_1=2x_2\rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{2x-3}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{2y-3}\rightarrow x^2=2y-3\rightarrow y=\frac{x^2+3}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$$

تمرین: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

۱) $f(x)=x^3+3x^2+3x$

۲) $f(x)=2\sqrt[3]{x-1}+5$

۳) $f(x)=2^x-1$

۴) $f(x)=3x^2+6x+1$

۵) $f(x)=1+\log^x$

تمرین: دو تابع $g(x)=2x+1$ و $f(x)=x^3-1$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که توابع g و f معکوس پذیرند.

ب) درستی تساوی $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ را بررسی کنید.

نکته : اگر g و f دو تابع معکوس پذیر باشند، ثابت کنید که $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

***

روش تشخیص یک به یک بودن تابع چند ضابطه ای و تعیین معکوس آن

تابع دو یا چند ضابطه ای مانند $y=f(x)$ در صورتی یک به یک است که:

اولاً: در هر ضابطه اش یک به یک باشد.

ثانیاً: برد های هیچ دو ضابطه ای از ضابطه های آن نقطه ی مشترک نداشته باشند.

تمرین: ثابت کنید که تابع زیر یک به یک است.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

حل: ابتدا نشان می دهیم که هر ضابطه، تابع یک به یک است.

بررسی ضابطه ی اول

$$f(x_1)=f(x_2)\rightarrow x_1^2-1=x_2^2-1\rightarrow x_1^2=x_2^2\xrightarrow{x_1,x_2\geq 0}x_1=x_2$$

بررسی ضابطه ی دوم

$$f(x_1)=f(x_2)\rightarrow x_1-1=x_2-1\rightarrow x_1=x_2$$

حال نشان می دهیم که دو ضابطه برد مشترک ندارند.

برد ضابطه ی اول

$$x\geq 0\rightarrow x^2\geq 0\rightarrow x^2-1\geq -1\rightarrow y\geq -1\Rightarrow R_1=[-1,+\infty)$$

برد ضابطه ی دوم

$$x<0\rightarrow x-1<-1\rightarrow y<-1\Rightarrow R_2=(-\infty,-1)$$

$$\therefore R_1\bigcap R_2=\Phi$$

***

توجه: یک به یک بودن تابع چند ضابطه ای را می توان به کمک ترسیم نمودار نیز مشخص کرد.

تمرین: معکوس تابع تمرین قبل را بدست آورید.

حل: این تابع یک به یک است (معکوس پذیر) است. کافی است که معکوس هر ضابطه را به جداگانه بدست آوریم.

ضابطه ی اول

$$\left\langle\begin{matrix} y\in[-1,+\infty) \\ y=x^2-1\end{matrix}\right.\rightarrow x=y^2-1\rightarrow y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\sqrt{x+1}$$

ضابطه ی دوم

$$\left\langle\begin{matrix} y\in(-\infty,-1) \\ y=x-1\end{matrix}\right.\rightarrow x=y-1\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=x+1$$

لذا دامنه ی تابع f^{-1} به صورت زیر خواهد شد.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & x\geq -1 \\ x+1 & x<-1\end{cases}$$

تمرین: در هر مورد یک به یک بودن تابع داده شده را بررسی کرده و در صورت معکوس پذیر بودن، معکوس آنرا بیابید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$۲)\ g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲x-۱ & x<-۱ \end{cases}$$

$$۳)\ h(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۱ \\ -۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

***

فصل دوّم (حدوپیوستگی)

فهرست مطالب فصل دوّم

عنوان...

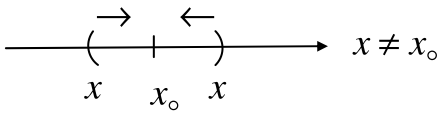
فصل دوم : حد و پیوستگی

☑ مفهوم حد

مفهوم حد یکی از مفاهیم کلیدی ومهم ریاضیات محسوب می شود. جهت آشنایی با این مفهوم قبل از تعریف به معرفی چند نماد می پردازیم.

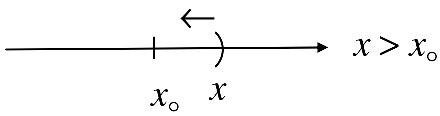
۱. $x \to x_{\circ}$

یعنی متغیر x از دو طرف محور xها به عدد ثابت $x_{\circ}$ نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



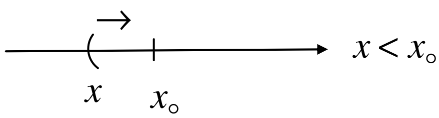
۲. $x \to x_{\circ}^{+}$

یعنی متغیر x از طرف راست محور xها به عدد ثابت $x_{\circ}$ نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



۳. $x \to x_{\circ}^{-}$

یعنی متغیر x از طرف چپ محور xها به عدد ثابت $x_{\circ}$ نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



۴. $x \to +\infty$

یعنی متغیر x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می شود.

۵. $x \to -\infty$

یعنی متغیر x از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر می شود.

۶. $x \to \pm\infty$

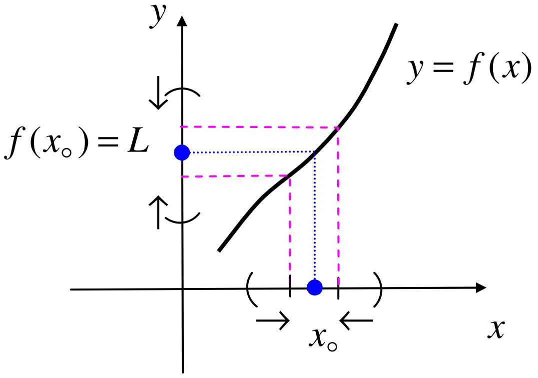
یعنی قدر مطلق متغیر x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می شود.

☑ حد تابع در یک نقطه

هرگاه $y=f(x)$ یک تابع باشد،گویند حد تابع f وقتی x به سمت $x_{\circ}$ میل می کند برابر L است،اگر هنگامی که متغیر x بـه سمت $x_{\circ}$ میل کند، $f(x)$ به سمت عدد معین L میل کند. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{x\to x_{\circ}} f(x)=L$$

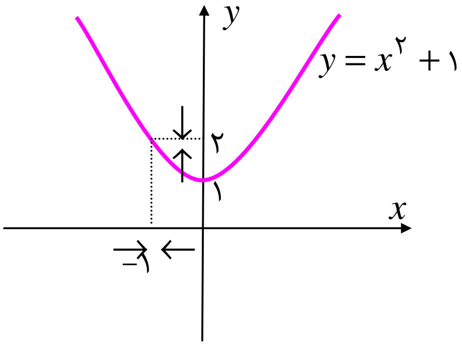
به شکل زیر توجه کنید.



مثال: هرگاه $f(x)=x^{۲}+۱$ یک تابع باشد. در این صورت واضح است که

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=(-۱)^{۲}+۱=۲$$

شکل زیر نیز این مطلب را نشان می دهد.



می توان مفهوم فوق را در جدول زیر نیز مشاهده کرد.

x	...	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۲$	-۱	$-۰/۸$	$-۰/۵$	۰	...
$y=x^{۲}+۱$	...	۵	۳/۷۵	۲/۴۴	۲	۱/۶۴	۱/۲۵	۱	...

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱} f(x)=۲$$

توجه: می توان گفت که منظور از نماد $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=L$ یعنی اینکه وقتی x به $x_\circ$ میل می کند، فاصله ی بـین x و $x_\circ$ از هر عدد کوچک مثبتی کوچکتر می شود ($|x-x_\circ|<\delta$). حال وقتی که $f(x)$ به سمت $L=f(x_\circ)$ میل کند، فاصـله ی آنها نیز از هر عدد کوچک مثبت دیگری کوچکتر می شود $|f(x)-L|<\varepsilon$.

بنا براین:

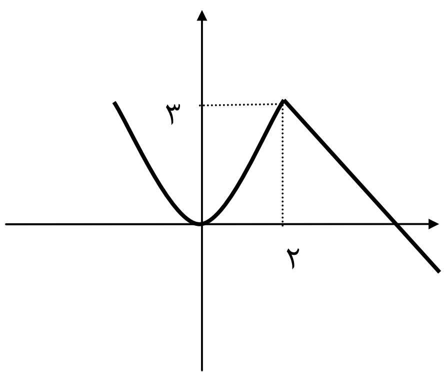
$$(\forall\varepsilon>۰\quad \exists\delta>۰\quad \ni ۰<|x-x_\circ|<\delta\to|f(x)-f(x_\circ)|<\varepsilon)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_\circ} f(x)=L$$

این دیدگاه تعریف دقیق حد تابع در یک نقطه را نشان می دهد که در کتب دیفرانسیل و انتگرال با آن مواجه می شـویم. در اینجـا مفهوم حد را به صورت شهودی می پذیریم.

***

تمرین: با توجه به نمودار مقابل تساوی زیر را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=....$$



تمرین : حد توابع زیر را در نقطه ی داده شده تعیین کنید.

۱) $f(x)=۳x^۲+۲x \qquad x=۱$

۲) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴x} \qquad x=-۱$

۳) $h(x)=\sin x+\cos x \qquad x=\frac{\pi}{۲}$

۴) $k(x)=x+[x] \qquad x=\frac{۳}{۲}$

۵) $m(x)=|x-۲|+۳ \qquad x=۰$

تمرین: حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-x-۲}{x+۱}$ وقتی که $x\to -۱$ را حساب کنید.

تمرین: حد تابع زیر را وقتی x به سمت عدد ۳ میل می کند را بدست آورید.

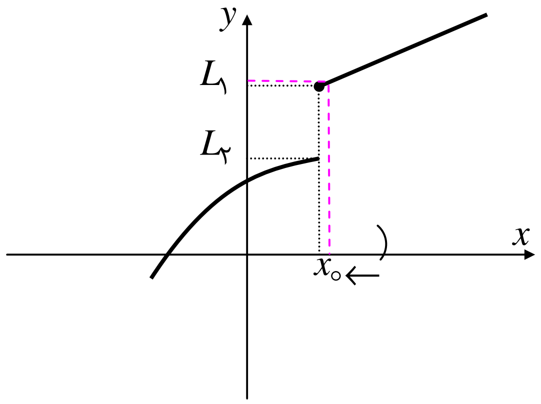
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\neq 3 \\ 5x & x=3 \end{cases}$$

تمرین: در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که حد تابع در نقطه ی $x=-1$ برابر ۲- باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x\neq -1 \\ 2x & x=-1 \end{cases}$$

***

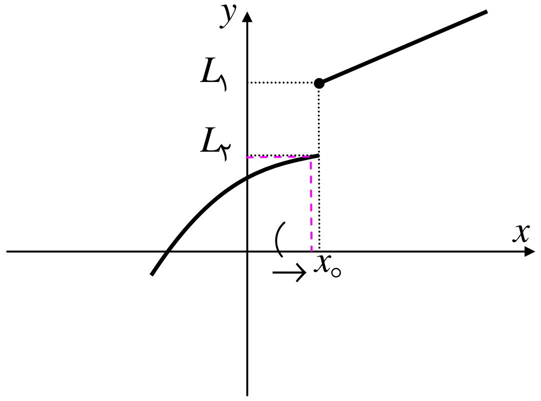
☑ حد راست وحد چپ تابع در یک نقطه



حد راست: اگر متغیر x فقط از طرف راست به سمت x_0 میل کند وتابع f حدی برابر L_1 داشته باشد، در این صورت L_1 را حد راست تابع f می نامند و می نویسند.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$$

***

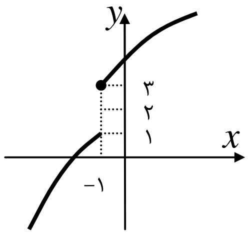


حد چپ: اگر متغیر x فقط از طرف چپ به سمت x_0 میل کند وتابع f حدی برابر L_2 داشته باشد، در این صورت L_2 را حد چپ تابع f می نامند و می نویسند.

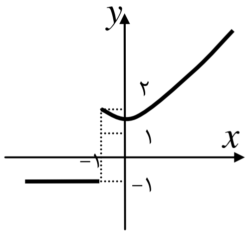
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$$

***

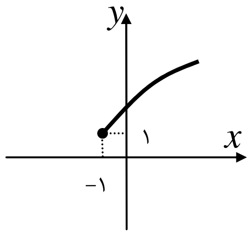
تمرین: در هر مورد حد چپ و حد راست تابع و مقدار تابع در نقطه ی $x=-1$ را تعیین کنید.



(۱)



(۲)



(۳)

***

تمرین: با توجه به تابع زیر حد راست وحد چپ و مقدار تابع را درنقطه ی $x=۱$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۱ \\ x^{۲}+۲x-۶ & x\leq ۱ \end{cases}$$

***

نتیجه: تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x_{\circ}$ دارای حد است، هرگاه حد راست و حد چپ آن در این نقطه موجود و برابر[1] باشند و برعکس

$$\lim_{x\to x_{\circ}^{+}} f(x)=\lim_{x\to x_{\circ}^{-}} f(x)=L \leftrightarrow \lim_{x\to x_{\circ}} f(x)=L$$

مثال: تابع $f(x)$ در تمرین قبل در نقطه ی $x=۱$ دارای حد نیست زیرا $\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)\neq \lim_{x\to ۱^{-}} f(x)$

***

تمرین: نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=۱$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x)=۲x+[x]$ وقتی $x\to ۳$ دارای حد نیست.

***

تمرین: مقدار k را طوری بیابید که تابع $f(x)=k[x]+[x+۱]$ در نقطه ی $x=۱$ حد داشته باشد.

[1] . یعنی عددهای مساوی شوند.

حل:

$$f(x)=k[x]+[x+۱]=k[x]+[x]+۱=(k+۱)[x]+۱$$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=(k+۱)[۱^+]+۱=[(k+۱)\times ۱]+۱=k+۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=(k+۱)[۱^-]+۱=[(k+۱)\times ۰]+۱=۱$

$$\therefore k+۲=۱\to k=-۱$$

***

تمرین: حد توابع زیر را در نقطه ی داده شده در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ ۵) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۳}([x]+[-x])$ ۶) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-۵}{[x-۲]}$

***

تمرین برای حل :

۱ : در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع در نقطه ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲x-۱ & x<۳ \\ ۲ & x=۳ \\ x^۲-۵ & x>۳ \end{cases}$$

۲ : در تابع زیر مقدار a و b را طوری بیابید که تابع در نقطه ها ی $x=۳$ و $x=۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx-۱ & x<۱ \\ ۲ & ۱\le x\le ۳ \\ bx^۲-۵ & x>۳ \end{cases}$$

توجه : ثابت می شود که حد هر تابع در صورت وجود یکتا است.

☑ **قضایای حد**

۱) حد تابع ثابت (عدد ثابت) در هر نقطه برابر همان عدد است. $\lim\limits_{x\to x_\circ} k = k$

۲) حد مجموع دو تابع در یک نقطه با مجموع حد های آن توابع در همان نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to x_\circ} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_\circ} f(x) + \lim_{x\to x_\circ} g(x)$$

۳) حد تفاضل دو تابع در یک نقطه با تفاضل حد های آن توابع در همان نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to x_\circ} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_\circ} f(x) - \lim_{x\to x_\circ} g(x)$$

۴) حد حاصل ضرب دو تابع در یک نقطه با حاصل ضرب حد های آن توابع در همان نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to x_\circ} (f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to x_\circ} f(x) \times \lim_{x\to x_\circ} g(x)$$

۵) حد خارج قسمت دو تابع در یک نقطه با خارج قسمت حد های آن توابع در همان نقطه برابر است.

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)} \qquad \lim_{x\to x_\circ} g(x) \neq ۰$$

نتیجه:

۱) حد حاصل ضرب یک عدد در یک تابع $\lim\limits_{x\to x_\circ} kf(x) = k \lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$

۲) حد تابع تواندار در یک نقطه $\lim\limits_{x\to x_\circ} (f^n(x)) = (\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x))^n$

۳) حد تابع رادیکالی (اگر n زوج باشد. $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) \geq ۰$) $\lim\limits_{x\to x_\circ} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)}$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin^۲ x + \cos x + ۱)$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۳x^۲ + ۵x}{x - ۴}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۴} e^{۲x-۸} + \tan\frac{\pi}{۳} x$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt[۳]{x^۲ + ۵x + ۲}$

تمرین: اگر $f(x) = ۱ - \cos x$ و $g(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ مطلوبست محاسبه ی

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}(f+g)(x)$　　　　۲) $\lim\limits_{x\to ۰}(f.g)(x)$

تمرین : اگر $f(x)=۴+\cos x$ **باشد.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sqrt{f(x)}$ را بدست آورید.

***

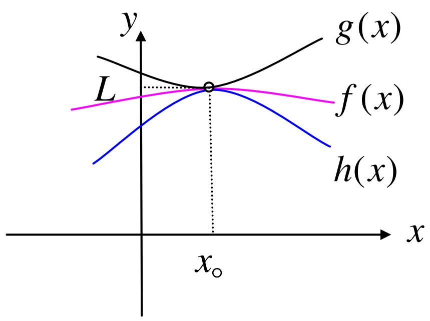
☑ قضیه ی فشردگی

فرض کنید به ازاء هر x از بازه ای مانند I که شامل نقطه ی $x_{\circ}$ است، مگر احتمالاً در $x_{\circ}$ داشته باشیم.

$$h(x)\le f(x)\le g(x)$$

در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to x_{\circ}} h(x)=\lim\limits_{x\to x_{\circ}} g(x)=L$.

آنگاه $\lim\limits_{x\to x_{\circ}} f(x)=L$



***

تمرین: فرض کنید به ازاء هر $x\neq ۰$ داشته باشیم $۳-x^۲\le f(x)\le ۳+x^۲$. حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to ۰$ تعیین کنید.

تمرین: اگر به ازاء هر x داشته باشیم $۲-x^۲\le g(x)\le ۲\cos x$. حد تابع $g(x)$ را وقتی $x\to ۰$ تعیین کنید.

تمرین: به کمک قضیه ی فشردگی ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} x.\sin\frac{۱}{x}=۰$

حل: واضح است که

$$\begin{cases}-۱\le \sin\frac{۱}{x}\le ۱\\ x>۰\end{cases}\xrightarrow{\times x} -x\le x\sin\frac{۱}{x}\le x \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۰^+}(-x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}x=۰}$$

$$\lim\limits_{x\to ۰^+} x\sin\frac{۱}{x}=۰$$

$$\begin{cases} -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \\ x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\times x} -x \ge x\sin\frac{1}{x} \ge x \to x \le x\sin\frac{1}{x} \le -x$$

$$\xrightarrow[\lim_{x\to 0^-} (-x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0]{} \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

تمرین: به کمک قضیه ی فشردگی ثابت کنید که $\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cos\frac{1}{x-1} = 0$

حل:

$$-1 \le \cos\frac{1}{x-1} \le 1 \xrightarrow{\times (x-1)^2} -(x-1)^2 \le \cos\frac{1}{x-1} \le (x-1)^2$$

$$\xrightarrow[\lim_{x\to 1} [-(x-1)^2] = \lim_{x\to 1} (x-1)^2 = 0]{} \lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cos\frac{1}{x-1} = 0$$

تمرین برای حل : به کمک قضیه ی فشردگی ثابت کنید که

الف) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

ب) $\lim_{x\to 0} |x| \cos\frac{1}{x} = 0$

توجه : به کمک قضیه ی فشردگی ثابت می شود که $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و به طور کل اگر $\theta(x)$ به سمت صفر میل کند، در این صورت $\lim_{\theta(x)\to 0} \frac{\sin\theta(x)}{\theta(x)} = 1$

تمرین: در هر مورد تساوی داده شده را ثابت کنید.

۱) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

۳) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1$

۴) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$

۵) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$

۶) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$

حل:

۱)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۲)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x.\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱\times\frac{۱}{\cos ۰}=۱\times ۱=۱$$

۳)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^n x}{x^n}=\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^n=(\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x})^n=(۱)^n=۱$$

۴)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to ۰}k.\frac{\sin kx}{kx}=\lim_{x\to ۰}k\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{kx}=k\times ۱=k$$

۵)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}(\frac{m}{n}\times\frac{\sin mx}{mx})=\lim_{x\to ۰}\frac{m}{n}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{mx}=\frac{m}{n}\times ۱=\frac{m}{n}$$

۶)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to ۰}(\frac{m}{n}\times\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{nx}{\sin nx})=\frac{m}{n}\times ۱\times ۱=\frac{m}{n}$$

***

نتیجه: با توجه به تمرین قبل، بطور کلی داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^n}{\sin^n x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^n x}{x^n}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^n}{\tan^n x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan^n x}{x^n}=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan^n x}{\sin^n x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^n x}{\tan^n x}=۱$

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۳x} \qquad ۳)\ \lim_{x\to ۰}\left(۱+\frac{\sin^{۵} x}{x^{۵}}\right)$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{\tan ۴x} \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۰}\frac{x+\sin x}{x}$$

توجه: گاهی اوقات جهت استفاده از نتیجه ی فوق بهتر است متغیر را تغییر داد.

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\tan(x+۲).\sin^{۲}(x+۲)}{۵(x+۲)^{۳}}$$

حل :

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\tan(x+۲).\sin^{۲}(x+۲)}{۵(x+۲)^{۳}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\tan t.\sin^{۲} t}{۵t^{۳}}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{۵}\times\frac{\tan t}{t}\times\frac{\sin^{۲} t}{t^{۲}}=\frac{۱}{۵}\times ۱\times(۱)^{۲}=\frac{۱}{۵}$$

تمرین برای حل : حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to k}\frac{\sin(x-k)}{x^{۲}-k^{۲}} \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳}\frac{\sin(x-۳)}{x^{۲}-۹} \qquad ۳)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(۳x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۳}}$$

***

☑ **حد های مبهم** (حد هایی که به شکل $\frac{۰}{۰}$ در می آیند.)

در محاسبه ی حد توابع اگر حد به شکل $\frac{\cdot}{\cdot}$ درآید، در اصطلاح می گویند حد مبهم است . یعنی مقدار آن با روش جایگزینی مستقیم به دست نمی آید و برای تعیین مقدار آن کافی است از یکی از روش های رفع ابهام که تأکید آنها بر حذف عامل صفر کننده است،استفاده کنیم. منظور از رفع ابهام ،استفاده از عملیات مجازی است که زمینه ی محاسبه ی مقدار حد را فراهم کنند.

روش های رفع ابهام عبارتند از:

۱. تجزیه ی صورت و مخرج و ساده کردن کسر

اگر صورت و مخرج کسر چند جمله ای باشند، برای رفع ابهام می توانید، صورت یا مخرج کسر را تجزیه[2] نموده و سپس کسر را ساده کنید.

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴}$$

حل:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴}=\frac{(-۲)^۲+۶(-۲)+۸}{(-۲)^۲-۴}=\frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴}=\frac{\cdot}{\cdot}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲}=\frac{۲}{-۴}=\frac{۱}{-۲}$$

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x^۲-۵x+۶}\qquad ۳)\ \lim_{x\to -۳}\frac{x^۲+۷x+۱۲}{x^۳+۴x^۲+۴x+۳}$$

۲. گویا کردن صورت یا مخرج کسر وساده کردن آن

اگر صورت یا مخرج کسر ، شامل عبارت رادیکالی باشد، صورت یا مخرج را گویا[3] کنید.

---

[2] . در صورتی که تجزیه ی صورت یا مخرج کسر مشکل باشد، می توان از تقسیم صورت یا مخرج بر عامل صفر کننده یعنی $(x-x_\circ)$ استفاده نمود.

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^{۲}+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^{۲}+۵})^{۲}-(۳)^{۲}}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^{۲}+۵})^{۲}-(۳)^{۲}}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۵-۹}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^{۲}+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{\sqrt{x^{۲}+۵}+۳}=\frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^{۲}+۵}+۳}=\frac{۴}{۳+۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}=\frac{۲۷-۲۷}{\sqrt[۳]{۲۷}-۳}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{\sqrt[۳]{x}-۳}\times\frac{\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}{\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}{\sqrt[۳]{x}^{۳}-(۳)^{۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}{x-۲۷}=\lim_{x\to ۲۷}(\sqrt[۳]{x}^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)=\sqrt[۳]{۲۷}^{۲}+۳\sqrt[۳]{۲۷}+۹=۹+۹+۹=۲۷$$

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

[3] . توجه کنید که معمولاًرادیکال های با فرجه ی ۲ به کمک اتحاد مزدوج و رادیکال های با فرجه ی ۳ به کمک اتحاد چاق و لاغر، گویا می شوند.

$$۱.\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$$

$$۲.\ \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}$$

$$۳.\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{\sqrt{x+۳}-۲}$$

$$۴.\ \lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-x}{۳-\sqrt{x+۷}}$$

$$۵.\ \lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{۴x-۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}$$

$$۶.\ \lim_{x\to -۸}\frac{-۳x-۲۴}{۲+\sqrt[۳]{x}}$$

$$۷.\ \lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt{۹+۲x}-۵}{\sqrt[۳]{x}-۲}$$

۳. استفاده از روابط مثلثاتی

به کمک روابط بین نسبت های مثلثاتی نیز می توان حد های شامل نسبت های مثلثاتی را نیز رافع ابهام کرد.

تمرین: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x}=\frac{(۰)^۲}{۱-\cos(۰)}=\frac{۰}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۱-\cos x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲(۱+\cos x)}{۱-\cos^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲(۱+\cos x)}{\sin^۲ x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{\sin^۲ x}\times(۱+\cos x)=\lim_{x\to ۰}(\frac{x}{\sin x})^۲\times(۱+\cos x)=\lim_{x\to ۰}(\frac{x}{\sin x})^۲\times\lim_{x\to ۰}(۱+\cos x)$$
$$=۱\times(۱+\cos ۰)=۱\times(۱+۱)=۲$$

***

توجه : فرمول های زیر را به خاطر بسپارید.

$$۱)\sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} \qquad ۳)۱-\cos x = ۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

$$۲)\cos x = ۱-۲\sin^{۲}\frac{x}{۲} \qquad ۴)\ ۱+\cos x = ۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}$$

تمرین: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x} = \frac{(۰)^{۲}}{۱-\cos(۰)} = \frac{۰}{۱-۱} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰}\frac{۴\times\frac{x}{۲}\times\frac{x}{۲}}{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{۴}{۲}\times\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}\times\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} = ۲\times۱\times۱ = ۲$$

تمرین: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x} = \frac{۱-\cos ۰}{\sin ۰} = \frac{۱-۱}{۰} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\sin\frac{۰}{۲}}{\cos\frac{۰}{۲}} = \frac{\sin ۰}{\cos ۰} = ۰$$

***

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3x}.\sin\dfrac{3}{2}x$

۴. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

۵. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

۲. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

۳. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}$

۶. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

۲. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

نتیجه: تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ در نقطه ی $x=0$ حد ندارد.

۴. استفاده از توابع هم ارز

تعریف: دو تابع g و f را هم ارز می گویند، هرگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \to \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

توابع زیر وقتی که $\theta(x)\to 0$ هم ارزند.

۱) $\sin^n\theta(x)\approx\theta^n(x)$

۲) $\tan^n\theta(x)\approx\theta^n(x)$

۳) $Arc\sin\theta(x)\approx\theta(x)$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 4x}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{Arc\sin 2x}{x})$

توجه : علاوه بر هم ارزی های فوق وقتی $\theta(x)\to 0$ هم ارزی های زیر نیز برای محاسبه ی حد توابع نیز قابل استفاده هستند.

۱) $1-\cos\theta(x)\approx\dfrac{1}{2}\theta^2(x)$

۳) $\tan\theta(x)-\theta(x)\approx\dfrac{1}{3}\theta^3(x)$

۲) $\theta(x)-\sin\theta(x)\approx\dfrac{1}{6}\theta^3(x)$

۴) $\tan\theta(x)-\sin\theta(x)\approx\dfrac{1}{2}\theta^3(x)$

به کمک توابع هم ارز نیز می توان بسیاری از حد های مبهم را رفع ابهام نمود.

تمرین: حد مقابل را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x - x}{x}$

حل:

✓ بدون استفاده از هم ارزی

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x - x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{x}\right)=۱-۱=۰$$

✓ با استفاده از هم ارزی

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x - x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-(x-\sin x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{۶}x^{۳}}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(-\frac{۱}{۶}x^{۲}\right)=۰$$

تمرین: حد های تابع زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^{۲}}{۱-\cos x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos^{۳} x}{x^{۲}}$

❋❋❋

۵. استفاده از قاعده ی هوپیتال

یکی دیگر از روش های رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$ استفاده از قاعده ی هوپیتال می باشد، این روش را به عنوان کاربرد مشتق ، بعد از معرفی مفهوم مشتق و روش های مشتق گیری، توضیح می دهیم.

❋❋❋

☑ **تعمیم حد**

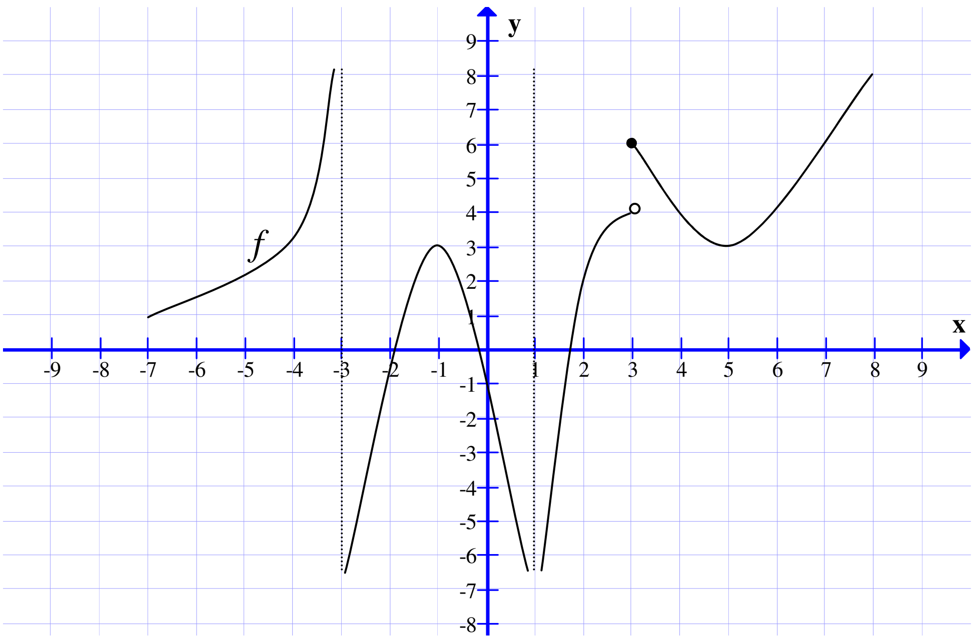
الف) حد بی نهایت (حد نامتناهی)

گاهی تابع f به گونه ای تعریف می شود که وقتی x به $x_\circ$ نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر یا از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر می شود. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=+\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=+\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=-\infty$$

تمرین: حد های زیر را با توجه به شکل مقابل بدست آورید.



۱) $\lim_{x\to -۳^+} f(x)=$

۲) $\lim_{x\to -۳^-} f(x)=$

۳) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=$

۴) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=$

۵) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=$

۶) $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=$

۷) $\lim_{x\to ۳} f(x)=$

۸) $f(۳)=$

۹) $\lim_{x\to ۴^+} f(x)=$

۱۰) $\lim_{x\to ۴^-} f(x)=$

۱۱) $\lim_{x\to ۴} f(x)=$

۱۲) $f(۴)=$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید. (به علامت صورت و مخرج توجه کنید.)

حد	حل
۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{x} =$	$= \frac{[۰^+]}{۰^+} = \frac{۰}{۰^+} = ۰$
۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{x} =$	$= \frac{[۰^-]}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{[x]}{x} =$	=وجود ندارد.
۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x}{[x]} =$	$= \frac{۰^+}{[۰^+]} = \frac{۰^+}{۰} =$ نامعین
۵) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\lvert x\rvert}{x} =$	$\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\lvert x\rvert}{x} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = ۱$
۶) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\lvert x\rvert}{x} =$	$\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\lvert x\rvert}{x} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱$
۷) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\lvert x\rvert}{x} =$	=وجود ندارد.

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x+۲}{x-۲} =$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{x+۲}{x-۲} =$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۵}{x-۲} =$

۵) $\lim\limits_{x\to -۳^-} \frac{-۲}{(x+۳)^۲} =$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۴}{(x-۲)^۲} =$

تمرین برای حل:

۱: حد تابع زیر را در صورت وجود بدست آورید. (حد راست و چپ بررسی شوند.)

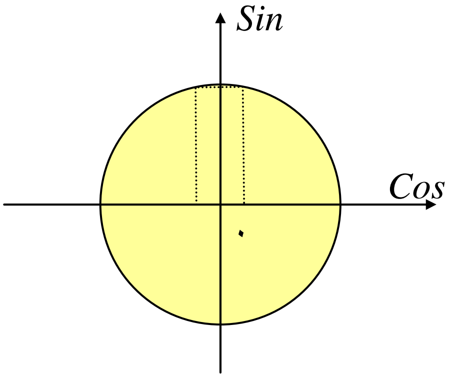
$$\lim_{x\to ۲}\frac{۴}{x-۲}$$

۲: مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]-۱}{x-[x]}$ ۲) $\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x}{[x]-۱}$

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x)=\tan x$ در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۲}$ دارای حد نیست.

حل:



ربع دوم $x\to\frac{\pi}{۲}^+ \to x>\frac{\pi}{۲}\to \cos x<۰$

ربع اول $x\to\frac{\pi}{۲}^- \to x<\frac{\pi}{۲}\to \cos x>۰$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}^+}{\cos\frac{\pi}{۲}^+}=\frac{۱^-}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}^-}{\cos\frac{\pi}{۲}^-}=\frac{۱^-}{۰^+}=+\infty$$

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{\sin x}=$ ۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\sec x=$ ۳) $\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=$

***

ب) حد در بی نهایت

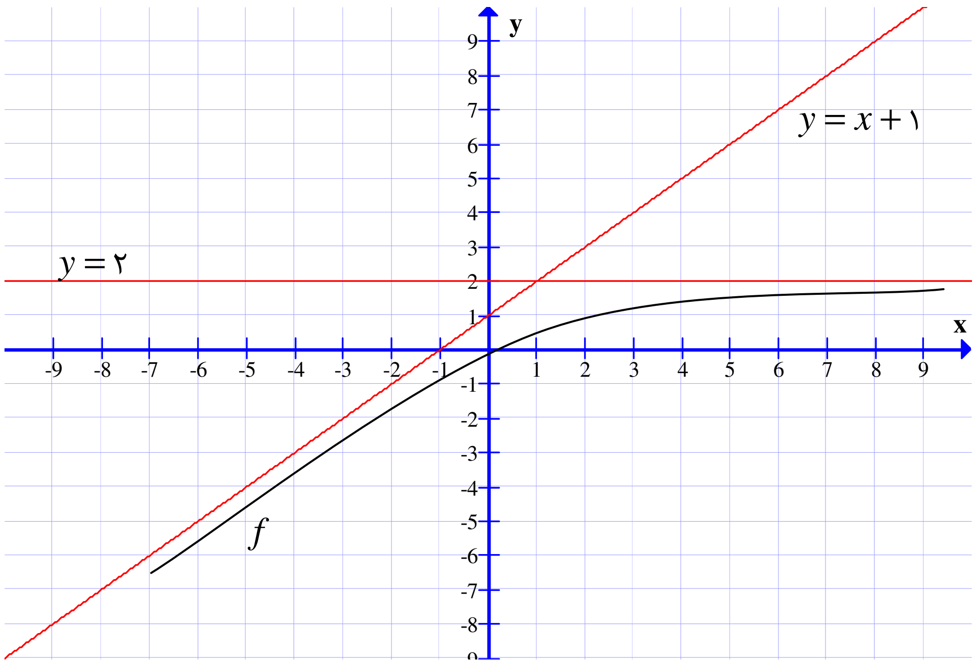
در این حالت اگر x از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر($x \to +\infty$) یا از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر ($x \to -\infty$)شود.تـابع دارای حدی برابر یک عدد یا اینکه مقدار آن نیز از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر یا از هر عدد منفی کوچکی کـوچکتر مـی شـود. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

تمرین: با توجه به شکل مقابل حد زیر را محاسبه کنید.



۱) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=.....$ و ۲) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=.....$

برای محاسبه ی حد های توابع وقتی که $x\to\pm\infty$ این حد ها را به چند دسته تبدیل می کنیم.

الف) محاسبه ی حد عبارت های گویا وقتی که $x\to\pm\infty$

درمحاسبه ی $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^n$ حالت های زیر را در نظر می گیریم.

اگر n زوج باشد.	$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$
اگر n فرد باشد.	$\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3) =$ ۳) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (2x^4) =$ ۵) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (3x^5) =$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4) =$ ۴) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (-3x^2) =$ ۶) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (-3x^5) =$

همچنین بدیهی است که $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a}{bx^n} = 0$

تمرین : حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{5x^3} =$ ۲) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{5x^2} =$

اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ یک چند جمله ای از درجه ی n باشد و $a_n \neq 0$ در این صورت

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n \times \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \times (a_n + ۰ + ۰ + ... + ۰ + ۰) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

نتیجه: حد هر تابع چند جمله ای وقتی که $x \to \pm\infty$ با حد جمله ای از آن که بیشترین درجه را دارد، برابر است. یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

تمرین: مقدار $\lim_{x\to+\infty} (-۵x^۷ + ۳x^۴ - ۲x + ۱)$ را به روش فوق محاسبه کنید.

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to+\infty} (-x + ۲x^۳ + ۱)$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty} (۳x^۵ - ۲x^۲ + x - ۱)$

درمحاسبه ی حد توابع کسری نظیر $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ وقتی که $x \to \pm\infty$ به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} p(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} q(x)} = \frac{a \lim_{x\to\pm\infty} x^n}{b \lim_{x\to\pm\infty} x^m} = \frac{a}{b} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

که در آن ax^n جمله ی با بزرگترین درجه ی صورت و bx^m جمله ی با بزرگترین درجه ی مخرج فرض شده است.

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^۳ + ۲x}{x + x^۲ - ۱}$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{۲x^۲ + x}{۳x^۲ - ۵x + ۱}$

۳) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{۲x + ۱}{x^۲ + ۴x}$

۴) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{۲x^۳ - x^۲ + x - ۱}{۳x + ۵}$

نتیجه: در محاسبه ی حد توابع کسری می توان حالت های زیر را در نظر گرفت.

الف) اگر $n > m$ در این صورت $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ یا $-\infty$

ب) اگر $n = m$ در این صورت $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$

ج) اگر $n < m$ در این صورت $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ۰$

ب) حد توابع رادیکالی وقتی که $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{P(x)^n}=\sqrt[m]{\lim_{x\to\pm\infty}P(x)^n}$$

در صورتی که فرجه رادیکال زوج باشد بهتر است از عبارت زیر رادیکال یک اتحاد مربع جدا کنیم.

تمرین: حد تابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[5]{x^3+2x}=$ ۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=$

حل:

۱)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[5]{x^3+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[5]{x^3(1+\frac{2}{x^2})}=\sqrt[5]{\lim_{x\to\pm\infty}x^3(1+\frac{2}{x^2})}$$
$$=\sqrt[5]{\lim_{x\to\pm\infty}x^3(1+0)}=\sqrt[5]{\lim_{x\to\pm\infty}x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[5]{x^3}=\pm\infty$$

۲)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{(x-1)^2+2}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}|x+1|=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[-(x+1)]=+\infty\end{array}\right.$$

نتیجه: در محاسبه ی حد توابع رادیکالی وقتی $x\to\pm\infty$ می توان هم ارزی های زیر را بکار برد.این هم ارزی ها بـه هـم ارزی های نیوتنی معروفند.

- ✓ اگرفرجه ی رادیکال بیشتر از درجه ی عبارت زیر رادیکال باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{ax^n}$$

- ✓ اگرفرجه ی رادیکال برابر درجه ی عبارت زیر رادیکال باشد.

اگر $a>0$ و m زوج باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{ax^m+bx^{m-1}+\dots}=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[m]{a}\,|x+\frac{b}{ma}|)=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[m]{a}(x+\frac{b}{ma})]\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[-\sqrt[m]{a}(x+\frac{b}{ma})]\end{array}\right.$$

توجه: اگر $a<0$ تابع حد ندارد.

اگر $a\in R$ و m فرد باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{ax^m+bx^{m-1}+\dots}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[m]{a}\left(x+\frac{b}{ma}\right)$$

با توجه به هم ارزی های فوق می توان حالت خاص زیر را نیز نوشت.($a>0$)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]\end{cases}$$

اگر $a<0$ تابع دارای حد نیست.

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^3-3x^2+1}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{8x^3+24x^2+1}$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{-x^3+3x}$

۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[4]{x^4+8x^3+1}$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{4x^2-3x+1}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{-4x^2+7x+3}$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-1}$

۴) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-8x+3}$

توجه: در یک عبارت جبری که یک قسمت آن زیر رادیکال باشد،اگر از جمله ی با بزرگترین توان زیر رادیکال جذر بگیریم و درجه ی حاصل کمتر از درجه ی عبارت بیرون رادیکال باشد، بکار گیری هم ارزی نیوتنی لازم نیست.

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-\sqrt{2x^2-x+1})=$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1+\sqrt{x^2-2x+3})=$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}(۵x^{۳}-\sqrt{۲x^{۲}-x+۱})=$$

توجه : در محاسبه ی حد توابع علاوه بر حالت $\frac{۰}{۰}$ حالت های $\frac{\infty}{\infty}$ و $۰\times\infty$ و $\infty-\infty$ از صور مبهم محسوب می شوند و چون تمام صورت ها قابل تبدیل به حالت $\frac{۰}{۰}$ هستند، به همین علت این صورت را صورت اصلی می نامند و بیشتر به آن تأکید می شود. روشهای رفع ابهام این حالت ها در اکثر موارد با تبدیل به حالت $\frac{۰}{۰}$ انجام می شود.[1]

تمرین برای حل :

الف) حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to۰^{+}}\left(\frac{۱}{x(x+۱)}-\frac{۱}{x}\right)=$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x}-x)=$$

$$۳)\ \lim_{x\to\pm\infty}(x-۱+\sqrt{x^{۲}+۲x})=$$

$$۴)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۲x+۵}-\sqrt{x^{۲}+۲x+۷})=$$

$$۵)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+x+۲}{۲x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+۱}}=$$

$$۶)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-\sqrt{x^{۲}+۷x-۱}}{۵x+\sqrt{x^{۲}+x-۲}}=$$

$$۷)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x^{۲}+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=$$

$$۸)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x^{۲}+۱}}{۶x^{۲}+\sqrt{x-۱}}=$$

$$۹)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۹x^{۲}+۱۸x+۱}+۵-۳x)=$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^{۲}-۱۰x+۱}}{۲x-۱}=$$

ب) حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to+\infty}x^{۲}(۱-\cos\frac{۱}{x})=$$

$$۲)\ \lim_{x\to۰}(\frac{۱}{x}-\cot x)=$$

$$۴)\ \lim_{x\to۱}(x-۱)\tan\frac{\pi}{۲}x=$$

$$۵)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۳}}(۱-۳x)\tan\frac{۳\pi}{۲}x=$$

---

[1] . حالت های ۱^{∞} و $\infty^{۰}$ و $۰^{۰}$ نیز مبهم محسوب می شوند.

$$۳)\lim_{x\to ۰}\frac{\cot ۳x}{\operatorname{cosec} ۲x}=$$

ج) مقدار k را به قسمی تعیین کنید که حد تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۴+x^۳-۱}{kx^۴+x^۲+۱}$ وقتی که $x\to\pm\infty$ برابر۴ باشد.

د) مقدار n و m را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(۳-m)(x^۲-۲)}{۲x^n-۳x-۲}=۱$.

هـ) مقدار k را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x-۱+\sqrt{۴x^۲+kx+۱})=۵$ (جواب $k=-۲۴$)

و) مقدار n و m را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+n+\sqrt{x^۲-۴x-۳})=۲$ (جواب $n=۴$ و $m=-۱$)

ز) اگر $x>۰$ و $\dfrac{۲x^۲+۵x}{x^۲}\le f(x)\le\dfrac{۲x-۳}{x}$ در این صورت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را بیابید. (جواب ۲)

***

توجه : در ریاضیات عالی ثابت می شود که $\lim\limits_{u\to+\infty}(۱+\dfrac{۱}{u})^u=e$ که در آن e عدد نپرین می باشد.

تمرین : حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+۱}{x})^{۲x}=$

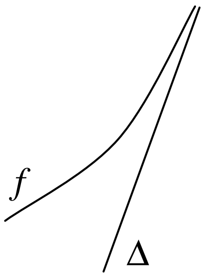
ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\dfrac{۱}{۳x})^{x}=$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\dfrac{۱}{۲x})^{-۳x}=$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x}{x+۱})^{۵x}=$

***

☑ مجانب های منحنی



مجانب نمودار یک تابع، خطی است که در فاصله ی بینهایت دور بر منحنی مماس شود.

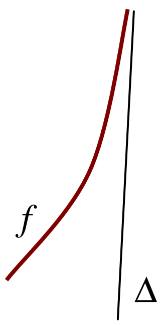
اگر خط مجانب موازی محور عرض ها باشد،آنرا مجانب قائم می نامند. $(x=a)$

اگر خط مجانب موازی محور طول ها باشد،آنرا مجانب افقی می نامند. $(y=b)$

اگر خط مجانب نه موازی محور طول ها و نه موازی محور عرض ها باشد،آن را مجانب مایل می نامند. $(y=ax+b)$

***

☑ مجانب قائم



خطی است که تابع در امتداد آن به بی نهایت میل می کند.یعنی

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty$$

معادله ی مجانب قائم $\Leftarrow x=a$

در توابع کسری برای بدست آوردن مجانب قائم کافی است، ریشه های مخرج را بدست آوریم. ریشه ی مخرج در صورتی به عنوان مجانب قائم قابل قبول است که

اولاً: به ازای آن صورت صفر نشود.

ثانیاً: نقاط مجاور آن (در یک طرف یا در دو طرف) عضو دامنه ی تابع باشند.

تمرین: مجانب های قائم توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\dfrac{x}{3x-2}$

۲) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-6x+5}$

۳) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-6x+5}$

۴) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

۵) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-|x|}$

۶) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

۷) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

۸) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2-9}$

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

تمرین: مجانب های قائم تابع زیر در صورت وجود را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+|x|}{x^{۲}-|x|}$$

حل:

$$x^{۲}-|x|=۰ \to x^{۲}=|x| \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$$D_f=R-\{۰,۱,-۱\}$$

و چون $x=۰$ ریشه ی صورت است، لذا فقط دو خط $x=۱$ و $x=-۱$ مجانب قائم هستند.

توجه: برای تعیین مجانب های قائم بهتر است که دامنه ی تابع را تعیین کنید.

تمرین: تعیین کنید که منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{-x^{۲}+۳x+۴}}{x^{۲}-۴x+۳}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$\begin{cases} -x^{۲}+۳x+۴\geq ۰ \to -۱\leq x\leq ۴ \\ x^{۲}-۴x+۳=۰ \to x=۱\,,\, x=۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=[-۱,۱)\cup(۱,۳)\cup(۳,۴]$$

مخرج کسر دو ریشه $x=۳$ و $x=۱$ دارد که همسایگی آنها جزو دامنه ی تابع است.پس به عنوان مجانب افقی قابل قبول هستند.

تمرین: منحنی $y=\frac{\sqrt{۲x-۷}}{۲x^{۲}-۳x+۱}$ تابع چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$\begin{cases} ۲x-۷\geq ۰ \to x\geq \frac{۷}{۲} \\ ۲x^{۲}-۳x+۱=۰ \to x=۱\,,\, x=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow D_f=[\frac{۷}{۲}\,,+\infty)$$

مخرج کسر دو ریشه ی $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ دارد که تابع در همسایگی آنها تعریف نشده است. پس به عنوان مجانب افقی قابـل قبـول نیستند.

تمرین: منحنی تابع $y=\frac{۲\tan x}{۲\sin x-۱}$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$y=\frac{۲\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

حال کافی است که ریشه های مخرج را تعیین کنیم.

$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰$$

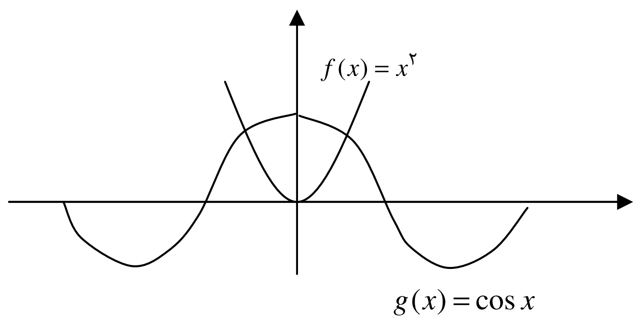
$$\begin{cases} \cos x=۰\to x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},x=\frac{۳\pi}{۲} \\ ۲\sin x-۱=۰\to \sin x=\frac{۱}{۲}\to \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶} \end{cases}\to x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۷\pi}{۶} \end{cases}$$

ریشه های مخرج هیچکدام ریشه ی صورت نیست و لذا همگی مجانب قائم هستند.

تمرین: منحنی تابع $y=\frac{۱}{x^۲-\cos x}$ چند مجانب قائم دارد.

حل:

$$x^۲-\cos x=۰\to x^۲=\cos x$$



برای تعیین تعداد ریشه های مخرج باید محل برخورد دو نمودار $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\cos x$ را بدست آوریم.[1]

چون دو نمودار فقط دو نقطه ی برخورد دارند، پس تابع دو مجانب قائم دارد.

تمرین: منحنی تابع $y=\frac{۱}{x^۳-\cos x}$ چند مجانب قائم دارد.

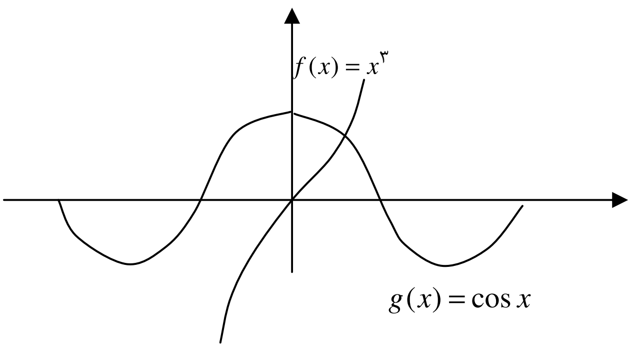
حل:

$$x^۳-\cos x=۰\to x^۳=\cos x$$

[1]. برای حل هر معادله به صورت $f(x)-g(x)=۰$ کافی است ، محل تقاطع نمودار های دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کنیم.

برای تعیین تعداد ریشه های مخرج باید محل برخورد دو نمودار $f(x)=x^{3}$ و $g(x)=\cos x$ را بدست آوریم.

چون دو نمودار فقط یک نقطه ی برخورد دارند، پس تابع یک مجانب قائم دارد.

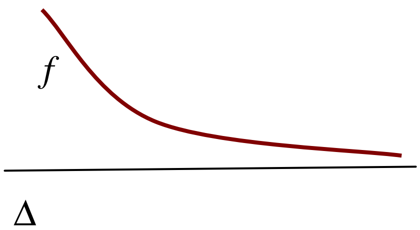


***

☑ **مجانب افقی**

خطی است افقی که متغیر x تابع در امتداد آن به بی نهایت میل می کند.یعنی

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$



معادله ی مجانب افقی $\Leftarrow y=b$

برای تعیین مجانب افقی ابتدا باید دامنه ی تابع را مشخص کنیم و در صورتی که دامنه ی تابع شامل بی نهایت شود، حد تابع را در بی نهایت بدست می آوریم.

تمرین: مجانب های افقی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{۲x^{۲}+۱}$

۲) $f(x)=\dfrac{x+۱}{۳x^{۲}+۴x}$

۳) $f(x)=\sqrt{۴x^{۲}+۸x-۱}-۲x+۳$

۴) $f(x)=\dfrac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۳}}$

۵) $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۳}}$

نتیجه: تابع کسری وقتی دارای مجانب افقی است که درجه ی صورت آن مساوی یا کمتر از درجه ی مخرج باشد.

تمرین: معادله ی مجانب های افقی تابع $y=\dfrac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\dfrac{۴}{x}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x^{۲}+۴x\geq ۰ \rightarrow x\leq -۴ \quad \vee \quad x\geq ۰ \\ -x+۲=۰ \rightarrow x=۲ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,-۴)\cup(۰,۲)\cup(۲,+\infty)$$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{۱}(x+\frac{۴}{۲})}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۲}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=-۱+۰=-۱$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{۱}(x+\frac{۴}{۲})}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x-۲}{-x+۲}+\frac{۴}{x}\right)=۱+۰=۱$$

لذا دو خط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب افقی هستند.

تمرین: مجانب های قائم و افقی تابع $y=\frac{۳x+۵}{|x|-۲}$ را بیابید.

حل:

$$D=R-\{\pm ۲\}$$
$$|x|-۲=۰ \rightarrow |x|=۲ \rightarrow x=\pm ۲$$
$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{|x|-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۵}{x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$
$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۵}{|x|-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۵}{-x-۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{-x}=-۳$$

چون $x=۲$ و $x=-۲$ ریشه ی صورت نیستند، لذا تابع چهار مجانب دارد خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب قائم و خطوط $y=۳$ و $y=-۳$ مجانب افقی هستند.

تمرین: مجانب های افقی و قائم منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}}{x(x^{۲}+۱)}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$-x^{۲}+۳x-۲\geq ۰ \rightarrow ۱\leq x\leq ۲$$
$$x=۰ \qquad \Rightarrow D_f=[۱,۲]$$
$$x^{۲}+۱=۰ \rightarrow \text{غ م}$$

و چون ریشه ی $x=۰$ جزء دامنه نیست پس مجانب قائم نیست و چون x به سمت بینهایت میل نمی کند پس تابع مجانب افقی ندارد.

تمرین: مقدار n و m را طوری بیابید که خط $y=۲$ وقتی $x\to+\infty$ یک مجانب افقی نمودار تابع زیر باشد.

$$f(x)=mx+n+\sqrt{۴x^{۲}-۴۸x+۵}$$

حل:

$$y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[mx+n+\sqrt{۴}(x+\frac{-۴۸}{۸})]=\lim_{x\to+\infty}(mx+n+۲x-۱۲)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[(m+۲)x+(n-۱۲)]\equiv۲\to\begin{cases}m+۲=۰\to m=-۲\\ n-۱۲=۲\to n=۱۴\end{cases}$$

***

☑ **حل چند تمرین:**

۱- در هر مورد مقدار m را چنان بیابید که منحنی داده شده فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

$$۱)\ y=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+mx+۴}\qquad\qquad ۲)\ y=\frac{x-۱}{x^{۲}+mx-۴}$$

حل:

۱) $$x^{۲}+mx+۴=۰\xrightarrow{\Delta=۰}m=\pm۴$$

توجه کنید که در این تابع،صورت ریشه ندارد.

۲) چون دلتای معادله ی همواره مثبت است ($\Delta=m^{۲}+۱۶>۰$) برای حل این مسئله باید ریشه ی صورت را در مخرج قرار دهیم.

$$x-۱=۰\to x=۱$$
$$x^{۲}+mx-۴=۰\to۱+m-۴=۰\to m=۳$$

وضع جدید تابع بصورت زیر خواهد بود که فقط یک مجانب قائم دارد.

$$x^{۲}+۳x-۴=۰\to\begin{cases}x=۱\\ x=-۴\end{cases}$$ مجانب قائم نیست.چون ریشه ی صورت می باشد.

۲- در تابع $y=\dfrac{x+a}{x^{۲}+ax+b}$ مقادیر b و a را طوری بیابید که خطوط $x=-۳$ و $x=۱$ مجانب های قائم منحنی باشند.

حل: چون مخرج درجه ی دوم است پس هر دو مجانب قائم ریشه ی مخرج هستند پس:

$$x=۱\Rightarrow\begin{cases} x^{۲}+ax+b=۰ \\ (۱)^{۲}+a(۱)+b=۰\end{cases}\rightarrow ۱+a+b=۰\rightarrow a+b=-۱$$

$$x=-۳\Rightarrow\begin{cases} x^{۲}+ax+b=۰ \\ (-۳)^{۲}+a(-۳)+b=۰\end{cases}\rightarrow ۹-۳a+b=۰\rightarrow -۳a+b=-۹$$

$$\therefore\begin{cases} a+b=-۱ \\ -۳a+b=-۹\end{cases}\rightarrow a=۲,b=-۳$$

۳- مجانب های افقی منحنی تابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$۱)\, f(x)=\frac{۲x+\sqrt{۴x^{۲}-۲۴x+۱}}{\sqrt{x^{۲}-۲x}+x} \qquad ۲)\; g(x)=Arc\cos\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۲x}}{۲x+۱}$$

حل:

۱)

$$y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{۴}(x+\frac{-۲۴}{۸})}{\sqrt{۱}(x+\frac{-۲}{۲})+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-۶}{۲x-۱}=۲\Rightarrow y=۲$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\sqrt{۴}(x+\frac{-۲۴}{۸})}{-\sqrt{۱}(x+\frac{-۲}{۲})+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۶}{۱}=۶\Rightarrow y=۶$$

۲)

$$y=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}Arc\cos\frac{x+\sqrt{۱}(x-۱)}{۲x+۱}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}Arc\cos\frac{۲x-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}Arc\cos۱=۰\Rightarrow y=۰$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} Arc\cos\frac{x-\sqrt{۱}(x-۱)}{۲x+۱}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} Arc\cos\frac{۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to-\infty} Arc\cos ۰=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=\frac{\pi}{۲}$$

۴- مجانب های افقی و قائم منحنی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$۱)\, f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{x-۱}} \qquad\qquad ۲)\; g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$$

حل:

۱) ابتدا دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

$$\left\langle\begin{array}{l} x+۱>۰\to x>-۱ \\ x-۱>۰\to x>۱\end{array}\right. \to D_f=(۱,+\infty)$$

حال ریشه های مخرج را تعیین می کنیم.

$$\left\langle\begin{array}{l} x+۱=۰\to x=-۱ \\ x-۱=۰\to x=۱\end{array}\right.$$

مجانب قائم نیست.چون تابع در مجاورت آن تعریف نشده است.

حال حد تابع را وقتی $x\to+\infty$ تعیین می کنیم.

$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}=۰-۰=۰\Rightarrow y=۰$$

توجه کنید که با توجه به دامنه،تابع به سمت $-\infty$ میل نمی کند.

۵- مقدار n و m را طوری بیابید که خط $y=۲$ وقتی $x\to+\infty$ یک مجانب افقی نمودار تابع زیر باشد.

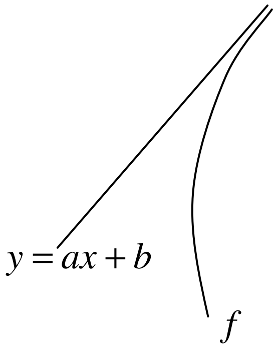
$$f(x)=mx+n+\sqrt{۴x^۲-۴۸x+۵}$$

حل:

$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[mx+n+\sqrt{۴}(x+\frac{-۴۸}{۸})]=\lim_{x\to+\infty}(mx+n+۲x-۱۲)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[(m+۲)x+(n-۱۲)]\equiv ۲\to\left\langle\begin{array}{l} m+۲=۰\to m=-۲ \\ n-۱۲=۲\to n=۱۴\end{array}\right.$$

***

☑ مجانب مایل



خطی است مایل (نه افقی و نه قائم) که تابع در امتداد آن به بینهایت میل می کند.به عبارت دیگر وقتی $x \to \pm\infty$ آنگاه $y \to \pm\infty$ ممکن است نمودار تابع f دارای مجانب مایل باشد.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \vee -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \vee -\infty$$

خط $y = ax + b$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim_{x \to +\infty} | f(x) - (ax + b) | = 0$

ب) $\lim_{x \to -\infty} | f(x) - (ax + b) | = 0$

نکته ی ۱: برای تعیین مجانب مایل تابع $y = f(x)$ در صورتی که آن را بصورت $y = ax + b$ نمایش دهیم، از روابط زیر استفاده می کنیم.

$$y = ax + b \to \begin{cases} a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

تمرین: معادلات مجانب های منحنی تابع $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ را بدست آورید.

حل:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \to \quad x = 2 \quad , \quad x = 3$$

چون $x = 3$ و $x = 2$ ریشه های صورت نیستند پس مجانب قائم می باشند. از طرفی

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

پس تابع مجانب افقی ندارد و مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۳}-۵x^{۲}+۶x}=۱$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^{۳}+۳x^{۲}+۴x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۸x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۵x+۶}=۸$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\rightarrow y=x+۸$$

تمرین: معادلات خطوط مجانب های منحنی $y=\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x$ را تعیین کنید.

حل: منحنی مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x)=-۲$$

پس خط $y=-۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x)=\lim_{x\to-\infty}(-۲x+۲)=+\infty$$

پس تابع مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x+۲}{x}=-۲$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x+۲x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{۱}(x+\frac{-۴}{۲(۱)})+x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+۲+x)=۲$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\rightarrow y=-۲x+۲$$

تمرین: مجانب مایل منحنی تابع $y=\dfrac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۴x^{۲}-۱}}$ را بدست آورید.

حل:

$$۴x^۲-۱\geq ۰\to(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-x^۲}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^۲}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲}=-\infty$$

لذا تابع مجانب مایل دارد.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{۲x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^۲}{۲x^۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}+\frac{۱}{۲}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}+\frac{۱}{۲}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱-x^۲}{۲x}+\frac{۱}{۲}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-x^۲}{۲x}+\frac{۱}{۲}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-x}{۲}+\frac{۱}{۲}x)=۰$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y=ax+b\to y=-\frac{۱}{۲}x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱-x^۲}{-\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱-x^۲}{-۲x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲}{-۲x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۲}=-\infty$$

لذا تابع مجانب مایل دیگر دارد.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{-\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱-x^۲}{-۲x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲}{-۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{۱-x^۲}{\sqrt{۴x^۲-۱}}-\frac{۱}{۲}x)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{۱-x^۲}{-\sqrt{۴}(x-\frac{۰}{۲})}-\frac{۱}{۲}x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (\frac{1-x^2}{-2x} - \frac{1}{2}x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{-x^2}{-2x} - \frac{1}{2}x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x) = 0$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y = ax + b \to y = \frac{1}{2}x$$

نکته ی ۲: در توابع رادیکالی در صورتی که هم ارزی نیوتنی قابل استفاده باشد. می توان به جای رادیکال هم ارزی نیوتن را قرار داد. بدین شکل بجای استفاده از روش فوق مستقیماً مجانب مایل بدست می آید.

تمرین: مجانب های منحنی تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x$ را بیابید.

حل: منحنی مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1}(x + \frac{-4}{2(1)}) - x) = -2$$

پس خط $y = 2$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x) = \lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{1}(x + \frac{-4}{2(1)}) - x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x + 2) = +\infty$$

پس تابع مجانب مایل دارد و مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

$$y = -\sqrt{1}(x + \frac{-4}{2(1)}) - x = -2x + 2$$

تمرین: مجانب های مایل تابع $y = 2x + 1 + \dfrac{2x - \sqrt{x^2 - 6x}}{x + 4}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} (2x + 1 + \frac{2x - \sqrt{x^2 - 6x}}{x + 4}) = \lim_{x\to+\infty} (2x + 1 + \frac{2x - \sqrt{1}(x + \frac{-6}{2})}{x + 4})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (2x + 1 + \frac{2x - x + 3}{x + 4}) = \lim_{x\to+\infty} (2x + 1 + \frac{x + 3}{x + 4}) = \lim_{x\to+\infty} (2x + 2) = +\infty$$

تابع مجانب مایل دارد و آن می شود:

$$y = 2x + 1 + \frac{2x - \sqrt{1}(x + \frac{-6}{2})}{x + 4} = 2x + 1 + \frac{2x - x + 3}{x + 4} = 2x + 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+1+\frac{2x-\sqrt{x^2-6x}}{x+4})=\lim_{x\to-\infty}(2x+1+\frac{2x+\sqrt{1}(x+\frac{-6}{2})}{x+4})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(2x+1+\frac{2x+x-3}{x+4})=\lim_{x\to-\infty}(2x+1+\frac{3x-3}{x+4})=\lim_{x\to-\infty}(2x+4)=-\infty$$

تابع مجانب مایل دیگر دارد و آن می شود:

$$y=2x+1+\frac{2x+\sqrt{1}(x+\frac{-6}{2})}{x+4}=2x+1+\frac{2x+x-3}{x+4}=2x+4$$

تمرین: مقدار m را طوری بیابید که خط $y=3x-2$ مجانب مایل منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-2mx^2-2x+1}+2x$ باشد.

حل:

مجانب مایل $y=\sqrt[3]{1}(x-\frac{2m}{3})+2x=3x-\frac{2m}{3}$

$$\begin{cases} y=3x-\frac{2m}{3} \\ y=3x-2 \end{cases}\to 3x-\frac{2m}{3}=3x-2\to m=3$$

نکته ی۳: توابع کسری در صورتی مجانب مایل دارند که درجه ی صورت بیشتر از درجه ی مخرج باشد. اگر درجه ی صورت برابر یا کمتر از درجه ی مخرج باشد، مجانب افقی دارند.

نکته ی۴: در توابع کسری اگر درجه ی صورت از درجه ی مخرج یک واحد بیشتر باشد، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج همان مجانب مایل است.

تمرین: مجانب مایل منحنی $y=\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+1}$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+1 & x^2+1 \\ \underset{-}{}x^3\underset{+}{}\underset{-}{}x & \overline{x-2} \\ \hline -2x^2-x+1 & \\ \underset{+}{-}2x^2\underset{+}{-}2 & \\ \hline -x+3 & \end{array}\qquad \frac{x^3}{x^2}=x,\quad \frac{-2x^2}{x^2}=-2$$

پس مجانب مایل می شود: $y=x-2$

تمرین برای حل : تمام مجانب های تابع $y=\frac{x^3+4x^2-1}{-x^2+9}$ را تعیین کنید.

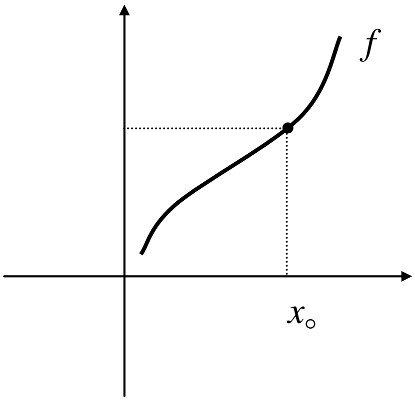
***

☑ پیوستگی

آشنایی با مفهوم پیوستگی برای بررسی دقیق تر رفتار توابع در بیشتر اوقات لازم و ضروری است. در اینجا مفهوم پیوستگی تابع را در یک نقطه و همچنین یک فاصله بررسی می کنیم.

الف) پیوستگی در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ در نقطه ای به طول $x_\circ$ پیوسته گویند، اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد.



۱) مقدار $f(x_\circ)$ موجود باشد.

(یعنی تابع $x_\circ$ در دامنه ی تابع باشد.)

۲) مقدار $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ موجود باشد.

(یعنی حد راست وحد چپ در این نقطه برابر باشند.)

۳) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$

اگر یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد،تابع f را در نقطه ی $x_\circ$ ناپیوسته« گسسته»[1] می گویند.

نتیجه: تابع $y=f(x)$ در نقطه ای به طول $x_\circ$ پیوسته است، اگر و فقط اگر

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=f(x_\circ)$$

تمرین: در هر مورد پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۳ & x\ge -۲\\ x^۲+۳ & x<-۲\end{cases} \quad : \quad x_\circ=-۲$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\ne ۲\\ x & x=۲\end{cases} \quad : \quad x_\circ=۲$

ج) $f(x)=\begin{cases}x^۲+x & x>-۲\\ ۲x+۱ & x\le -۲\end{cases} \quad : \quad x_\circ=-۲$

د) $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x & x>-۱\\ x^۲+۱ & x<-۱\end{cases} \quad : \quad x_\circ=-۱$

هـ) $f(x)=[x] \qquad x_\circ=۳$

تمرین: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطه ی $x_\circ=۲$ بررسی کنید.

---

[1] . نمودار تابع در این نقطه بریدگی یا پرش دارد.

تمرین: در تابع زیر مقدار k را چنان بیابید که تابع در نقطه ی $x_{\circ}=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x+k & x=۱ \\ \dfrac{۲}{x-۱}\sin(x-۱) & x\neq ۱ \end{cases}$$

تمرین: در تابع $f(x)=k[x]+[x+۱]$ مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه ی $x_{\circ}=۱$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(x)=k[x]+[x+۱]=k[x]+[x]+۱=(k+۱)[x]+۱$$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}[(k+۱)[x]+۱]=(k+۱)[۱^{+}]+۱=k+۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}[(k+۱)[x]+۱]=(k+۱)[۱^{-}]+۱=۱$

مقدار $f(۱)=(k+۱)[۱]+۱=k+۲$

$$\therefore k+۲=۱\Rightarrow k=-۱$$

تمرین: در تابع زیر مقدار b و a را چنان بیابید که تابع در نقطه ی $x_{\circ}=۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+a & x>۲ \\ bx+۱ & x<۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

حل:

مقدار $f(۲)=۳$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(۲x+a)=۴+a$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(bx+۱)=۲b+۱$

$$\Rightarrow ۴+a=۲b+۱=۳\Rightarrow \begin{cases} ۴+a=۳\rightarrow a=-۱ \\ ۲b+۱=۳\rightarrow b=۱ \end{cases}$$

تمرین: تابع زیر در نقطه ی $x_{\circ}=۰$ پیوسته است. مقدار b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a & x=0\\ [x]+b & x>0\end{cases}$$

حل:

مقدار $f(0)=a$

حد راست $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}([x]+b)=0+b=b$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}\,|\sin x|}=$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-\sqrt{2}\sin x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

توجه:

$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$ و چون $x\to 0^-$ یعنی $x<0$ پس x در ربع چهارم دایره ی مثلثاتی قرار دارد و لذا $\sin x<0\to|\sin x|=-\sin x$

***

☑ پیوستگی راست و پیوستگی چپ در یک نقطه

اگر حد راست تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، می گویند تابع در آن نقطه پیوستگی راست دارد.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

اگر حد چپ تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، می گویند تابع در آن نقطه پیوستگی چپ دارد.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

نتیجه: یک تابع در یک نقطه پیوسته است هرگاه در این نقطه پیوستگی راست وپیوستگی چپ داشته باشد.

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

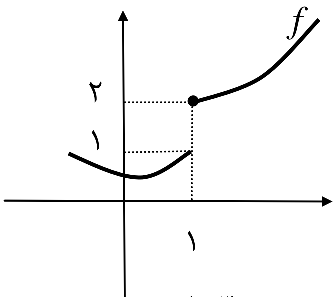
تمرین: در هر مورد پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده را بررسی کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x-۳ & x>-۲ \\ ۳x-۱ & x<-۲ \\ -۳ & x=-۲ \end{cases} \quad : \quad x_\circ=-۲$$

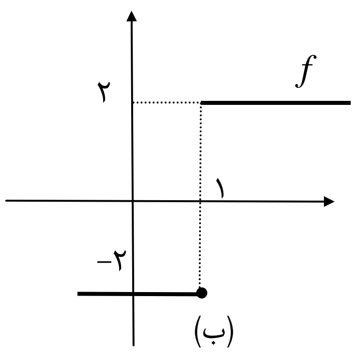
$$۲)\ f(x)=\begin{cases} x^۳-۱ & x>۲ \\ \dfrac{۳x+۱}{x-۱} & x<۲ \\ ۵ & x=۲ \end{cases} \quad : \quad x_\circ=۲$$

$$۳)\ f(x)=\begin{cases} x-[x] & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases} \quad : \quad x_\circ=۲$$

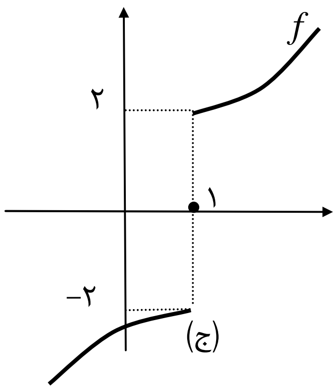
تمرین: در هر مورد پیوستگی تابع داده شده را در نقطه ی $x_\circ=۱$ بررسی کنید.



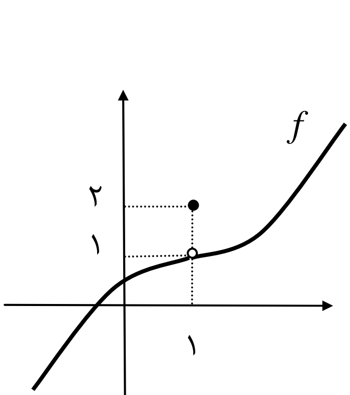
(الف)



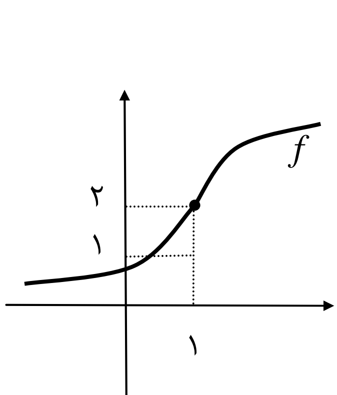
(ب)



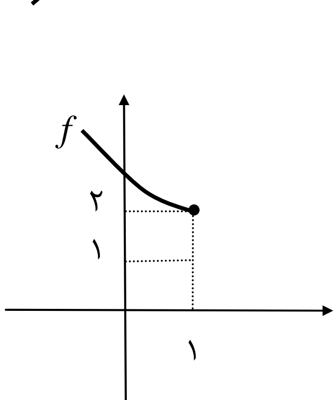
(ج)



(د)



(هـ)



(و)

تمرین: مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه ی $x_\circ=۴$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x-k & x>۴ \\ ۵+\sin(۳x-۱۲) & x=۴ \\ -x+۱ & x<۴ \end{cases}$$

***

☑ قضایای پیوستگی

قضیه ی ۱) هرگاه دو تابع g و f در $x_\circ$ پیوسته باشند.آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب آنها نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

ب) اگر $g(x_\circ)\neq ۰$ باشد. $\frac{f}{g}$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

قضیه ی ۲) اگر تابع g در $x_\circ$ و تابع f در $g(x_\circ)$ پیوسته باشند،تابع fog در $x_\circ$ پیوسته است.

نتیجه: اگر تابع f در $x_\circ$ پیوسته باشد،آنگاه

الف)تابع kf نیز در $x_\circ$ پیوسته است.($k\in R$)

ب) تابع f^n نیز در $x_\circ$ پیوسته است.($n\in N$)

ج) تابع $|f|$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

د) تابع $\sqrt{f}$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است،به شرط اینکه $f(x_\circ)\geq ۰$ باشد.

تذکر: عکس قضیه های فوق درست نمی باشد یعنی ممکن است دو تابع مانند g و f در یک نقطه پیوسته نباشند ولی مجموع یا حاصل ضرب آنها در آن نقطه پیوسته است.

برای مثال دو تابع زیر در نقطه ی $x_\circ=۰$ پیوسته نیستند ولی مجموع آنها در نقطه ی $x_\circ=۰$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ ۱ & x<۰ \end{cases} \qquad و \qquad g(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases} ۲x^۲ & x\geq ۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases}$$

همچنین ممکن است تابع fog در نقطه ی x_0 پیوسته باشد، ولی g در x_0 پیوسته نباشد. برای مثال در تابع های زیر g در نقطه ی $x_0=0$ پیوسته نیست ولی fog در این نقطه پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}-2x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases} \qquad \text{و} \qquad g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$$

$$IF: x\geq 0 \xrightarrow{2x\geq 0} g(x)=2x \Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(2x)=1$$
$$IF: x<0 \rightarrow g(x)=1 \Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(1)=1$$

....

$$\lim_{x\to 0^+}(fog)(x)=\lim_{x\to 0^+}(f(g(x))=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

.

$$\lim_{x\to 0^-}(fog)(x)=\lim_{x\to 0^-}(f(g(x))=\lim_{x\to 0^-}1=1$$

.

$$(fog)(0)=(f(g(0))=f(0)=1$$

***

انواع ناپیوستگی در یک نقطه

ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه مانند x_0 را می توان به دو دسته تقسیم کرد.

۱ : ناپیوستگی رفع شدنی

در این نوع ناپیوستگی تابع در نقطه ی x_0 حد دارد ولی مقدار تابع در این نقطه یا تعریف نشده است یا با حد تابع برابر نیست. در این مورد می توان با جایگزینی عدد مناسبی برای مقدار تابع ، تابع جدیدی تعریف کرد که در نقطه ی x_0 پیوسته باشد.

تمرین : ابتدا نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=1$ پیوسته نیست. سپس با انتخاب مقدار مناسبی برای $f(1)$ تابع جدیدی تعریف کنید که در این نقطه پیوسته شود.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$$

حل: ابتدا دامنه ی تابع داده شده را تعیین می کنیم.

$$x^2+4x-5=0 \rightarrow (x-1)(x+5)=0 \rightarrow x=1,\ x=-5$$

$$\Rightarrow D_f=R-\{1,-5\}$$

حال چون $x=1$ در دامنه ی تابع نیست، لذا مقدار تابع در این نقطه یعنی $f(1)$ وجود ندارد. پس تابع در این نقطه پیوسته نیست.

اکنون حد تابع در نقطه ی $x=1$ را محاسبه و $f(1)$ را برابر مقدار حد قرار می دهیم.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+5}=\frac{1+1}{1+5}=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5} & x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{3} & x=1\end{cases}$$

۲ : ناپیوستگی اساسی (رفع نشدنی)

در این نوع ناپیوستگی تابع در نقطه ی x_0 حد ندارد (یا یکی از حد های راست و چپ موجود نیستند و یا موجود هستند ولی برابر نمی باشند.)

تمرین : نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=2$ ناپیوستگی اساسی دارد.

$$f(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$$

حل : کافی است که نشان دهیم تابع در نقطه ی داده شده حد ندارد.

حد راست $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$

حد چپ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{-(x-2)}=-1$

تمرین: پیوستگی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ را در نقطه ی $x=0$ بررسی کنید.

حل:

$D_f=R-\{0\}$

مقدار $f(0)=$ وجود ندارد .

حد راست $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

لذا تابع f در نقطه ی $x=0$ پیوسته نیست.

تمرین: با توجه به تمرین قبل $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع در در نقطه ی $x=0$ پیوسته شود.

حل: اگر تعریف کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

در این صورت داریم :

$D_f=R$

مقدار $f(0)=1$

حد راست $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

لذا تابع در نقطه ی $x=0$ پیوسته خواهد شد.

تمرین برای حل : در هر مورد نوع ناپیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده، تعیین و در صورت امکان تابع جدیدی تعریف کنید که پیوسته باشد.

۱) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

۳) $f(x)=\sqrt{x-3}$ $\quad x_0=3$

۲) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>1\\ 3 & x=1\\ 2+\sin(2\pi x) & x<1\end{cases}$ $\quad x_0=1$

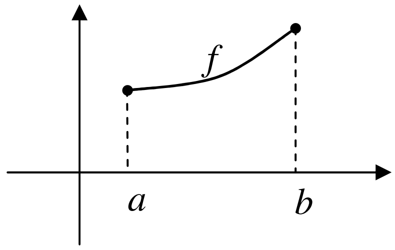
۴) $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x>2\\ 3x & x=2\\ \cos(\pi x) & x<2\end{cases}$ $\quad x_0=2$

تمرین برای حل: توابع زیر در نقطه ی $x=0$ پیوسته نیستند. $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع در این نقطه پیوسته شود.

۱) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ ۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$

***

ب) پیوستگی در یک فاصله



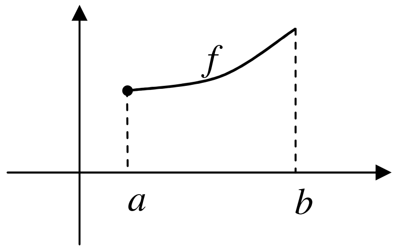
تعریف۱: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=[a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) در نقطه ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

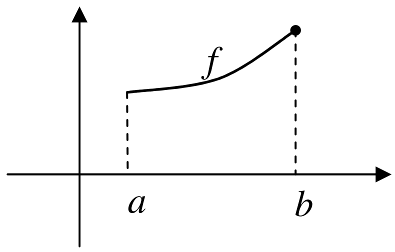
***



تعریف۲: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=[a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

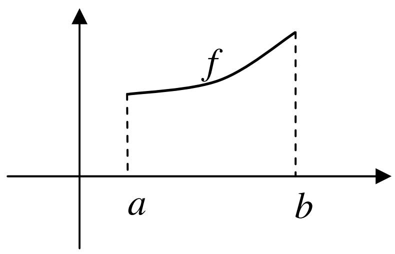


تعریف۳: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=(a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***



تعریف۴ : تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=(a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط فاصله ی این فاصله پیوسته باشد.

***

تمرین: پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله ی $[1,2)$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه ی $x=1$ پیوستگی راست دارد.

مقدار $f(1)=[1]=1$

حد راست $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]=۱$

تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله ی $(۱,۲)$ پیوسته است.گیریم که $x_\circ \in (۱,۲)$ پس $[x_\circ]=۱$

مقدار تابع $f(x_\circ)=[x_\circ]=۱$

حد راست $\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=[x_\circ^+]=۱$

حد چپ $\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=[x_\circ^-]=۱$

تابع در تمام نقاط فاصله ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

***

تمرین برای حل:

۱ : پیوستگی تابع $f(x)=۲[x]+۱$ را در فاصله ی $[۳,۴)$ بررسی کنید.

۲ : پیوستگی تابع $f(x)=[x]-۱$ را در فاصله ی $(۳,۵)$ بررسی کنید.

تعریف : فاصله ای که یک تابع در آن پیوسته باشد را فاصله ی پیوستگی می نامند. برای تعیین فاصله ی پیوستگی یک تـابع ، نقـاط ناپیوستگی آن را از دامنه حذف می کنیم.

تمرین: ابتدا دامنه ی تابع زیر را بدست آورده و سپس فاصله ی پیوستگی آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=\{x\mid x\geq ۱\}\cup\{x\mid x<۱\}=R$

حال پیوستگی تابع را در نقطه ی $x_\circ=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱\}=(-\infty,۱)\bigcup(۱,+\infty)$$

تمرین: فاصله ی پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=۵x^۳-۲x+۱$

۲) $f(x)=\frac{۳x-۱}{x^۲-۴}$

۳) $f(x)=\sqrt{x-۳}$

۴) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

۵) $f(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x^۲-۹}}$

۶) $f(x)=\frac{\sqrt{۳-x}}{|x|-۴}$

نتیجه:

۱- هر تابع چند جمله ای به ازاء جمیع مقادیر حقیقی پیوسته است.

۲- هر تابع کسری به ازاء جمیع مقادیر حقیقی به جز ریشه های مخرج آن پیوسته است.

۳- هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) به ازاء همه ی مقادیر حقیقی که زیر رادیکال را نامنفی کنند، پیوسته است.

تمرین: فاصله ی پیوستگی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$

تمرین: ثابت کنید که تابع زیر در R پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & x<۱\\ x-[x] & ۱\le x<۲\\ -x+۳ & x\ge ۲\end{cases}$$

تمرین: مقدار b و a را طوری بیابید که تابع زیر در R پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x} & x<۱\\ ax+b & ۱\le x<۳\\ x^۲ & x\ge ۳\end{cases}$$

***

توجه:

۱ : یک تابع کسری به تعداد ریشه های مخرج آن نقطه ی ناپیوستگی دارد.

۲ : یک تابع کسری وقتی همواره پیوسته است که مخرج آن ریشه نداشته باشد.

تمرین برای حل:

۱: نقاط ناپیوستگی تابع را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{-۵}{x-۴x^{۳}}$$

۲: به ازاء چه مقادیری از m تابع f به معادله ی $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+mx+۱}$ همواره پیوسته است .

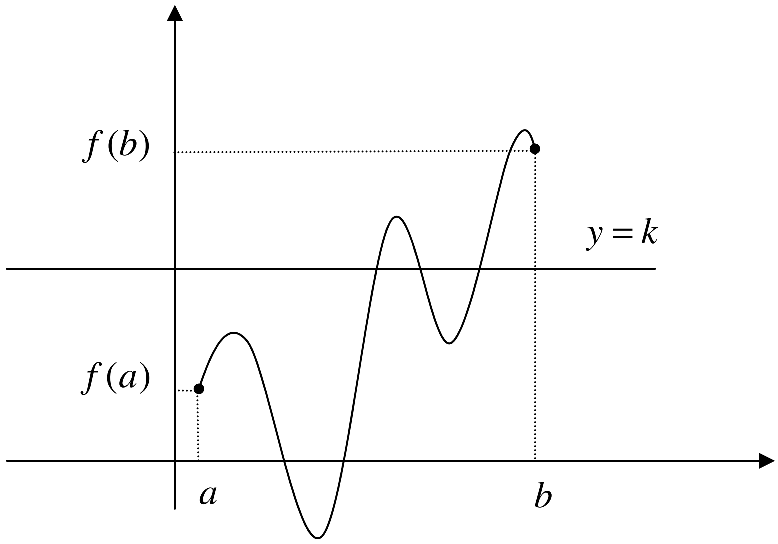
❋❋❋

☑ کاربرد پیوستگی

در این قسمت به یک کاربرد برای مفهوم پیوستگی یک تابع ، که در حل بسیاری از مسائل مفید است، اشاره می کنیم.

قضیه: (قضیه ی مقدار میانی) اگر تابع f در بازه ی بسته ی $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر عدد حقیقی k بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد.آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند $x_\circ$ در بازه ی $[a,b]$ وجود دارد که $f(x_\circ)=k$

به عبارت دیگر خط $y=k$ نمودار f را حتماً در یک یا چند نقطه قطع می کند.



تمرین: نشان دهید که نمودار تابع $f(x)=۱+\sin x$ در فاصله ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ خط $y=\frac{۳}{۲}$ را قطع می کند.

حل: تابع f در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجه در فاصله ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{۲})=۱+\sin\frac{\pi}{۲}=۱+۱=۲ \\ f(\pi)=۱+\sin\pi=۱+۰=۱ \end{cases}$$

و چون $f(\pi)=۱<\frac{۳}{۲}<f(\frac{\pi}{۲})=۲$ پس خط $y=\frac{۳}{۲}$ نمودار تابع را در این فاصله قطع می کند.

تمرین: ثابت کنید که معادله ی $x^۳-۳x+۱=۰$ در بازه ی $[۰,۱]$ دارای حداقل یک ریشه است.[1]

[1] . ریشه ی یک معادله ، طول نقطه ی تقاطع نمودار تابع متناظر آن با محور طول ها است.

حل:

اولاً: تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ یک تابع چند جمله ای است و لذا در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجه در فاصله ی $[۰,۱]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(۰)=۱ \\ f(۱)=-۱ \end{cases}$$

و چون $f(۱)=-۱<۰<f(۰)=۱$ پس طبق قضیه ی مقدار میانی حداقل یک عدد $x_{\circ}\in[۰,۱]$ وجود دارد بطوری که $f(x_{\circ})=۰$ (یعنی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور طولها را قطع می کند.)

تمرین: تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)+x^{۲}$ داده شده است.

الف) نشان دهید که معادله ی $f(x)=۰$ در بازه ی $[۰,۱]$ دارای حداقل یک ریشه است.

ب) نشان دهید که خط $y=\sqrt{۱۷}$ نمودار تابع f را در فاصله ی $[۲,۳]$ قطع می کند.

حل:

الف: تابع داده شده یک تابع چند جمله ای است و لذا در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجه در فاصله ی $[۰,۱]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(۰)=-۶ \\ f(۱)=۱ \end{cases}$$

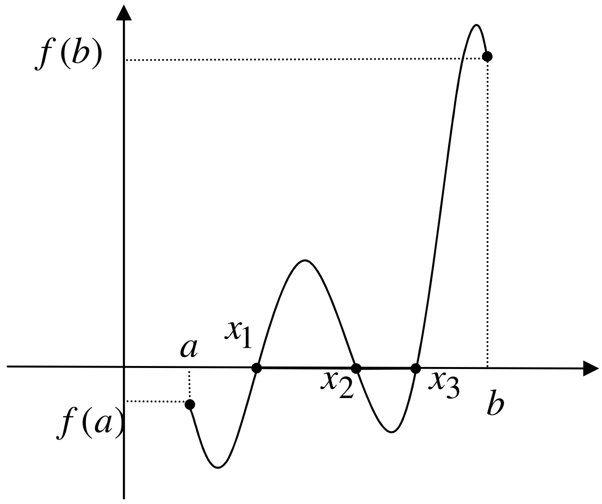
و چون $f(۰)=-۶<۰<f(۱)=۱$ پس طبق قضیه ی مقدار میانی حداقل یک عدد $x_{\circ}\in[۰,۱]$ وجود دارد، بطوری که $f(x_{\circ})=۰$ (یعنی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور طولها را قطع می کند.)

ب: تابع در فاصله ی $[۲,۳]$ نیز پیوسته است و چون $f(۲)=۴<\sqrt{۱۷}<f(۳)=۹$ پس خط $y=\sqrt{۱۷}$ نمودار تابع را در این فاصله قطع می کند.

***

نتیجه: (قضیه ی بولتزانو)

اگر تابعی در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و مقدار آن در نقطه ی a مثبت و در نقطه ی b منفی یا برعکس باشد (بطور کلی $f(a)\times f(b)<0$) . آنگاه در نقطه ای مانند x_0 واقع در بازه ی (a,b) مقدار آن صفر می شود. یعنی حداقل یک نقطه مانند از فاصله ی (a,b) وجود دارد که $f(x_0)=0$ شود. به عبارت دیگر تابع $f(x)$ در فاصله ی (a,b) حداقل یک ریشه به نام x_0 دارد.



تمرین: نشان دهید که تابع $f(x)=-3x^2+\cos 2\pi x$ در بازه ی $[0,1]$ محور x ها را حداقل در یک نقطه قطع می کند.

حل: تابع f در بازه ی $[0,1]$ پیوسته است و

$$\begin{cases} f(0)=-3(0)^2+\cos 2\pi(0)=0+\cos 0=0+1=1 \\ f(1)=-3(1)^2+\cos 2\pi(1)=-3+\cos 2\pi=-3+1=-2 \end{cases} \rightarrow f(0)\times f(1)<0$$

پس بنابر قضیه ی بولتزانو ، تابع f حداقل در یک نقطه واقع در فاصله ی $(0,1)$ محور x ها را قطع می کند.

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt{3}-2\tan x$ مفروض است. نشان دهید که معادله ی $f(x)=0$ در بازه ی $[0,\frac{\pi}{3}]$ دارای ریشه است.

حل: تابع f در بازه ی $[0,\frac{\pi}{3}]$ پیوسته است و

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{3} \\ f(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow f(0)\times f(\frac{\pi}{3})<0$$

پس بنا بر قضیه ی بولتزانو حداقل یک نقطه مانند x_0 واقع در فاصله ی $(0,\frac{\pi}{3})$ وجود دارد که $f(x_0)=0$

تمرین: نشان دهید که معادله ی $x^3-3x^2=-2$ در بازه ی $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

حل: تابع $f(x)=x^{3}-3x^{2}+2$ را تعریف می کنیم . این تابع یک تابع چند جمله ای است . پس در تمام اعداد حقیقی و همچنین در فاصله ی $[0,2]$ پیوسته است و

$$\begin{cases} f(0)=(0)^{3}-3(0)^{2}+2=2 \\ f(2)=(2)^{3}-3(2)^{2}+2=-2 \end{cases} \to f(0)\times f(2)<0$$

پس بنا بر نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی (قضیه ی بولتزانو) حداقل یک نقطه مانند x_{0} واقع در فاصله ی $(0,2)$ وجود دارد که $f(x_{0})=0$ یعنی $x_{0}^{3}-3x_{0}^{2}+2=0$. به عبارت دیگر معادله دارای ریشه است.

تمرین: نشان دهید که معادله ی $(x-1)(x+1)(x-3)+x^{2}-2x=0$ در بازه ی $[-2,2]$ دو ریشه دارد و علامت ریشه ها را معلوم کنید.

حل: تعریف می کنیم $f(x)=(x-1)(x+1)(x-3)+x^{2}-2x$. این تابع در مجموعه ی اعداد حقیقی پیوسته است و لذا در این فاصله نیز پیوسته است. از طرفی چون

$$\begin{cases} f(-2)=-7 \\ f(0)=3 \end{cases} \Rightarrow f(-2)\times f(0)<0 \quad , \quad \begin{cases} f(0)=3 \\ f(2)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(0)\times f(2)<0$$

همچنین تابع در بازه های $[-2,0]$ و $[0,2]$ پیوسته است.پس بنابر قضیه ی بولتزانو معادله ی $f(x)=0$ در هر یک از بازه های $(-2,0)$ و $(0,2)$ حداقل یک ریشه دارد و در نتیجه تابع f در بازه ی $[-2,2]$ حداقل دو ریشه ی مختلف العلامه دارد.

تمرین: نشان دهید که منحنی $f(x)=\dfrac{x^{2}+1}{4x-2\sin x-1}$ در بازه ی $[0,1]$ حداقل یک نقطه ی ناپیوستگی دارد.

حل: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}+1}{4x-2\sin x-1}$ ریشه های مخرج می باشند. پس کافی است ثابت کنیم که معادله ی $4x-2\sin x-1=0$ در بازه ی $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد. تعریف می کنیم $g(x)=4x-2\sin x-1$ و چون تابع g در فاصله ی $[0,1]$ پیوسته بوده و

$$\begin{cases} g(0)=2(0)-2\sin 0-1=-1 \\ g(1)=2(1)-2\sin 1-1>0 \end{cases} \to f(0)\times f(1)<0$$

پس طبق قضیه ی بولتزانو معادله ی $g(x)=0$ در بازه ی $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد.

فصل سوّم (مشتق و کاربرد آن)

فهرست مطالب فصل سوّم

توابع متناوب

رسم نمودار توابع مثلثاتی

حل مسائل پارامتری

حل مسائل بهینه سازی

قضیه ی رول

قضیه ی مقدار میانگین(قضیه ی لاگرانژ)

قضیه ی مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیه ی کوشی)

قضیه ی مشتق تابع ثابت

دیفرانسیل تابع

تعبیر هندسی دیفرانسیل

☑ مشتق

یکی دیگر از مفاهیم اساسی ریاضیات، مفهوم مشتق است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت بیشتر رفتار توابع می شود. در اینجا مفهوم مشتق تابع را در یک نقطه و همچنین یک فاصله بررسی می کنیم. سپس به روش های مشتق گیری از توابع می پردازیم.

الف) مشتق تابع در یک نقطه

اگر $y = f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه ی $x_\circ$باشد. در این صورت مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطـه ی $x_\circ$ را بـه صـورت زیـر تعریف می کنندو آنرا با $f'(x_\circ)$ نمایش می دهند.

$$f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

تمرین : مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۵x - ۱$ را در نقطه ی $x_\circ = ۲$ به دست آورید.

حل :

$$f(۲) = (۲)^۲ + ۵(۲) - ۱ = ۱۳$$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{(x^۲ + ۵x - ۱) - (۱۳)}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ + ۵x - ۱۴}{x - ۲} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x \to ۲} \frac{(x - ۲)(x + ۷)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} (x + ۷) = ۲ + ۷ = ۹$$

تمرین برای حل : مشتق توابع زیر را در نقطه ی داده شده محاسبه کنید.

۱) $f(x) = ۳x - ۱ \quad : \quad x_\circ = ۲$

۲) $f(x) = -۲x + ۳ \quad : \quad x_\circ = -۱$

۳) $f(x) = x^۲ - ۳x \quad : \quad x_\circ = ۱$

۴) $f(x) = x^۳ + ۳x \quad : \quad x_\circ = ۱$

۵) $f(x) = \frac{۱}{x} \quad : \quad x_\circ = ۲$

۶) $f(x) = \sqrt{x} \quad : \quad x_\circ = ۴$

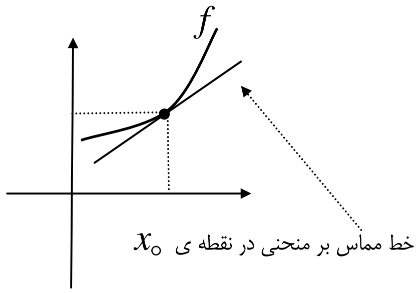
۷) $f(x) = \sin x \quad : \quad x_\circ = ۰$

۸) $f(x) = \cos x \quad : \quad x_\circ = \frac{\pi}{۲}$

***

تعبیر هندسی مشتق

اگر $y=f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه ی $x_\circ$ باشد . در این صورت مشتق تابع در نقطه ی $x_\circ$ با شیب خط (ضریب زاویه) مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.



$$m=f'(x_\circ)$$

شیب خط مماس $=m$

$f'(x_\circ)=$مشتق در نقطه ی $x_\circ$

***

تمرین: شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)=x^{۲}$ در نقطه ی $x_\circ=۱$ را بدست آورید.

حل:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲$$
$$\therefore m=f'(۱)=۲$$

تمرین : با توجه به تمرین قبل معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی $x_\circ=۱$ را بنویسید.

حل: ابتدا عرض نقطه ی داده شده را با توجه به تابع تعیین می کنیم.

$$x_\circ=۱\to y_\circ=(۱)^{۲}=۱$$

لذا معادله ی خط مماس به صورت زیر است.

$$y=m(x-x_\circ)+y_\circ\to y=۲(x-۱)+۱\to y=۲x-۱$$

***

تمرین برای حل :

شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ را در نقطه ی $x_\circ=۳$ بدست آورید. سپس معادله ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع را دراین نقطه را بنویسید.

***

مشتق راست و مشتق چپ تابع در یک نقطه (مشتقات یک طرفه)

اگر $y=f(x)$ یک تابع باشد، مشتق راست و مشتق چپ آن در نقطه ی $x=x_\circ$ به صورت زیر تعریف می شوند.

مشتق راست
$$f'_+(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

مشتق چپ
$$f'_-(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

تمرین : مشتق راست و مشتق چپ تابع زیر را در نقطه ی $x_\circ=۲$ تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\le ۲ \\ -۳x+۱۰ & x>۲ \end{cases}$$

***

تمرین برای حل : مشتق راست و مشتق چپ تابع $f(x)=۲|x+۱|-۳$ را در نقطه ی $x=-۱$ بدست آورید.

***

تذکر : تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x=x_\circ$ مشتق پذیر است، هرگاه:

الف) در این نقطه پیوسته باشد.

ب) مشتق راست و مشتق چپ آن در این نقطه موجود و برابر باشند.

***

تمرین: مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x_\circ=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\le ۲ \\ -۳x+۱۰ & x>۲ \end{cases}$$

***

تمرین: نمودار تابع تمرین قبل را رسم کنید و شیب خط مماس بر نمـودار را در نقـاط کمتـر و در نقـاط بیـشتر از نقطـه ی $x_\circ = ۲$ مقایسه کنید.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x-۱|$ را در نقطه ی $x_\circ = ۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x-۱ & x \geq ۱ \\ -(x-۱) & x < ۱ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۱) = ۱-۱ = ۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۱-۱ = ۰$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱-۱) = ۰$

تابع در نقطه ی $x_\circ = ۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{(x-۱)-۰}{x-۱} = ۱$

مشتق چپ $f'_-(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{-(x-۱)-۰}{x-۱} = -۱$

تابع در نقطه ی $x_\circ = ۱$ مشتق پذیر نیست.

***

تمرین : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x_\circ = ۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ ۱+x\sin x & x<۰ \end{cases}$$

حل **:** ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۰)=(۰)^{۲}+۱=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰)^{۲}+۱=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱+(۰)\sin(۰)=۱$

تابع در نقطه ی $x_\circ = ۰$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{(x^{۲}+۱)-۱}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x^{۲}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+} x=۰$

مشتق چپ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{(۱+x\sin x)-۱}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\sin x=۰$

تابع در نقطه ی $x_\circ = ۰$ مشتق پذیر است.

***

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در نقاط $x_\circ = ۱$ و $x_\circ = -۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۱ \\ -(x^{۲}-۱) & -۱<x<۱ \\ x^{۲}-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقاط داده شده بررسی می کنیم.

بررسی پیوستگی در نقطه $x_\circ = ۱$

مقدار $f(۱)=۱^۲-۱=۰$

حد راست $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱^۲-۱=۰$

حد چپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-(۱^۲-۱)=۰$

تابع در نقطه ی $x_۰=۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}[-(x+۱)]=-۲$$

تابع در نقطه ی $x_۰=۱$ مشتق پذیر نیست.

بررسی پیوستگی در نقطه ی $x_۰=-۱$

مقدار $f(-۱)=(-۱)^۲-۱=۰$

حد راست $\lim_{x\to -۱^+} f(x)=-[(-۱)^۲-۱]=۰$

حد چپ $\lim_{x\to -۱^-} f(x)=(-۱)^۲-۱=۰$

تابع در نقطه ی $x_۰=-۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to (-۱)^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^+}\frac{-(x^۲-۱)-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^+}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=۲$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{(x^۲-۱)-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=-۲$$

تابع در نقطه ی $x_۰=-۱$ مشتق پذیر نیست.

***

تمرین برای حل :

۱ : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x_\circ=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x<۱ \\ x-۳ & x\geq ۱ \end{cases}$$

۲ : مشتق پذیری توابع زیر را در نقطه ی داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x)=x|x| \quad : \quad x_\circ=۰$

۲) $f(x)=x.Signx \quad : \quad x_\circ=۰$

۳) $f(x)=۱+x.\sin x \quad : \quad x_\circ=۰$

۴) $f(x)=(x-۱)[x] \quad : \quad x_\circ=۱$

***

تذکر :

۱ : ممکن است تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

۲ : هر تابع که در یک نقطه مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

تمرین: تابع زیر در نقطه ی $x_\circ=۱$ مشتق پذیر است،مقدار b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲ & x<۱ \\ bx^۳+۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

حل: چون تابع در نقطه ی $x_\circ=۱$ مشتق پذیر است،پس در این نقطه پیوسته می باشد.لذا پیوستگی و سپس مشتقات یکطرف را بررسی می کنیم.

مقدار $f(۱)=b+۲$

حد راست $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(bx^۳+۲x)=b+۲$

حدچپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} ax^۲=a$

$\Rightarrow b+۲=a$

مشتق راست

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(bx^۳+۲x)-(b+۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{bx^۳-b+۲x-۲}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{b(x^۳-۱)+۲(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)[b(x^۲+x+۱)+۲]}{x-۱}=۳b+۲$$

مشتق چپ

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax^۲-(\overbrace{b+۲}^{a})}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax^۲-a}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a(x^۲-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=a(۱+۱)=۲a$$

$$\Rightarrow ۲a=۳b+۲$$

$$\therefore \begin{cases} b+۲=a \\ ۲a=۳b+۲ \end{cases} \to a=۴, b=۲$$

***

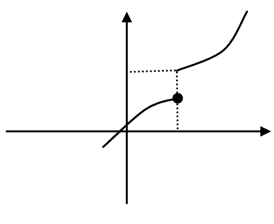
تمرین برای حل : تابع زیر در نقطه ی $x_۰=۲$ مشتق پذیر است، مقدار b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲ & x\geq ۲ \\ ۶x+b & x<۲ \end{cases}$$

***

نکته: در هر یک از موارد زیر یک تابع در یک نقطه مانند $x_۰$ مشتق پذیر نیست.

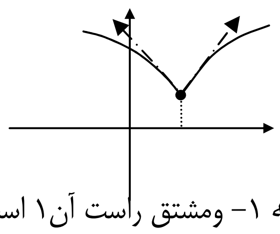
۱) تابع در این نقطه پیوسته نباشد.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی ناپیوستگی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=[x]$ که در نقطه ی $x_۰=۰$ پیوسته نیست.

۲) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و برابر نباشند.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی زاویه دار می گویند.

مانند: تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه ی $x_۰=۰$ پیوسته است ولی مشتق چپ آن در این نقطه ۱- ومشتق راست آن۱ است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

مقدار $f(۰)=۰$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} x=۰$

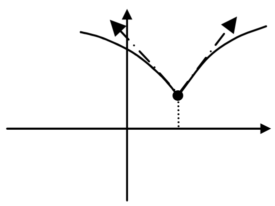
حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} (-x)=۰$

مشتق راست $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x}{x}=۱$

مشتق چپ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-x}{x}=-۱$

۳) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد و دیگری ∞ شود.

در این مورد نیز نقطه ی داده شده را نقطه ی زاویه دار می گویند.

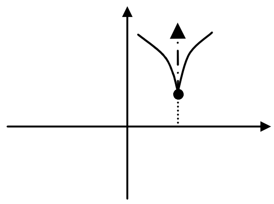


مانند: تابع $f(x)=\begin{cases} (x-۱)^۲ & x\leq ۱ \\ \sqrt{x-۱} & x>۱ \end{cases}$ که در نقطه ی $x_۰=۱$ پیوسته است ولی

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{(x-۱)\sqrt{x-۱}}=+\infty$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

۴) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی بازگشتی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ در نقطه ی $x_۰=۰$ پیوسته ولی مشتق پذیر نیست و این نقطه بازگشتی است.

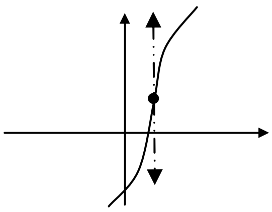
زیرا

$$f'_{+}(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x}=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x}=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=-\infty$$

۵) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.

در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی عطف می گویند.



مانند: نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۵]{x^{۳}}$ که در نقطه ی $x_{\circ}=\cdot$ پیوسته است ولی

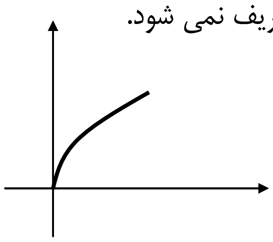
$$f'_{+}(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{\sqrt[۵]{x^{۳}}}{x}=\lim_{x\to\cdot^{+}}\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۲}}}=+\infty$$

$$f'_{-}(\cdot)=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{\sqrt[۵]{x^{۳}}}{x}=\lim_{x\to\cdot^{-}}\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۲}}}=+\infty$$

۶) تابع در همسایگی(راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد.

مانند: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه ی $x_{\circ}=\cdot$ پیوستگی راست دارد ولی حد چپ آن در این نقطه تعریف نمی شود.

این نقطه یک نقطه ی مرزی است.



***

ب) مشتق تابع در یک فاصله

تابع $y=f(x)$ را در فاصله ی (a,b) مشتق پذیر می نامند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله مشتق پذیر باشد.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله ی $(۲,۴)$ بررسی کنید.

حل: واضح است که این تابع در فاصله های $(۳,۴)$ و $(۲,۳)$ یک تابع ثابت بوده و لذا پیوسته ومشتق پذیر است.

$$\begin{cases} x_\circ \in (۲,۳) \\ [x_\circ] = ۲ \end{cases} \to f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{۲ - ۲}{x - x_\circ} = ۰$$

$$\begin{cases} x_\circ \in (۳,۴) \\ [x_\circ] = ۳ \end{cases} \to f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{۳ - ۳}{x - x_\circ} = ۰$$

اما تابع در نقطه ی $x_\circ = ۳$ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد. در نتیجه تابع در فاصله ی (۲,۴) مشتق پذیر نمی باشد.

***

☑ تابع مشتق

هرگاه تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط بازه ی $I = (a,b)$ مشتق پذیر باشد،آنگاه می گویند تابع $y = f(x)$ در این بازه مشتق پذیر است.در این حالت تابع جدیدی به نام تابع مشتق (یا به اختصار مشتق) وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

واضح است که دامنه ی تابع مشتق زیر مجموعه ای از دامنه ی تابع است که در آن تابع مشتق پذیر باشد.

تابع مشتق را با نماد $f'(x)$ یا y'_x یا $\frac{\partial y}{\partial x}$ نمایش می دهند.

تمرین : مشتق تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۵x$ را بیابید.

حل :

$$f(x+h) = ۲(x+h)^۳ - ۵(x+h) = ۲(x^۳ + ۳x^۲h + ۳xh^۲ + h^۳) - ۵(x+h)$$
$$= ۲x^۳ + ۶x^۲h + ۶xh^۲ + ۲h^۳ - ۵x - ۵h$$

$$f(x+h) - f(x) = (۲x^۳ + ۶x^۲h + ۶xh^۲ + ۲h^۳ - ۵x - ۵h) - (۲x^۳ - ۵x)$$
$$= ۲x^۳ + ۶x^۲h + ۶xh^۲ + ۲h^۳ - ۵x - ۵h - ۲x^۳ + ۵x$$
$$= ۶x^۲h + ۶xh^۲ + ۲h^۳ - ۵h = h(۶x^۲ + ۶xh + ۲h^۲ - ۵)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h(۶x^۲ + ۶xh + ۲h^۲ - ۵)}{h}$$
$$= \lim_{h \to ۰} (۶x^۲ + ۶xh + ۲h^۲ - ۵) = ۶x^۲ + ۶x(۰) + ۲(۰)^۲ - ۵ = ۶x^۲ - ۵$$

تمرین: مشتق توابع زیر را به کمک تعریف مشتق بدست آورید.

۱) $f(x)=-۳x$ ۵) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ۹) $f(x)=\cos x$

۲) $f(x)=ax+b$ ۶) $f(x)=\sqrt{x}$ ۱۰) $f(x)=\tan x$

۳) $f(x)=۳x^{۲}+۴x-۱$ ۷) $f(x)=a$

۴) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ ۸) $f(x)=\sin x$

نتیجه: با توجه به تمرین قبل داریم:

۱) $f(x)=a \to f'(x)=۰$

۲) $f(x)=ax \to f'(x)=a$

۳) $f(x)=\frac{۱}{x} \to f'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}$

۴) $f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۵) $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x$

۶) $f(x)=\cos x \to f'(x)=-\sin x$

۷) $f(x)=\tan x \to f'(x)=۱+\tan^{۲} x$

۸) $f(x)=\cot x \to f'(x)=-(۱+\cot^{۲} x)$

همچنین ثابت می شود که :

۱) $f(x)=a^{x} \to f'(x)=a^{x}L_{n}a$

۲) $f(x)=e^{x} \to f'(x)=e^{x}$

۳) $f(x)=\log_{a}^{x} \to f'(x)=\frac{۱}{xL_{n}a}$

۴) $f(x)=L_{n}x \to f'(x)=\frac{۱}{x}$

تمرین : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه ی $x_{\circ}=۹$ به دست آورید.

تمرین : مشتق تابع $f(x)=\tan x$ را در نقطه ی $x_{\circ}=\frac{\pi}{۴}$ به دست آورید.

تمرین : شیب خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x)=e^{x}$ را در نقطه ی $x_{\circ}=۰$ به دست آورید.

تمرین : ثابت کنید که مشتق تابع $y=af(x)$ می شود $y'=af'(x)$

***

☑ قضایای مشتق

استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه ی مشتق توابع در اکثر مواقع وقت گیر و مشکل است، لذا قضایای مشتق که همگی به کمک تعریف قابل اثبات هستند، به صورت زیر مطرح می شوند.

۱- مشتق عدد ثابت (تابع ثابت)

مشتق هر تابع ثابت برابر صفر است. $y = k \rightarrow y' = ۰$

مثال: $y = \sqrt{۳} \rightarrow y' = ۰$

....

۲- مشتق تابع یک جمله ای درجه ی اول

$$y = kx \rightarrow y' = k$$

مثال: $y = \frac{۳}{۲}x \rightarrow y' = \frac{۳}{۲}$

....

۳- مشتق تابع یک جمله ای با درجه ی بیشتر از یک

$$y = kx^{n} \rightarrow y' = knx^{n-۱}$$

مثال: $y = -۳x^{۵} \rightarrow y' = -۱۵x^{۴}$

....

۴- مشتق مجموع (یا تفاضل) دو یا چند تابع

$$y = u + v + w + \ldots \rightarrow y' = u' + v' + w' + \ldots.$$

مثال:

$$y = -x^{۳} + ۵x + ۴$$
$$\rightarrow y' = -۳x^{۲} + ۵$$

تمرین: مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$y = \frac{x^{۲} + ۵x - ۷}{۴}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=۳x^{۴}-۵x$ را در نقطه ی $x_{\circ}=-۱$ بدست آورید.

تمرین: تابع $f(x)=-x^{۲}+۲x$ را در نظر بگیرید. سپس

الف) مشتق تابع را بدست آورید. ب) مشتق تابع را در نقطه ی $x_{\circ}=۱$ بدست آورید.

۵- مشتق حاصل ضرب دو یا چند تابع

$$y=u.v \rightarrow y'=u'.v+v'.u$$
$$y=u.v.w \rightarrow y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$$

مثال:

$$y=(-x^{۳}+۵x+۱).(۴+۲x^{۳})$$
$$\rightarrow y'=(-۳x^{۲}+۵).(۴+۲x^{۳})+(۶x^{۲}).(-x^{۳}+۵x+۱)$$

مثال:

$$y=\sqrt{x}\sin x.\cos x$$
$$\rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\cos x.\sqrt{x}.\cos x+(-\sin x)\sqrt{x}.\sin x$$
$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\sqrt{x}.\cos^{۲}x-\sqrt{x}.\sin^{۲}x$$

....

۶- مشتق خارج قسمت دو تابع

$$y=\frac{۱}{x} \rightarrow y'=\frac{-۱}{x^{۲}}$$
$$y=\frac{۱}{v} \rightarrow y'=\frac{-v'}{v^{۲}}$$
$$y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^{۲}}$$

مثال:

$$y=\frac{۳x^۲-۵x}{۱-۲x^۳}\to y'=\frac{(۶x-۵)(۱-۲x^۳)-(-۶x^۲)(۳x^۲-۵x)}{(۱-۲x^۳)^۲}$$

$$y=\frac{۱}{x^۲+۳x}\to y'=\frac{-(۲x+۳)}{(x^۲+۳x)^۲}$$

....

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y=۲x^۵+۲x^۴-۳x+۲$

۲) $y=\sqrt[۳]{x^۲}$

۳) $y=(۲x-۱).(۳x-۵).(x-۳)$

۴) $y=\frac{۳x^۲+۲x-۱}{x+۲}$

۵) $y=\frac{۲}{x^۵+۲x}$

۶) $y=\sin x+\cos x$

....

۷- مشتق تابع رادیکالی با فرجه ی۲

$$y=\sqrt{x}\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$y=\sqrt{u}\to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

مثال:

$$y=\sqrt{۳x^۲-۵x}\to y'=\frac{۶x-۵}{۲\sqrt{۳x^۲-۵x}}$$

$$y=\sqrt{\sin x}\to y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}$$

تمرین: مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$y=۳x^۲+\frac{۲x}{\sqrt{x^۳+۴x-۱}}$$

....

۸- مشتق تابع رادیکالی با فرجه ی بالاتر از۲

$$y=\sqrt[m]{x^n}\,,m>n\to y'=\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$$

$$y=\sqrt[m]{u^n}\,,m>n\to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

مثال:

$$y=\sqrt[۵]{(۲x^۳-x)^۳}\to y'=\frac{۳(۶x^۲-۱)}{۵\sqrt[۵]{(۲x^۳-x)^۲}}$$

$$y=\sqrt[۷]{\cos x}\to y'=\frac{۱(-\sin x)}{۷\sqrt[۷]{\cos^۶ x}}$$

....

۹- مشتق تابع تابع (تابع مرکب)

$$y=k.u^n\to y'=k.n.u'.u^{n-۱}$$

مثال: $y=۳(x^۲-۴x+۵)^۷\to y'=۲۱(۲x-۴)(x^۲-۴x+۵)^۶$

تمرین: مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$y=۲(\frac{۳x^۲-۱}{۴x-۷})^۵$$

***

۱۰- مشتق تابع نمایی

$$y=ka^x\to y'=ka^xL_na$$

$$y=ka^u\to y'=ku'a^uL_na$$

نتیجه: چون $L_ne=۱$ پس

$$y=ke^x\to y'=ke^x$$

$$y=ke^u\to y'=ku'e^u$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = ۳\times ۲^{x}$

۲) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$

۳) $y = ۳^{۵x^{۲}-۴x}$

۴) $y = ۴\times e^{۳x+۵}$

۵) $y = e^{\sqrt{x}}$

۶) $y = e^{۱+\cos x+\sin x}$

نتیجه: تابع $y = e^{x}$ و مشتق آن برابرند.

تمرین: مشتق تابع $y = ۵e^{۲x-۶}$ را در نقطه ی $x_{\circ} = ۳$ بدست آورید.

***

۱۱- مشتق تابع لگاریتمی

$$y = k\log_{a}^{x} \to y' = \frac{k}{xL_{n}a}$$

$$y = k\log_{a}^{u} \to y' = \frac{ku'}{uL_{n}a}$$

نتیجه: چون $L_{n}e = ۱$ پس

$$y = kL_{n}x \to y' = \frac{k}{x}$$

$$y = kL_{n}u \to y' = \frac{ku'}{u}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = \log_{۷}^{۳x^{۲}+۵x}$

۲) $y = L_{n}(۳x^{۲}+۵x)$

تمرین: مشتق توابع را بدست آورید.

۱) $y = (۲x)^{x}$

۲) $y = (\sin x)^{\sin x}$

تمرین: مشتق تابع $y = L_{n}(x+\sqrt{x^{۲}+۱})$ را در نقطه ی $x_{\circ} = \frac{۴}{۳}$ بدست آورید.

....

۱۳- مشتق توابع مثلثاتی

$y=\sin x \rightarrow y'=\cos x$

$y=\sin u \rightarrow y'=u'.\cos u$

$y=k.\sin^{n} u \rightarrow y'=k.n.u'.\cos u.\sin^{n-۱} u$

$y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x$

$y=\cos u \rightarrow y'=-u'.\sin u$

$y=k.\cos^{n} u \rightarrow y'=-k.n.u'.\sin u.\cos^{n-۱} u$

$y=\tan x \rightarrow y'=۱+\tan^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$

$y=\tan u \rightarrow y'=u'.(۱+\tan^{۲} u)$

$y=k.\tan^{n} u \rightarrow y'=k.n.u'.(۱+\tan^{۲} u).\tan^{n-۱} u$

$y=\cot x \rightarrow y'=-(۱+\cot^{۲} x)=\frac{-۱}{\sin^{۲} x}$

$y=\cot u \rightarrow y'=-u'.(۱+\cot^{۲} u)$

$y=k.\cot^{n} u \rightarrow y'=-k.n.u'.(۱+\cot^{۲} u).\cot^{n-۱} u$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y=\sin x+\cos x$

۲) $y=\cos(۳x+\frac{\pi}{۲})$

۳) $y=۲\sin^{۳} ۵x$

۴) $y=\tan\sqrt{x}$

۵) $y=۳\cos^{۲} x$

۶) $y=\sin e^{x}$

۷) $y=\sin(\cos x)$

۸) $y=\sin(\cos(\tan x))$

۹) $y=\sqrt{x^{۲}+\sin x}$

۱۰) $y=L_{n}\cos x \quad \cos x>۰$

۱۱) $y=e^{\sin ۲x}$

۱۲) $y=\cos^{۲} x.(۱-\tan^{۲} x)$

۱۳) $y=\sec x$

۱۴) $y=\cos ecx$

نتیجه:

$$y=\sec x \to y'=\sec x.\tan x$$
$$y=\sec u \to y'=u'.\sec u.\tan u$$

$$y=\cos ecx \to y'=-\cos ecx.\cot x$$
$$y=\cos ecu \to y'=-u'.\cos ecu.\cot u$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y=\sec(x+\sqrt{x})$ ۲) $y=\cos ec(e^{۲x+۱})$

***

تمرین برای حل:

۱: مشتق تابع $y=x^{\sin x}$ را بدست آورید.

۲: مشتق تابع $y=\tan(\sin ۲x)$ را در نقطه ی $x_{\circ}=۰$ بدست آورید.

....

۱۴- مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$y=arc\sin x=\sin^{-۱}x \to y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$
$$y=arc\sin u=\sin^{-۱}u \to y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$$

$$y=arc\cos x=\cos^{-۱}x \to y'=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$
$$y=arc\cos u=\cos^{-۱}u \to y'=\frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$$

$$y=arc\tan x=\tan^{-۱}x \to y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$
$$y=arc\tan u=\tan^{-۱}u \to y'=\frac{u'}{۱+u^{۲}}$$

$$y = arc\cot gx = \cot g^{-۱} x \to y' = \frac{-۱}{۱ + x^{۲}}$$

$$y = arc\cot gu = \cot^{-۱} u \to y' = \frac{-u'}{۱ + u^{۲}}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = arc\sin(۳x + x^{۲})$ ۲) $y = arc\tan\sqrt{x}$

۳) $y = \sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x$ ۴) $y = arc\cos(\sin x)$

....

۱۵- مشتق توابع پارامتری

توابع پارامتری توابعی هستند که در آنها y و x برحسب یک پارامتر داده شده باشند،یعنی:

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$$

برای محاسبه ی y'_x در این توابع از دستور مقابل استفاده می کنیم. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$

تمرین: مشتق توابع زیر را نسبت به x بدست آورید.

الف) $\begin{cases} y = ۳\sin(۲t - ۱) \\ x = e^{۳t+۱} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y = ۱ + ۳\sin\alpha \\ x = ۳\cos\alpha - ۱ \end{cases}$

تمرین: مشتق تابع زیر را در نقطه ی $t_۰ = -۲$ بدست آورید.

$$\begin{cases} y = ۳t^{۲} - t + ۱ \\ x = t^{۳} + t \end{cases}$$

....

۱۶- مشتق تابع تابع (به کمک قاعده ی زنجیری)

اگر $y = f(u)$ تابعی برحسب u و $u = g(x)$ تابعی برحسب x آنگاه $y = f(g(x))$ یک تابع مرکب برحسب x است.

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$$

در این صورت:

$$y'_x = y'_u . u'_x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{یا}$$

روش فوق را قاعده ی زنجیری می نامندکه برای چند تابع نیز قابل تعمیم است.

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(t) \to y'_x = y'_u . u'_t . t'_x \\ t = h(x) \end{cases}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $\begin{cases} y = ۲u^۲ - u \\ u = \sin x \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y = e^{۲t} \\ t = arc\sin x \end{cases}$

نتیجه: طبق قاعده ی زنجیری واضح است که اگر $y = f(u)$ آنگاه $y' = u'.f'(u)$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = f(\sin x)$ ۲) $y = f(g(x))$

حل:

۱) $y' = \cos x . f'(\sin x)$ ۲) $y' = g'(x).f'(g(x))$

تمرین: اگر $f'(x) = \sqrt{۳x + ۱۶}$ و $g(x) = x^۳ - ۱$ باشد،مشتق تابع $(fog)(x)$ را در $x_۰ = ۱$ بیابید.

حل:

$$g'(x) = ۳x^۲ \to g'(۱) = ۳(۱)^۲ = ۳$$
$$g(۱) = ۱^۳ - ۱ = ۰$$
$$f'(g(۱)) = f'(۰) = \sqrt{۳(۰) + ۱۶} = ۴$$
$$(fog)'(x) = (f(g(x))' = g'(x).f'(g(x))$$
$$(fog)'(۱) = g'(۱).f'(g(۱)) = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

تمرین: اگر $f(x)=x^{۲}-۵x$ مشتق تابع $y=f(\cos x)$ را بدست آورید.

حل:

$$f'(x)=۲x-۵$$
$$y'=-\sin x.f'(\cos x)=-\sin x.(۲\cos x-۵)$$

***

تمرین: مشتق پذیری تابع زیر را در مجموعه ی اعداد حقیقی را بررسی کنید. سپس تابع مشتق و دامنه ی آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

حل:

واضح است که تابع f در نقطه ی $x_{\circ}=۰$ مشتق پذیر نیست. لذا

$$D_f=R\rightarrow D_{f'}=R-\{۰\}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

تمرین: دامنه ی مشتق تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را مشخص کنید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۱ \\ -(x^{۲}-۱) & -۱<x<۱ \\ x^{۲}-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$

واضح است که تابع f در نقطه ها ی $x_{\circ}=۱$ و $x_{\circ}=-۱$ مشتق پذیر نیست. لذا

$$D_f=R\rightarrow D_{f'}=R-\{-۱,۱\}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ -۲x & -۱<x<۱ \\ ۲x & x<-۱ \end{cases}$$

تمرین : مقدار b و a را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه ی $x_{\circ} = ۱$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \leq ۱ \\ ۲ax + b & x > ۱ \end{cases}$$

حل :

بررسی پیوستگی

حد راست $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x) = ۲a(۱) + b = ۲a + b$

حد چپ $\lim\limits_{x \to ۱^{-}} f(x) = (۱)^{۲} = ۱$

مقدار $f(۱) = ۱$

$$\Rightarrow ۲a + b = ۱$$

بررسی مشتقات یک طرفه

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \leq ۱ \\ ۲ax + b & x > ۱ \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x & x \leq ۱ \\ ۲a & x > ۱ \end{cases}$$

مشتق راست $f'_{+}(۱) = ۲(۱) = ۲$

مشتق چپ $f'_{-}(۱) = ۲a$

$$\Rightarrow ۲a = ۲ \rightarrow a = ۱$$

حال اگر مقدار a را در تساوی اول قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$۲a + b = ۱ \xrightarrow{a=۱} b = -۱$$

***

۱۷- مشتق تابع ضمنی

هر معادله به شکل $f(x, y) = ۰$ ممکن است خود تابع نباشد ولی می توان از آن یک یا دو تابع استخراج نمود. مانند معادله ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ که تابع نیست ولی توابع زیر از آن استخراج می شوند.

$$y = \sqrt{۱ - x^{۲}} \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{۱ - x^{۲}}$$

به همین دلیل است که چنین معادلاتی به توابع ضمنی موسوم هستند. در هر حالت در چنین معادلاتی بیشتر اوقات محاسبه ی y بطور صریح برحسب x امکان پذیر نباشد.

منظور از مشتق تابع ضمنی مشتق توابع بدست آمده از آن است.برای محاسبه ی مشتق هر تابع ضمنی به یکی از دو روش زیر می توان عمل کرد.

روش اول: چون y تابعی بر حسب x می باشد، پس از طرفین معادله و جمله به جمله با رعایت قواعد،مشتق می گیریم و از معادله ی حاصل y' را محاسبه می کنیم. توجه کنید که:

$$x \xrightarrow{\text{مشتق}} ۱$$

$$kx^n \xrightarrow{\text{مشتق}} knx^{n-۱}$$

$$y \xrightarrow{\text{مشتق}} y'$$

$$ky^n \xrightarrow{\text{مشتق}} k.n.y'.y^{n-۱}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $x^۲ + ۳xy + y^۳ - x + ۲ = ۰$

۲) $۳x^۲ + ۵y^۳ - ۲x + ۱ = ۷xy$

۳) $\sin x + \cos y = x + y$

روش دوم: چون y تابعی بر حسب x است، پس داریم.

$$f(x,y) = ۰ \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_x + y'.f'_y = ۰ \rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

لذا پس از منتقل کردن تمام جملات به یک طرف معادله، دستور زیر را بکار می گیریم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \begin{array}{l} \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } x \text{ (} y \text{ عدد فرض می شود.)} \\ \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } y \text{ (} x \text{ عدد فرض می شود.)} \end{array}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $x^{۲}+۳xy+y^{۳}-x+۲=۰$

۲) $(x+y)^{۳}+x^{۲}y=x^{۳}$

۳) $y=\sin(x+y)$

۴) $x\sin y+y\sin x=x+y$

۵) $e^{x}+e^{y}-x^{۲}-y^{۲}-۲=۰$

***

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\dots}}}}$ را بدست آورید.

حل:

$$f(x)=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\dots}}}}\xrightarrow{\text{توان۲}}f^{۲}(x)=\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\dots}}}$$
$$\to f^{۲}(x)=\cos x+f(x)$$

تابع بدست آمده ضمنی است. لذا

$$y^{۲}=\cos x+y\to y^{۲}-y-\cos x=۰$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\frac{-\sin x}{۲y-۱}$$

***

☑ مشتقات مراتب بالاتر

اگر تابع f روی بازه ی باز $I=(a,b)$ مشتق پذیر باشد. در این صورت تابع مشتق مرتبه ی اول یعنی f' وجود دارد. حال اگر تابع f' در این فاصله یا زیر مجموعه ای از آن مشتق پذیر باشد، می توان تابع مشتق مرتبه ی دوم را به صورت زیر تعریف نمود.

$$f''(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

به همین ترتیب و در صورت مشتق پذیر بودن f'' می توان مشتق مرتبه سوم را نیز تعریف نمود.

به جدول زیر توجه کنید.

	$y=f(x)$	تابع

$\frac{\partial y}{\partial x}$	$y' = f'(x)$	مشتق مرتبه ی اول
$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}$	$y'' = f''(x)$	مشتق مرتبه ی دوم
$\frac{\partial^۳ y}{\partial x^۳}$	$y''' = f'''(x)$	مشتق مرتبه ی سوم
$\frac{\partial^۴ y}{\partial x^۴}$	$y^{(۴)} = f^{(۴)}(x)$	مشتق مرتبه ی چهارم
....	....	....
$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$	$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$	مشتق مرتبه ی n ام

تمرین: مشتق مرتبه ی دوم تابع $y = ۲x^۳ + ۵x$ را بیابید.

تمرین: مشتق مرتبه ی پنجم تابع $y = \sin x + \cos x$ را بیابید.

تمرین: مقدار مشتق مرتبه ی دوم تابع $y = x^۳ - ۴x$ را در نقطه ی $x_۰ = ۱$ بدست آورید.

تمرین: هرگاه $x^۲ + y^۲ = ۱$ مشتق مرتبه ی دوم را بیابید.

تمرین: اگر مقدار مشتق مرتبه ی دوم تابع $f(x) = a\cos ۲x$ در نقطه ی $x_۰ = \frac{\pi}{۲}$ برابر۲ باشد،مقدار a را بیابید.

تمرین: هرگاه $y = \sin^۲ x$ ثابت کنید که $y'' = ۲Cos۲x$

تمرین: هرگاه $y = \sqrt{x^۲ + ۲x}$ ثابت کنید که $y'^۲ + yy'' = ۱$

تمرین: هرگاه $y = a\sin\omega\ t + b\cos\omega\ t$ ثابت کنید که $y'' - \omega^۲ y = ۰$

نکته: مشتق مرتبه ی n ام برخی از توابع به شکل زیر است.

۱) $y=\frac{۱}{x}\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n}n!}{x^{n+۱}}$

۲) $y=\frac{۱}{ax+b}\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n}n!a^{n}}{(ax+b)^{n+۱}}$

۳) $y=(ax+b)^{n}\to y^{(n)}=n!a^{n}$

۴) $y=f(ax)\to y^{(n)}=a^{n}f^{(n)}(ax)$

۵) $y=\sin ax\to y^{(n)}=a^{n}.\sin(ax+\frac{n\pi}{۲})$

۶) $y=\cos ax\to y^{(n)}=a^{n}.\cos(ax+\frac{n\pi}{۲})$

۷) $y=e^{ax}\to y^{(n)}=a^{n}e^{ax}$

۸) $y=L_{n}x\to y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{x^{n}}$

تمرین: مشتق مرتبه ی پنجم تابع $y=\frac{۳}{x}$ را بدست آورید.

تمرین: مشتق مرتبه ی نهم تابع $y=\frac{۵}{۲x-۱}$ را بدست آورید.

تمرین: مشتق مرتبه ی پانزده ام تابع $y=\frac{۱}{۲^{۱۴}}\sin ۲x$ را در $x_{\circ}=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

تمرین برای حل

۱: مشتق مرتبه ی پنجاه ام تابع $y=\sin x+\cos x$ را بیابید.

۲ : مشتق مرتبه ی بیست و هفتم تابع $y=\sin x.\cos x$ را بیابید.

۳ : مشتق مرتبه ی پنجم تابع $y=\sin x+e^{۲x}$ را بیابید.

☑ قاعده ی هوپیتال

هرگاه g و f توابعی مشتق پذیر در $x_\circ$ بوده و $f(x_\circ)=g(x_\circ)=\text{۰}$ باشد، دراین صورت واضح است که حد کسر $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x\to x_\circ$ به صورت مبهم $\frac{\text{۰}}{\text{۰}}$ در می آید. برای رفع ابهام این کسر با فرض اینکه $x\neq x_\circ$ می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{g(x)-g(x_\circ)}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{\overline{\dfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}}}{\dfrac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}}=\frac{\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f(x)=f(x_\circ)}{x\quad x_\circ}}{\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}}=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

یعنی برای محاسبه ی حد کسر $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که $x\to x_\circ$ اگر به صورت مبهم $\frac{\text{۰}}{\text{۰}}$ درآید،کسری تشکیل می دهیم که صورت آن مشتق صورت کسر داده شده و مخرج آن نیز مشتق مخرج کسر داده شده باشند و سپس حد کسر بدست آمده را محاسبه می کنیم.

توجه: اگر حد کسر جدید نیز به شکل $\frac{\text{۰}}{\text{۰}}$ در آید، عمل مشتق گیری را مجدداً تکرار می کنیم.

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to \text{۱}}\dfrac{\text{۳}x^{\text{۴}}-\text{۳}x^{\text{۳}}+\text{۲}x-\text{۲}}{\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۵}x+\text{۳}}$

۲) $\lim\limits_{x\to \text{۱}}\dfrac{x^{n}-\text{۱}}{x^{m}-\text{۱}}$

۳) $\lim\limits_{x\to \text{۰}}\dfrac{\text{۱}-\cos x}{\sin x}$

۴) $\lim\limits_{x\to \text{۴}}\dfrac{x-\text{۴}}{\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۷}}-\text{۳}}$

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to \text{۰}}\frac{\text{۱}-\cos x^{\text{۲}}}{x^{\text{۲}}\sin x^{\text{۲}}}$$

ج) $\dfrac{\text{۱}}{\text{۲}}$

توجه: رفع ابهام به کمک قاعده ی هوپیتال برای صور دیگر ابهام نیز بکار می رود، به شرط اینکه به حالت $\frac{\text{۰}}{\text{۰}}$ تبدیل شوند.

تمرین: حد مقابل را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to \text{۰}}\left(\dfrac{x+\text{۲}}{x^{\text{۲}}+x}-\dfrac{\text{۳}x-\text{۴}}{x^{\text{۲}}-\text{۲}x}\right)$

حل:

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{x^۲+x}-\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{x(x+۱)}-\frac{۳x-۴}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۲)(x-۲)-(x-۱)(۳x-۴)}{x(x+۱)(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x^۲+x}{x(x+۱)(x-۲)}\overset{\div}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{x(-۲x+۱)}{x(x+۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{(-۲x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}=\frac{۱}{-۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{x^۲+x}-\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x+۲}{x(x+۱)}-\frac{۳x-۴}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۲)(x-۲)-(x+۱)(۳x-۴)}{x(x+۱)(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x^۲+x}{x(x+۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x^۲+x}{x^۳-x^۲-۲x}\overset{\div}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-۴x+۱}{۳x^۲-۲x-۲}=\frac{۱}{-۲}$$

تمرین برای حل : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{\sin x}$ ۲) $\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt{۹+۲x}-۵}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۳) $\lim_{x\to ۲}\frac{L_n(x^۲-۳)}{x^۲-۲x}$

***

تمرین : با استفاده از قاعده ی هوپیتال تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^۲}=\frac{۱}{۲}(b^۲-a^۲)$

۲) $\lim_{x\to ۰}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=b-a$

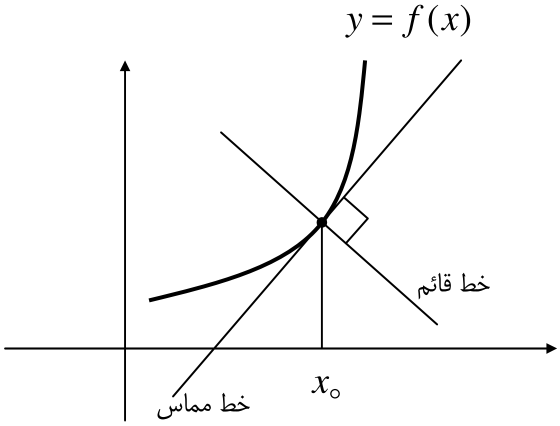
۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{a^x-b^x}{x}=L_n(\frac{b}{a})$

۴) $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$

***

☑ معادله ی خط مماس و خط قائم بر منحنی از نقطه ی روی منحنی

اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، خط مماس بر منحنی نمایش نمودار آن خطی است که فقط در نقطه ی x_0 نمودار تابع را قطع کند.



خط قائم خطی است که در نقطه ی x_0 بر خط مماس بر منحنی در این نقطه عمود باشد.

با توجه به تعبیر هندسی مشتق واضح است که مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ی x_0 با شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر است.

$$m = f'(x_0) \quad \text{شیب خط مماس}$$

بدیهی است که اگر شیب خط مماس را عکس وقرینه کنیم،شیب خط قائم بدست می آید.

$$m' = \frac{-1}{f'(x_0)} \quad \text{شیب خط قائم}$$

***

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ را در $x_0 = 1$ نقطه ی بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = tg^2 x$ را در نقطه ی $x_0 = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = x^2 - 2x - 3$ در نقاط بر خورد نمودار تابع با محور عرضها را بنویسید.

***

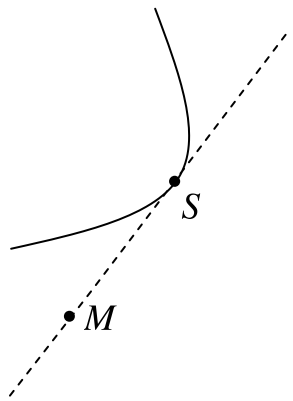
تمرین برای حل :

۱: شیب خط مماس بر منحنی نمودار تابع $y = \sqrt{x + 1}$ را در نقطه ی $x_0 = 3$ را به دست آورید.

۲ **:** معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = x^{۲} + ۳x - ۱$ را در نقطه ا ی به طول یک واقع بر نمودار آن به دست آورید.

***

☑ **تعیین معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی خارج آن**



برای این کار دو روش وجود دارد.

روش اول: طول نقطه ی تماس را α فرض کنید و معادله ی خط مماس را بر حسب αبنویسید.حال چون این خط مماس از نقطه ی Mمی گذرد،لذا مختصات نقطه ی M را در معادله ی خط مماس قرار داده و مقدار αرا بدست آورید.با تعیین مقدار αمعادله ی خط (یا خط های) مماس را می توان نوشت.

***

تمرین: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = -x^{۲} + ۳x$ گذرا از نقطه ی $M(۲,۳)$ را بدست آورید.

حل: مختصات نقطه ی $M(۲,۳)$ در معادله ی تابع صدق نمی کند،لذا این نقطه روی منحنی واقع نیست.

نقطه ی تماس را $S(\alpha, \beta)$ فرض می کنیم.

$$x = \alpha \xrightarrow{y=-x^{۲}+۳x} \beta = -\alpha^{۲} + ۳\alpha$$ طول نقطه ی تماس

$$S(\alpha, -\alpha^{۲} + ۳\alpha)$$ نقطه ی تماس

حال از تابع مشتق گرفته و شیب خط مماس را در نقطه ی Sبدست می آوریم.

$$y' = -۲x + ۳ \rightarrow m = -۲\alpha + ۳$$

اکنون معادله ی خط مماس را می نویسیم.

$$\begin{aligned}
& y - y_{\circ} = m(x - x_{\circ}) \\
& \rightarrow y - \beta = (-۲\alpha + ۳)(x - \alpha) \\
& \rightarrow y + \alpha^{۲} - ۳\alpha = -۲\alpha x + ۲\alpha^{۲} + ۳x - ۳\alpha \\
& \rightarrow y = (-۲\alpha + ۳)x + \alpha^{۲}
\end{aligned}$$

این معادله باید از نقطه ی $M\,(۲,۳)$ بگذرد.

$$۳ = (-۲\alpha + ۳)(۲) + \alpha^۲$$
$$\rightarrow \alpha^۲ - ۴\alpha + ۳ = ۰ * \rightarrow \alpha = ۱, \alpha = ۳$$

در نهایت معادله ی خط های مماس به شکل زیر در خواهند آمد.

$$\alpha = ۱ \Rightarrow y = x + ۱$$
$$\alpha = ۳ \Rightarrow y = -۳x + ۹$$

***

توجه: تعداد ریشه های معادله ی * مبین تعداد خط های مماس بر منحنی گذرا از نقطه ی M است.

***

تمرین برای حل: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = x^۲ + x$ گذرا از نقطه ی $M\,(۰,-\frac{۱}{۲})$ را بدست آورید.

***

روش دوم: ابتدا معادله ی خطی که از نقطه ی داده شده گذشته و شیب آن m باشد را می نویسیم،سپس شرطی را می نویسیم که معادله ی تلاقی این خط با منحنی ریشه ی مضاعف داشته باشد. بدین طریق مقدار m بدست می آید. با تعیین مقدار m معادله ی خط یا خط های مماس نیز بدست می آیند.

***

تمرین: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = -x^۲ + ۳x$ گذرا از نقطه ی $M\,(۲,۳)$ را بدست آورید.

حل: ابتدا معادله ی خط مماس با شیب m گذرا از نقطه ی M را می نویسیم.

معادله ی خط مماس $y - y_۰ = m(x - x_۰) \rightarrow y - ۳ = m(x - ۲) \rightarrow y = mx - ۲m + ۳$

حال معادله ی بدست آمده را با معادله ی منحنی تلاقی می دهیم.

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ۳x \\ y = mx - ۲m + ۳ \end{cases} \rightarrow -x^۲ + ۳x = mx - ۲m + ۳ \rightarrow -x^۲ + (۳ - m)x + ۲m - ۳ = ۰$$

این معادله باید ریشه ی مضاعف داشته باشد.پس

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۰$

$(۳ - m)^{۲} - ۴(-۱)(۲m - ۳) = ۰$

$۹ - ۶m + m^{۲} + ۸m - ۱۲ = ۰ \rightarrow m^{۲} + ۲m - ۳ = ۰ \;* \rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = -۳ \end{cases}$

در نهایت مقدار m بدست آمده را در معادله ی خط مماس قرار می دهیم.

$y = mx - ۲m + ۳$

$m = ۱ \rightarrow y = x - ۲ + ۳ \Rightarrow y = x + ۱$

$m = -۳ \rightarrow y = -۳x + ۶ + ۳ \rightarrow y = -۳x + ۹$

***

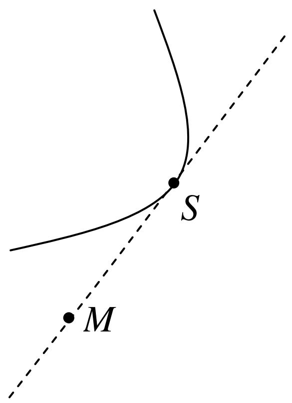
توجه: تعداد ریشه های معادله ی * مبین تعداد خط های مماس بر منحنی گذرا از نقطه ی M است.

***

☑ **تعیین معادله ی خط قائم بر منحنی در نقطه ی خارج آن**

برای این کار دو روش وجود دارد.

روش اول: طول نقطه ی پای قائم را α فرض کنید و معادله ی خط قائم را بر حسب αبنویسید.حال چون این خط از نقطه ی Mمی گذرد،لذا مختصات نقطه ی M را در معادله ی خط قائم قرار داده و مقدار αرا بدست آورید.با تعیین مقدار αمعادله ی خط (یا خط های) قائم را می توان نوشت.



***

تمرین: معادله ی خط مماس بر منحنی $y = -x^{۲} + x$ گذرا از نقطه ی $M(-۱,-۲)$ را بدست آورید.

حل: مختصات نقطه ی $M(-۱,-۲)$ در معادله ی تابع صدق نمی کند،لذا این نقطه روی منحنی واقع نیست.

نقطه ی پای قائم را $S(\alpha, \beta)$ فرض می کنیم.

$$x = \alpha \xrightarrow{y = -x^{۲} + x} \beta = -\alpha^{۲} + \alpha$$ طول نقطه ی پای قائم

$$S(\alpha, -\alpha^{۲} + \alpha)$$ نقطه ی پای قائم

حال از تابع مشتق گرفته و شیب خط مماس را در نقطه ی S بدست می آوریم.

$$y' = -۲x + ۱ \rightarrow m = -۲\alpha + ۱$$

اکنون معادله ی خط قائم را می نویسیم.

$$y - y_{\circ} = m'(x - x_{\circ})$$
$$\rightarrow y - \beta = \frac{-۱}{-۲\alpha + ۱}(x - \alpha)$$
$$\rightarrow y + \alpha^{۲} - \alpha = \frac{-۱}{-۲\alpha + ۱}(x - \alpha)$$

این معادله باید از نقطه ی $M(-۱,-۲)$ بگذرد.

$$\rightarrow -۲ + \alpha^{۲} - \alpha = \frac{-۱}{-۲\alpha + ۱}(-۱ - \alpha)$$
$$\rightarrow ۲\alpha^{۳} - ۳\alpha^{۲} - ۲\alpha + ۳ = ۰$$
$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \alpha = -۱ \\ \alpha = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

در نهایت معادله ی خط های قائم به شکل زیر در خواهند آمد.

$$\alpha = ۱ \Rightarrow y = x - ۱$$
$$\alpha = -۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - \frac{۷}{۳}$$
$$\alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲}$$

***

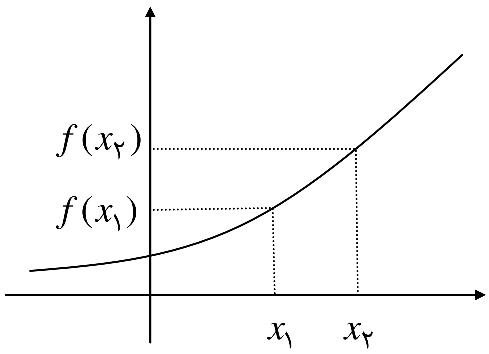
☑ تابع صعودی و تابع نزولی

تابع $y=f(x)$ را در یک فاصله مانند $I\subseteq D_f$ صعودی گویند، هرگاه

$$\forall x_۱,x_۲\in I; x_۱<x_۲\to f(x_۱)\le f(x_۲)$$

توجه: تابع $y=f(x)$ را در یک فاصله مانند $I\subseteq D_f$ صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه

$$\forall x_۱,x_۲\in I; x_۱<x_۲\to f(x_۱)< f(x_۲)$$



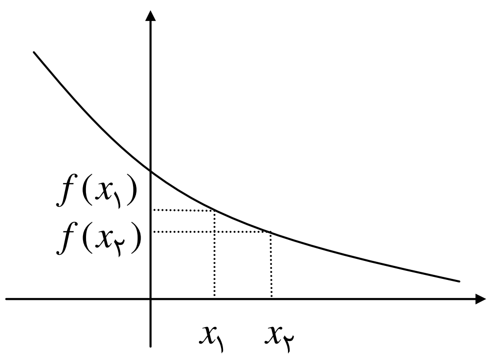
***

تابع $y=f(x)$ را در یک فاصله مانند $I\subseteq D_f$ نزولی گویند، هرگاه

$$\forall x_۱,x_۲\in I; x_۱<x_۲\to f(x_۱)\ge f(x_۲)$$

توجه: تابع $y=f(x)$ را در یک فاصله مانند $I\subseteq D_f$ نزولی اکید(اکیداً نزولی)گویند، هرگاه

$$\forall x_۱,x_۲\in I; x_۱<x_۲\to f(x_۱)> f(x_۲)$$



***

با توجه به تعریف تابع صعودی و تابع نزولی و با در نظر گرفتن تعریف مشتق واضح است که یک تابع مانند $y = f(x)$ در یک فاصله مانند $I = (a,b)$ صعودی است هرگاه در این فاصله مشتق آن مثبت باشد و برعکس و همچنین در این فاصله تابع نزولی است، هرگاه مشتق آن منفی باشد و برعکس .

توجه: اگر در یک فاصله مشتق تابع صفر باشد، تابع در این فاصله ثابت است و برعکس

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع در یک فاصله کافی است مشتق آنرا تعیین علامت کنیم و جدولی مانند جدول زیر موسوم به جدول تغییرات (جدول رفتار) تابع رسم کنیم.

x	$-\infty$	ریشه های مشتق	$+\infty$
y'		علامت مشتق	
y			

توجه: جهت تعیین نماد متناظر با $+\infty$ یا $-\infty$ برای y در جدول تغییرات، کافی است از تابع وقتی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ حد بگیریم.

****

تمرین: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را به کمک رسم جدول تغییرات بررسی کنید.

۱) $y = -۳x + ۱$

۲) $y = -x^۲ + ۴x$

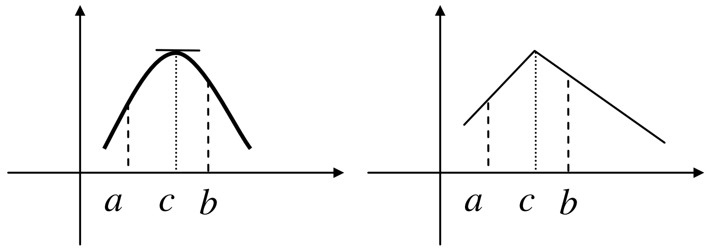
۳) $y = x^۳ - ۳x$

☑ ماگزیمم و مینیمم یک تابع

تابع $y=f(x)$ که دامنه ی آن D_f باشد را در نظر می گیریم.اگر $I=(a,b)\subseteq D_f$ در این صورت:

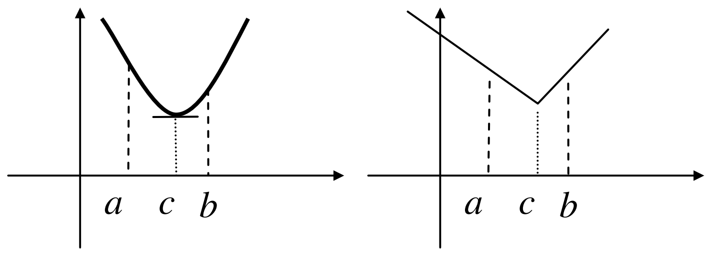
الف) تابع f در نقطه ی $c\in I$ دارای ماگزیمم نسبی است، هرگاه $\forall x\in I \rightarrow f(x)\le f(c)$

ب) تابع f در نقطه ی $c\in I$ دارای ماگزیمم مطلق است، هرگاه $\forall x\in D_f \rightarrow f(x)< f(c)$



ج) تابع f در نقطه ی $c\in I$ دارای مینیمم نسبی است، هرگاه $\forall x\in I \rightarrow f(x)\ge f(c)$

د) تابع f در نقطه ی $c\in I$ دارای مینیمم مطلق است، هرگاه $\forall x\in D_f \rightarrow f(x)> f(c)$



***

تذکر۱) ممکن است تابع در یک نقطه ماگزیمم یا مینیمم داشته باشد ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

مانند تابع $y=|x|$ که مبدأ مختصات نقطه ی مینیمم آن است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

***

تمرین: نشان دهید که در تابع زیر نقطه ی $x_{۰}=۳$ یک نقطه ی ماگزیمم است ولی تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\le ۳ \\ -x+۸ & x>۳ \end{cases}$$

***

تذکر۲) اگر در نقطه ی ماگزیمم یا می نیمم تابع مشتق پذیر باشد، مشتق آن صفر است و خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور طول ها است.

تذکر۳) یک تابع در دامنه اش می تواند چند نقطه ی ماگزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد ولی مـاگزیمم یـا مینـیمم مطلـق آن در صورت وجود منحصر بفرد هستند.

***

☑ آزمون مشتق اول

برای تعیین نقاط ماگزیمم یا مینیمم یک تابع از آن مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود تعیین می کنیم.اگر مـشتق در این ریشه ها تغییر علامت دهد، ریشه های بدست آمده طول نقاط ماگزیمم یا مینیمم را نشان می دهند.

x		x_0	
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	y_0 Max	$\searrow$

x		x_0	
y'	-	0	+
y	$\searrow$	y_0 Min	$\nearrow$

همانطور که قبلاً گفته شد جدولی به شکل زیر که در آن نقاط ماگزیمم یا مینیمم و همچنین صعودی یا نزولی بودن تابع مشخص شده باشد را جدول تغییرات تابع می نامند.

x	$-\infty$	ریشه های مشتق	$+\infty$
y'	علامت مشتق	علامت مشتق	علامت مشتق
y			

***

تمرین: جدول تغییرات تابع های زیر را رسم کنید و نقاط ماگزیمم یا مینیمم آنها را در صورت وجود بدست آورید.

۱) $y = ۲x + ۱$

۲) $y = x^۲ - ۲x - ۳$

۳) $y = x^۳ - ۳x$

۴) $y = (x + ۱)^۳$

۵) $y = x^۳ + ۳x$

۶) $y = Sinx \qquad x \in [۰, ۲\pi]$

***

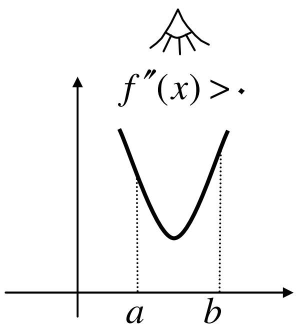
تذکر: اگردر یک نقطه مشتق اول تابع صفر باشد ولی تغییر علامت ندهد،آن نقطه ماگزیمم یا مینیمم نیست.

***

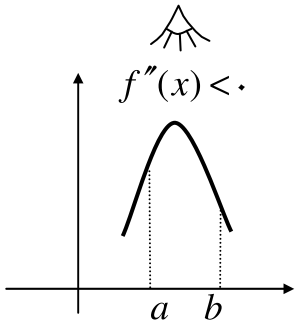
نتیجه: اگر مشتق اول تابع ریشه نداشته باشد،تابع همواره صعودی یا همواره نزولی خواهد بود.

☑ تقعر و تحدب یک تابع

فرض کنید که تابع $y = f(x)$ در یک فاصله مانند $I = (a,b)$ تعریف شده باشد.در این صورت تابع را در این فاصله مقعر گویند، هرگاه مشتق دوم آن در این فاصله مثبت باشد و برعکس. همچنین تابع را در این فاصله محدب گویند هرگاه مشتق دوم آن منفی باشد وبرعکس



تابع مقعر– تقعر مثبت (رو به بالا)



تابع محدب– تقعر منفی (رو به پایین)

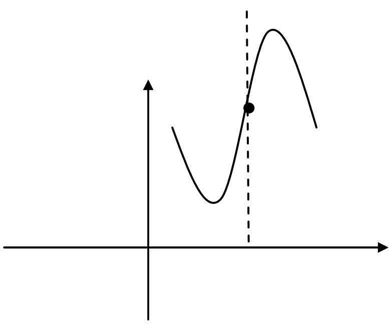
***

☑ آزمون مشتق دوم

برای تعیین تحدب وتقعر یک تابع مشتق دوم آنرا بدست آورده و تعیین علامت می کنیم. توجه کنید که ریشه ی مشتق دوم (به شرط تغییر علامت مشتق دوم در این نقطه) را نقطه ی عطف می نامند.

تمرین: جهت تغییرات و جهت تقعر تابع $y = x^{۳} - ۳x$ را رسم کنید.

نتیجه:



۱– در نقطه ی عطف تقعر منحنی عوض می شود و خط مماس بر منحنی در این نقطه نمودار تابع را قطع می کند.

۲– ریشه ی ساده ی مشتق اول طول نقاط ماگزیمم یا مینیمم است ولی ریشه ی مضاعف آن طول نقطه ی ماگزیمم یا مینیمم نیست بلکه طول نقطه ی عطف است.

(چون در این نقطه مشتق اول تغییر علامت نمی دهد.)

تمرین : نقاط عطف تابع $y = x^{۴} - ۴x^{۳}$ را به دست آورید.

☑ رسم نمودار منحنی نمایش یک تابع

برای رسم نمودار یک تابع به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱- دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

۲- مجانب های منحنی را در صورت وجود بدست می آوریم.توجه کنید که توابع چند جمله ای مجانب ندارند.

۳- از تابع مشتق گرفته و نقاط ماگزیمم یا مینیمم آنرا در صورت وجود تعیین می کنیم.

۴- اگر لازم باشد، نقطه ی عطف تابع را به کمک مشتق دوم تابع تعیین می کنیم.

۵- حد تابع را وقتی $x \to \pm\infty$ را بدست می آوریم.

۶- جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.

۷- روی دستگاه مختصات ابتدا نمودار مجانب های منحنی و سپس به کمک جدول تغییرات نمودار تابع را رسم می کنیم.

توجه: جهت افزایش دقت در رسم نمودار تابع و در صورت لزوم از چند نقطه با انتخاب طول یا عرض مناسب استفاده می کنیم. این نقاط را معمولاً نقاط کمکی می گویند.

***

تمرین: جهت تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = x^2 + 2x$

۲) $y = x^3 - 3x$

۳) $y = \dfrac{2x}{x-1}$

۴) $y = \dfrac{x}{x+1}$

۵) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

۶) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

۷) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

۸) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

۹) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x-1}$

تمرین : جهت تغییرات و نمودار تابع $y = 3x - x^3$ را رسم کنید.

☑ نقاط بحرانی تابع

یک نقطه از **<u>دامنه ی تعریف تابع</u>** f را نقطه ی بحرانی می نامند، هرگاه یکی از شرایط زیر را داشته باشد.

الف) تابع در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

ب) مشتق تابع در این نقطه برابر صفر باشد.

برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، مشتق تابع را بدست آورده و ریشه های صورت و مخرج آن را (اگر عضو دامنه باشند.) به عنوان نقطه ی بحرانی می پذیریم.

در تابع چند ضابطه ای نقاط شکستگی را نیز بررسی می کنیم.

***

تمرین : نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=x^{۳}-۳x$

۲) $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$

۳) $f(x)=\sqrt{۴x-x^{۲}}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۴x}$

۵) $f(x)=|x-۲|$

۶) $f(x)=||x|-۱|$

***

نتیجه:

۱- نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار در یک بازه نقاط بحرانی هستند.

۲- نقاط شکستگی یا ناپیوستگی تابع بحرانی هستند.

۳- نقاط ماگزیمم و مینیمم تابع نیز بحرانی هستند.

***

☑ توابع متناوب

اگر تابع $y = f(x)$ دو شرط زیر را داشته باشد، آن را متناوب گویند.

الف) هرگاه عدد مثبتی مانند c وجود داشته باشد، به طوری که وقتی x عضو دامنه باشد،آنگاه $x + c$ نیز عضو دامنه است.

$$x \in D_f \xrightarrow{\exists c > ۰} (x+c) \in D_f$$

ب) $f(x+c) = f(x)$

در این صورت کمترین مقدار مثبت c را با T نمایش می دهیم و آن را دوره ی تناوب (دوره ی تناوب اصلی) تابع f می نامیم.

***

تمرین: ثابت کنید که تابع $f(x) = \sin ax$ متناوب است. دوره ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

حل:

$$D_f = R \xrightarrow{\forall x \in R} (x+c) \in R$$

$$f(x+c) = f(x)$$

$$\sin a(x+c) = \sin ax \rightarrow \begin{cases} a(x+c) = ۲k\pi + ax \rightarrow c = \dfrac{۲k\pi}{a} \\ a(x+c) = ۲k\pi + \pi - ax \rightarrow c = \dfrac{۲k\pi + \pi - ۲ax}{a} \end{cases}$$

حالت دوم قابل قبول نیست (چون c وابسته به x است.). پس تابع داده شده متناوب است و دوره ی تناوب آن $c = \dfrac{۲k\pi}{a}, k \in Z$ می باشد.

اگر مقدار k را برابر یک قرار دهیم دوره ی تناوب اصلی تابع بدست می آید.

$$T = \frac{۲(۱)\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{|a|}$$

چون T باید مثبت باشد، لذا از قدر مطلق استفاده شده است.

***

تمرین برای حل : ثابت کنید که تابع $f(x) = \cos ax$ متناوب است. دوره ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

***

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x) = x^۲ - ۳x + ۵$ متناوب نیست.

حل:

$$D_f = R \xrightarrow{\forall x \in R} (x+c) \in R$$
$$f(x+c) = f(x)$$
$$(x+c)^۲ - ۳(x+c) + ۵ = x^۲ - ۳x + ۵ \to x^۲ + ۲cx + c^۲ - ۳x - ۳c = x^۲ - ۳x$$
$$c(۲x + c - ۳) = ۰ \to \begin{cases} c = ۰ \\ ۲x + c - ۳ = ۰ \to c = ۳ - ۲x \end{cases}$$

که هر دو مورد غیر قابل قبول هستند.

در مورد اول مقدار c برابر صفر است و در مورد دوم c وابسته به x است. لذا تابع متناوب نیست.

توجه: عدد c باید مثبت و غیر وابسته به x باشد.

***

تمرین: ثابت کنید که تابع $f(x) = nx - [nx]$ متناوب است، دوره ی تناوب اصلی آنرا بیابید.

حل:

$$D_f = R \xrightarrow{\forall x \in R} (x+c) \in R$$
$$f(x+c) = f(x)$$
$$n(x+c) - [n(x+c)] = nx - [nx] \to nx + nc - [nx + nc] = nx - [nx]$$
$$\to [nx] + nc = [nx + nc] \xrightarrow{nc \in Z} nc = k \to c = \frac{k}{n}$$

اگر $nc \in Z$ نباشد،تساوی بدست آمده غیر ممکن است .

پس تابع متناوب است و دوره ی تناوب آن می شود $T = \frac{۱}{|n|}$ چون مقدار $k = ۱$ در نظر گرفته شده است.

***

توجه:

۱- تابع ثابت $f(x) = k$ متناوب است ولی دوره ی تناوب اصلی ندارد.

۲- تنها تابع جبری متناوب $f(x) = nx - [nx]$ می باشد که دوره ی تناوب اصلی آن $T = \frac{۱}{|n|}$ است.

تمرین: دوره ی تناوب اصلی توابع زیر را در صورت متناوب بودن بدست آورید.

الف) $y = ۵x - [۵x]$ ب) $y = -۳x - [-۳x]$ ج) $y = ۴x + [۴x]$

***

نتیجه: جدول زیر چند تابع متناوب ، همراه با دوره ی تناوب اصلی آنها را نشان می دهد.

تابع	شرط	دوره ی تناوب اصلی
$\sin^n ax$ و $\cos^n ax$	n فرد باشد.	$\frac{۲\pi}{\|a\|}$
$\sin^n ax$ و $\cos^n ax$	n زوج باشد.	$\frac{\pi}{\|a\|}$
$\tan^n ax$ و $\cot^n ax$	–	$\frac{\pi}{\|a\|}$
$\|\sin ax\|$ و $\|\cos ax\|$	–	$\frac{\pi}{\|a\|}$
$\|\tan ax\|$ و $\|\cot ax\|$	–	$\frac{\pi}{\|a\|}$
$\|\sin ax\| - \|\cos ax\|$ و $\|\tan ax\| - \|\cot ax\|$	–	$\frac{\pi}{\|a\|}$
$\|\sin ax\| + \|\cos ax\|$ و $\|\tan ax\| + \|\cot ax\|$	–	$\frac{\pi}{۲\|a\|}$
$y = \sin^n ax + \cos^n ax$	n زوج باشد.	$\frac{\pi}{۲\|a\|}$
$y = \tan^n ax + \cot^n ax$	n زوج باشد.	$\frac{\pi}{۲\|a\|}$
$y = \cot^n ax - \tan^n ax$	n فرد باشد.	$\frac{\pi}{۲\|a\|}$

***

تمرین: دوره ی تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y=\tan ۲x$

۲) $y=\sin ۴x$

۳) $y=\cos^{۳}(-۵x)$

۴) $y=\sin^{۴}(۷x)$

۵) $y=|\sin ۵x|+|\cos ۵x|$

***

تمرین: دوره تناوب اصلی تابع $y=\tan\frac{۳x}{m+۱}$ برابر ۵π است. مقدار m را بیابید.

حل:

$$T=\frac{\pi}{|\frac{۳}{m+۱}|}=\frac{\pi}{\frac{۳}{|m+۱|}}=\frac{\pi}{۳}|m+۱|$$

$$\therefore \frac{\pi}{۳}|m+۱|=۵\pi \to |m+۱|=۱۵ \to |m+۱|=\pm۱۵ \to \begin{cases} m+۱=+۱۵ \to m=۱۴ \\ m+۱=-۱۵ \to m=-۱۶ \end{cases}$$

***

تذکر: اگر تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع متناوب باشد، دوره ی تناوب اصلی آن با کوچکترین مضرب مشترک دوره ی تناوب هر یک از آنها برابر است.

تمرین: دوره ی تناوب تابع $y=\tan\frac{x}{۴}+\cos\frac{x}{۶}$ را بدست آورید.

حل:

$$f_۱(x)=tg\frac{x}{۴} \to T_۱=\frac{\pi}{\frac{۱}{۴}}=۴\pi$$

$$f_۲(x)=Cos\frac{x}{۴} \to T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۶}}=۱۲\pi$$

$$\therefore T=[T_۱,T_۲]=[۴\pi,۱۲\pi]=۱۲\pi$$

توجه کنید که اگر $T_۲$ و $T_۱$ اعداد گویا باشند،نخست باید آنها را هم مخرج کنیم.فرض کنید که پس از هم مخرج شدن داشته باشیم.

$$T_۱=\frac{r_۱}{q} \text{ و } T_۲=\frac{r_۲}{q}$$

در این صورت:

$$T=\frac{[r_۱,r_۲]}{q}$$

***

تمرین: دوره ی تناوب تابع $y=\sin\frac{x}{۲}+\cos ۳x$ را بدست آورید.

حل:

$$f_۱(x)=\sin\frac{x}{۲}\rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi=\frac{۱۲\pi}{۳}$$

$$f_۲(x)=\cos ۳x\rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\therefore T=[T_۱,T_۲]=\frac{[۱۲\pi,۲\pi]}{۳}=\frac{۱۲\pi}{۳}=۴\pi$$

***

تمرین: دوره ی تناوب توابع را بدست آورید.

۱) $y=\cos^۴ ۲x+\sin^۳\frac{x}{۲}$　　۲) $y=\sin ۳x.\sin(x+\frac{\pi}{۲})$　　۳) $y=\sin ۷x.\sin ۲x$

حل:

۱)

$$f_۱(x)=\cos^۴ ۲x\rightarrow T_۱=\frac{\pi}{۲}\quad,\quad f_۲(x)=\cos^۳\frac{x}{۲}\rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi=\frac{۸\pi}{۲}$$

$$\therefore T=[T_۱,T_۲]=\frac{[\pi,۸\pi]}{۲}=\frac{۸\pi}{۲}=۴\pi$$

۲)

$$y=\sin ۳x.\cos x=\frac{۱}{۲}[\sin(۳x+x)+\sin(۳x-x)]=\frac{۱}{۲}(\sin ۴x+\sin ۲x)$$

$$f_۱(x)=\sin ۴x\rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\quad,\quad f_۲(x)=\sin ۲x\rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{۲}$$

$$\therefore T=[T_۱,T_۲]=\frac{[\pi,۲\pi]}{۲}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

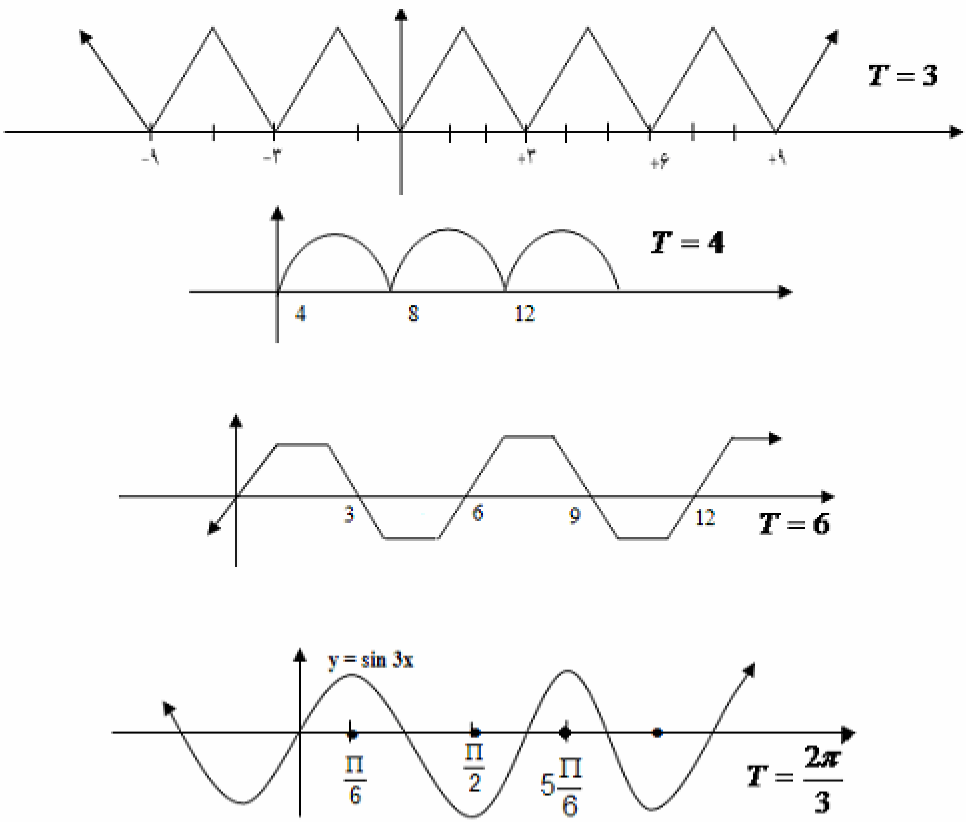
۳)

$$y=\sin ۷x.\sin ۲x=\frac{۱}{۲}(\cos ۵x-\cos ۹x)$$

$$f_۱(x)=\cos ۵x \to T_۱=\frac{۲\pi}{۵}=\frac{۱۸\pi}{۴۵} \quad , \quad f_۲(x)=\cos ۹x \to T_۲=\frac{۲\pi}{۹}=\frac{۱۰\pi}{۴۵}$$

$$\therefore T=[T_۱,T_۲]=\frac{[۱۸\pi,۱۰\pi]}{۴۵}=\frac{۹۰\pi}{۴۵}=۲\pi$$

تذکر: در واقع کمترین طول بازه ای که در آن نمودار تابع تکرار می شود را دوره ی تناوب می نامند. در هر یک از نمودار های زیر دوره ی تناوب با توجه به همین مفهوم تعیین شده است.



رسم نمودار توابع مثلثاتی

رسم نمودار توابع مثلثاتی مانند سایر توابع صورت می گیرد. تنها تفاوت این است که توابع مثلثاتی متناوب می باشند پس باید نخست دوره ی تناوب اصلی آنها را پیدا کرده و سپس نمودار را در یک دوره تناوب رسم کنیم.

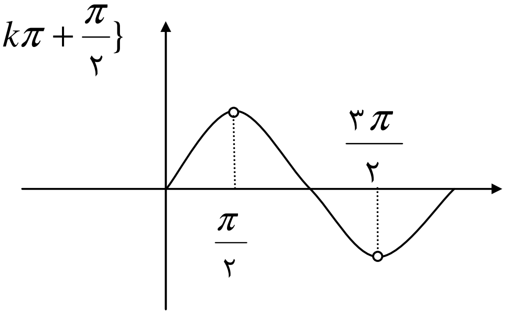
توجه:

۱) توابع مثلثاتی فقط در حالتی که کسری باشند دارای مجانب قائم می باشند و در غیر این صورت مجانب ندارند.

برای تعیین مجانب های قائم در توابع مثلثاتی بهتر است ابتدا و در صورت امکان کسر را ساده کنیم.

برای مثال تابع $f(x)=\dfrac{\sin ۲x}{۲\cos x}$ مجانب ندارد ولی در نقاط $\dfrac{\pi}{۲}$ و $\dfrac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

$$f(x)=\frac{\sin ۲x}{۲\cos x}=\frac{۲\sin x.\cos x}{۲\cos x}=\sin x \rightarrow D_f=\{x \mid x \neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$



۲) توابع مثلثاتی دارای مجانب افقی نیستند.

۳) برای تعیین علامت مشتق در توابع مثلثاتی کافی است یک نقطه ی دلخواه در یک محدوده را انتخاب و علامت مشتق را در آن نقطه بدست آوریم.(یا اینکه از دایره ی مثلثاتی کمک بگیریم.)

۴) برای سهولت در کار نقطه یابی در توابع مثلثاتی بهتر است مقدار π را برابر ۳ فرض کنیم.

تمرین: جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را در فاصله ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

۱) $y=\cos x$

۲) $y=۱+\tan x$

۳) $y=۲\sin x-۱$

۴) $y=\sin x-\cos x$

۵) $y=\cos^۲ x+\cos x$

۶) $y=\sin^۲ x+\sin x$

۷) $y=\dfrac{۲\cos x+۱}{\cos x}$

۸) $y=\dfrac{\sin x}{۱-۲\sin x}$

***

☑ حل مسائل پارامتری

در حل مسائل پارامتری معمولاً در پی یافتن یک پارامتر می باشیم. حل این مسائل به کمک ویژگی های نقاط خاص روی منحنی ها صورت می گیرد.تعدادی از این ویژگی ها عبارتند از:

۱) هر نقطه ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله ی منحنی صدق می کند. نقطه ی عادی نقطه ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

۲) نقطه ی ماگزیمم یا مینیمم دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق اول در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق اول برابر صفر می شود. ($y' = ۰$)

۳) نقطه ی عطف دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق دوم در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق دوم برابر صفر می شود. ($y'' = ۰$)

۴) نقطه ی تماس دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق اول در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق اول برابر شیب خط مماس می شود. ($y' = m$)

***

تمرین: در تابع $y = (m - ۱)x^۳ + ۲mx - ۱۳$ مقدار m را طوری بیابید که منحنی این تابع از نقطه ی $(۲,۳)$ بگذرد.

تمرین: تابع $y = x^۳ + ax^۲ + b$ داده شده است.مقدار b و a را طوری پیدا کنید که نقطه ی $M(۲,-۴)$ یکی از نقاط ماگزیمم یا مینیمم منحنی باشد.

تمرین: تابع $y = ax^۳ + bx + c$ داده شده است. مقدار cو b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبـدأ مختـصات بگـذرد و در نقطه ای به طول یک دارای مینیممی برابر ۲- باشد.

***

تمرین: تابع درجه ی سومی بنویسید که $A(۰,۴)$ نقطه ی ماگزیمم و $B(۲,۰)$ نقطه ی مینیمم آن باشد.

***

تمرین: تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و $A(۱,۱)$ نقطه ی عطف آن باشد.

***

تمرین: تابع درجه ی سومی بنویسید که $M(۰,۴)$ نقطه ی ماگزیمم و $N(۱,۲)$ مرکز تقارن آن باشد.

توجه: در تابع درجه ی سوم مرکز تقارن همان نقطه ی عطف می باشد.

***

تمرین: تابع $y = ax^۳ + bx + ۱$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y = ۵x - ۳$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

***

تمرین برای حل :

۱ : منحنی نمایش تابع $y = \frac{x+m}{x+n}$ محور طول ها را در نقطه ی A و محور عرض ها را در نقطه ی B قطع می کند.اگر معادله خط AB به صورت $y = x - ۱$ باشد. مقدار n و m را بیابید.

۲: مقدار a چقدر باشد، تا عرض نقطه ی مینیمم تابع $y = ۲a^۲ - ۲ax + ۱$ برابر ۱- باشد.

***

☑ حل مسائل بهینه سازی

گاهی در یک مسئله به دنبال یافتن بزرگترین یا کوچکترین مقدار یک متغیر می باشیم.برای حل چنین مسائلی ابتدا تابعی مشتق پذیر بر حسب متغیر مورد نظر تشکیل می دهیم و به کمک مشتق اول مقدار ماگزیمم یا مینیمم آن را محاسبه می نماییم.

تمرین: عدد۳۲ را به دو جزء چنان تقسیم کنید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم باشد.سپس بیشترین حاصل ضرب آنها را بدست آورید.

حل:

قسمت اول x

قسمت دوم $y = ۳۲ - x$

حال تابعی بر حسب x تشکیل می دهیم.

$$S = xy$$
$$S = x(۳۲ - x)$$
$$S = ۳۲x - x^۲$$

این تابع درجه ی دوم بوده و در آن $a = -۱$ می باشد،لذا تابع دارای نقطه ی ماگزیمم است.

قسمت اول $S = ۳۲ - ۲x \xrightarrow{S' = ۰} x = ۱۶$

قسمت دوم $y = ۳۲ - x = ۳۲ - ۱۶ = ۱۶$

بیشترین حاصل ضرب $S_{Max} = xy = ۳۲(۱۶) - (۱۶)^۲ = ۲۵۶$

***

تمرین: اگر $۲x + ۳y = ۴۸$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماگزیمم شود.

حل:

$$۲x + ۳y = ۴۸ \rightarrow y = \frac{۴۸ - ۲x}{۳}$$

$$S = xy = x(\frac{۴۸ - ۲x}{۳}) = \frac{۴۸x - ۲x^۲}{۳} = ۱۶x - \frac{۲}{۳}x^۲$$

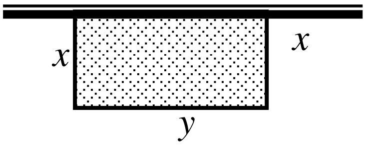
این تابع درجه ی دوم بوده و در آن $a = -\frac{۲}{۳}$ می باشد،لذا تابع دارای نقطه ی ماگزیمم است.

$$S' = ۱۶ - \frac{۴}{۳}x \xrightarrow{S'=۰} ۱۶ - \frac{۴}{۳}x = ۰ \to x = ۱۲$$

$$\to y = \frac{۴۸ - ۲x}{۳} = ۸$$

***

تمرین: برای ساختن یک باغچه در کنار یک دیوار مطابق شکل زیر ۱۰۰ متر سیم در اختیار است.ابعاد باغچه را طوری بیابید که مساحت آن ماگزیمم شود.

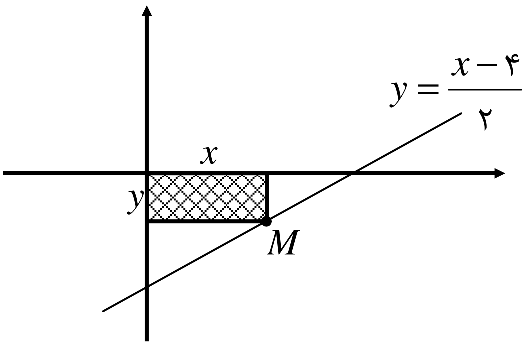


***

تمرین: محیط مستطیلی۲۰ سانتی متر است. طول و عرض آن را آنرا طوری بیابید که مساحت آن ماگزیمم شود.

***

تمرین: یک مستطیل مطابق شکل زیر به محور های مختصات و نمودار خط $y = \frac{x-۴}{۲}$ محدود شده است، طول وعرض مستطیل را چنان بیابید تا مساحت آن مینیمم شود.



***

تمرین: دو عدد حقیقی را چنان بیابید که تفاضلشان ۱۰ بوده وحاصل ضربشان مینیمم گردد.

***

تمرین: اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت ۱۰ باشد، مینیمم مجموع این دو عدد چقدر است؟

حل:

$$xy = ۱۰$$

$$P = x + y = x + \frac{۱۰}{x} = \frac{x^۲ + ۱۰}{x}$$

تابع اصلی $P = \frac{x^۲ + ۱۰}{x}$

$$D_f = R - \{۰\}$$

این تابع دارای مجانب قائم به معادله ی $x = ۰$ است.

$$P' = \frac{۲x \times x - ۱(x^۲ + ۱۰)}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱۰}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{P'=۰} \frac{x^۲ - ۱۰}{x^۲} = ۰ \to x^۲ - ۱۰ = ۰ \to x = \pm\sqrt{۱۰}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۱۰}$		۰		$+\sqrt{۱۰}$		$+\infty$
P'		+	۰	-	||	-	۰	+	
P		$\nearrow$	Max	$\searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	Min	$\nearrow$	

پس مینیمم تابع به ازاء $x = \sqrt{۱۰}$ می باشد. لذا:

$$P_{Min} = \frac{(\sqrt{۱۰})^۲ + ۱۰}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۱۰}} = ۲\sqrt{۱۰}$$

***

تمرین: دو عدد مثبت را چنان بیابید که مجموعشان ۳۰۰ باشد و حاصل ضرب مربع یکی در دیگری ماگزیمم گردد.

***

تمرین: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، آن دو عدد را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها مینیمم شود.

حل:

$$۲x - y = ۶ \to y = ۲x - ۶$$

حال تابع حاصل ضرب را تعیین و ریشه های مشتق آنرا بدست می آوریم.

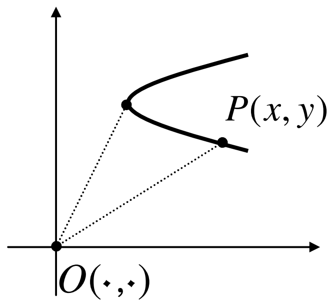
$$S = xy = x(۲x - ۶) = ۲x^۲ - ۶x$$

$$S' = ۴x - ۶ \xrightarrow{S'=۰} x = \frac{۳}{۲}$$

$$\to y = ۲(\frac{۳}{۲}) - ۶ = -۳$$

تمرین: نزدیکترین فاصله منحنی نمایش معادله ی $y^۲ = ۲x + ۵$ از مبدأ مختصات را بیابید.

حل:



ابتدا تابع فاصله را تشکیل می دهیم.

$$OP=\sqrt{x^۲+y^۲}$$
$$\xrightarrow{y^۲=۲x+۵} OP=\sqrt{x^۲+۲x+۵}$$
$$\to d=\sqrt{x^۲+۲x+۵}$$

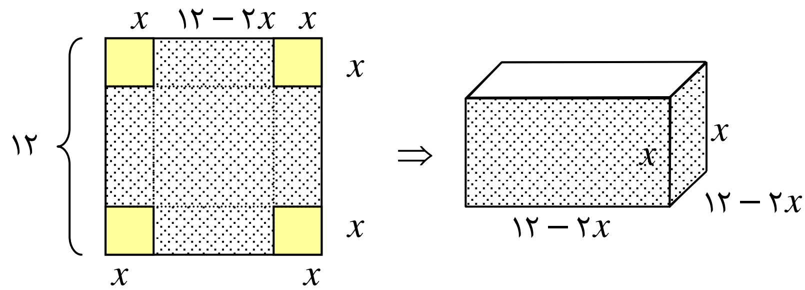
حال نقطه ی مینیمم این تابع را تعیین می کنیم.

$$d=\sqrt{x^۲+۲x+۵}\to d'=\frac{۲x+۲}{۲\sqrt{x^۲+۲x+۵}}=\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x+۵}}$$
$$\xrightarrow{d'=\cdot}\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x+۵}}=\cdot\to x=-۱$$
$$d=\sqrt{x^۲+۲x+۵}\xrightarrow{x=-۱} d_{Min}=\sqrt{(-۱)^۲+۲(-۱)+۵}=|\pm۲|=۲$$

***

تمرین: ورقه ای به شکل مربع به ضلع ۱۲ سانتی متر داده شده است.اگر با این ورقه یک جعبه ی در باز بسازیم، بزرگترین حجم ممکن این جعبه را بدست آورید.

حل:



ابتدا تابع حجم را تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق آنرا تعیین می کنیم.

$$V=abc=x\times(۱۲-۲x)\times(۱۲-۲x)=۴x(۶-x)^۲$$
$$\to V'=۴(۶-x)^۲-۸x(۶-x)\xrightarrow{V'=\cdot}۴(۶-x)^۲-۸x(۶-x)=\cdot$$
$$\to ۴(۶-x)(۶-x-۲x)=\cdot\to ۴(۶-x)(۶-۳x)=\cdot\to\begin{cases}x=۶ & \text{غ ق ق}\\ x=۲\end{cases}$$

حال حجم مکعب مستطیل را با فرض $x=۲$ بدست می آوریم.

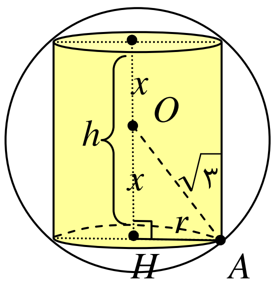
$$V_{Max} = ۴x(۶-x)^۲ = ۴(۲)(۶-۲)^۲ = ۱۲۸$$

***

تمرین: در کره ای به شعاع $\sqrt{۳}$، استوانه ای به حجم ماگزیمم محاط کرده ایم. مقدار عددی این حجم را بیابید.

حل: فرض می کنیم که ارتفاع استوانه برابر $h = ۲x$ باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه ی OAH داریم.

$$x^۲ + r^۲ = ۳ \rightarrow r^۲ = ۳ - x^۲$$



حال تابع حجم استوانه را تشکیل می دهیم.

$$V = \pi r^۲ h$$

$$\rightarrow V = \pi(۳-x^۲)\times ۲x$$

$$\rightarrow V = ۲\pi(۳x - x^۳)$$

مشتق این تابع و ریشه های آن را نیز تعیین می کنیم.

$$V = ۲\pi(۳x-x^۳) \rightarrow V' = ۲\pi(۳-۳x^۲) \xrightarrow{V'=۰} ۲\pi(۳-۳x^۲) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در آخر داریم.

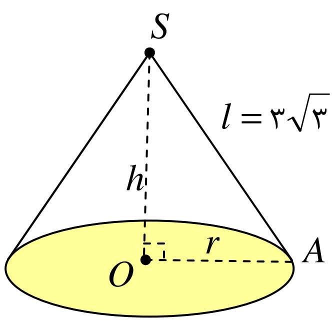
$$V = ۲\pi(۳x - x^۳) \xrightarrow{x=۱} V_{Max} = ۲\pi(۳(۱) - (۱)^۳) = ۴\pi$$

***

تمرین: بین مخروط های دوار به مولد ثابت $۳\sqrt{۳}$ ماگزیمم حجم را بیابید.

حل:

در مثلث قائم الزاویه ی AOS داریم.



$$r^۲ + h^۲ = ۲۷ \rightarrow r^۲ = ۲۷ - h^۲$$

حال تابع حجم مخروط را تشکیل می دهیم.

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷-h^۲)\times h \rightarrow V = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$$

مشتق این تابع و ریشه های آن را نیز تعیین می کنیم.

$$V=\frac{\pi}{۳}(۲۷h-h^{۳})\rightarrow V'=\frac{\pi}{۳}(۲۷-۳h^{۲})\xrightarrow{V'=۰}\begin{cases}h=۳\\ h=-۳ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

در آخر داریم.

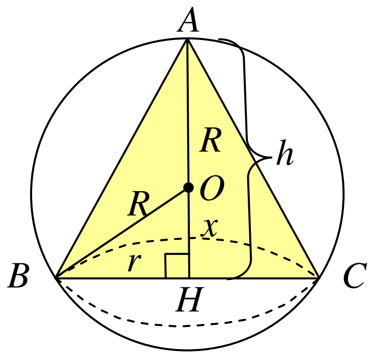
$$V=\frac{\pi}{۳}(۲۷h-h^{۳})\xrightarrow{h=۳}V_{Max}=V=\frac{\pi}{۳}(۲۷(۳)-(۳)^{۳})=۱۸\pi$$

***

تمرین: مخروط دواری در کره ای به شعاع ثابت (R) محاط کرده ایم.اگر حجم مخروط ماگزیمم باشد.

الف) اندازه ی ارتفاع مخروط را بیابید.

ب) بزرگترین حجم مخروط دوار را تعیین کنید.



حل:

ابتدا تابع حجم را تشکیل می دهیم.

$$OHB: x^{۲}+r^{۲}=R^{۲}, h=R+x$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h\rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi(R^{۲}-x^{۲})(R+x)$$

مشتق این تابع و ریشه های آن را نیز تعیین می کنیم.

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(R^{۲}-x^{۲})(R+x)\rightarrow V'_x=\frac{۱}{۳}\pi[-۲x(R+x)+۱(R^{۲}-x^{۲})]$$

$$\xrightarrow{V'=۰}-۲x(R+x)+(R-x)(R+x)=۰\rightarrow(R+x)(-۲x+R-x)=۰$$

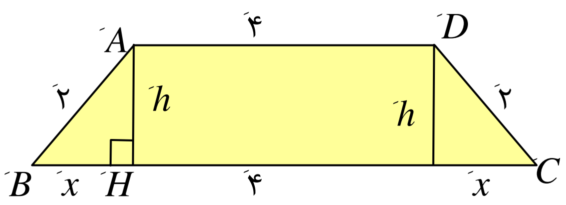
$$\rightarrow\begin{cases}R+x=۰\rightarrow x=-R & \text{غ ق ق}\\ -۳x+R=۰\rightarrow x=\frac{R}{۳}\end{cases}\rightarrow h=R+\frac{R}{۳}=\frac{۴R}{۳}$$

در آخر داریم.

$$V_{Max}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۳۲\pi R^{۳}}{۸۱}$$

***

تمرین: یک قاعده ی ذوزنقه متساوی الساقین ۴ متر و هر یک از ساق های آن ۲ متر است. قاعده ی دیگر چند متر باشد تا مساحت ذوزنقه ماگزیمم شود.



حل:

ابتدا تابع مساحت را تشکیل می دهیم.

$$ABH: x^{2}+h^{2}=4 \to h=\sqrt{4-x^{2}}$$
$$S=\frac{1}{2}(4+4+2x)h=(4+x)\sqrt{4-x^{2}}$$

مشتق این تابع و ریشه های آن را نیز تعیین می کنیم.

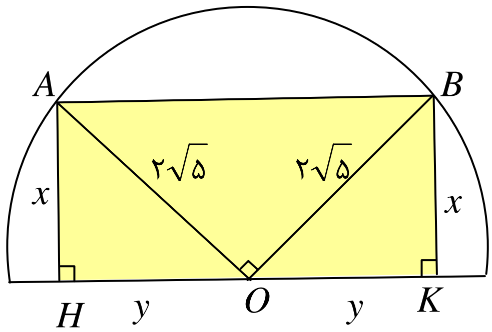
$$S=(4+x)\sqrt{4-x^{2}} \to S=1(\sqrt{4-x^{2}})+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}(4+x)$$
$$=\sqrt{4-x^{2}}+\frac{-x}{\sqrt{4-x^{2}}}(4+x)=\frac{(4-x^{2})-x(4+x)}{\sqrt{4-x^{2}}}=\frac{-2x^{2}-4x+4}{\sqrt{4-x^{2}}}$$
$$\xrightarrow{S'=0}\frac{-2x^{2}-4x+4}{\sqrt{4-x^{2}}}=0 \to -2x^{2}-4x+4=0 \xrightarrow{\div(-2)} x^{2}+2x-2=0$$
$$\to \begin{cases} x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در آخر داریم.

$$\text{طول قاعده ی دیگر} \quad 4+2x=2+2\sqrt{3}$$

***

تمرین: نیم دایره ای به شعاع $2\sqrt{5}$ مفروض است. مستطیلی در این نیم دایره طوری محاط می کنیم که یک ضلع آن روی قطر نیم دایره باشد.اگر محیط مستطیل ماگزیمم باشد، ابعاد مستطیل را بیابید.



حل:

در مثلث قائم الزاویه ی AOH داریم.

$$x^{2}+y^{2}=20 \to y=\sqrt{20-x^{2}}$$

توجه داشته باشید که دو مثلث قائم الزاویه ی OBK و OAH همنهشت بوده و $OH = OK$

حال تابع محیط مستطیل را تشکیل می دهیم.

$$P = ۲(x + ۲y) = ۲x + ۴y = ۲x + ۴\sqrt{۲۰ - x^{۲}}$$

مشتق این تابع و ریشه های آن را نیز تعیین می کنیم.

$$P = ۲x + ۴\sqrt{۲۰ - x^{۲}}$$

$$\to P' = ۲ + ۴\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۰ - x^{۲}}} = ۲ + \frac{-۴x}{\sqrt{۲۰ - x^{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۲۰ - x^{۲}} - ۴x}{\sqrt{۲۰ - x^{۲}}}$$

$$\xrightarrow{P'=۰} \frac{۲\sqrt{۲۰ - x^{۲}} - ۴x}{\sqrt{۲۰ - x^{۲}}} = ۰ \to ۲\sqrt{۲۰ - x^{۲}} - ۴x = ۰ \to ۴x = ۲\sqrt{۲۰ - x^{۲}}$$

$$\to ۲x = \sqrt{۲۰ - x^{۲}} \to ۴x^{۲} = ۲۰ - x^{۲} \to ۵x^{۲} = ۲۰ \to x^{۲} = ۴ \to \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه داریم: $y = \sqrt{۲۰ - x^{۲}} \xrightarrow{x=۲} y = \sqrt{۲۰ - (۲)^{۲}} = ۴$

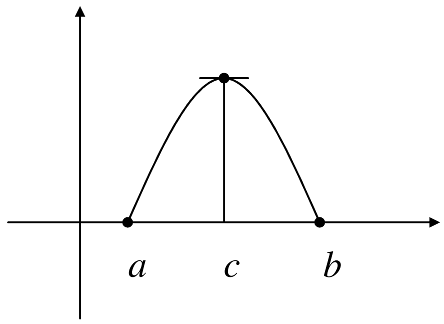
در آخر داریم.

طول مستطیل $۲y = ۲(۴) = ۸$

عرض مستطیل $x = ۲$

***

☑ قضیه ی رول



فرض کنیم که تابع f دارای ویژگی های زیر باشد.

اولاً: روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد.

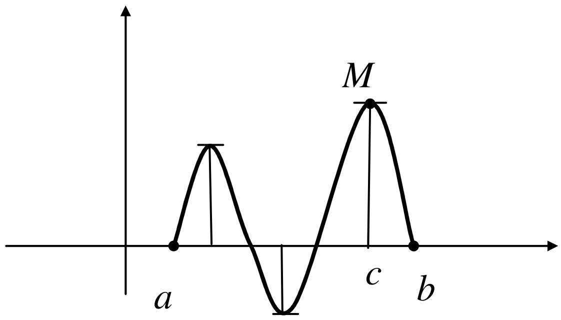
ثانیاً: روی بازه ی (a,b)مشتق پذیر باشد.

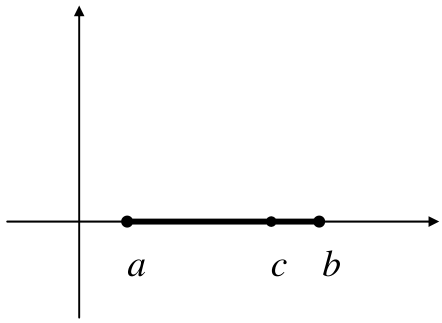
ثالثاً: $f(a)=f(b)=۰$

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع بر بازه ی (a,b) وجود دارد بطوری که $f'(c)=۰$ شود، یعنی خط مماس بر منحنی افقی باشد.

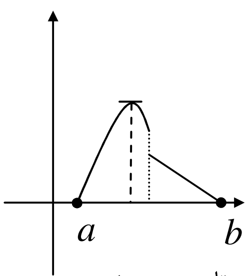
نکته ی ۱: اگر شرط ثالثاً را به صورت $f(a)=f(b)$ بنویسیم، باز هم قضیه ی رول درست است.

نکته ی ۲: ممکن است در بازه ی (a,b) بیش از یک عدد وجود داشته باشد که بازاء آنها مشتق f صفر شود.

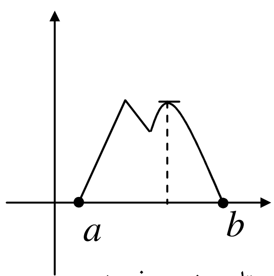




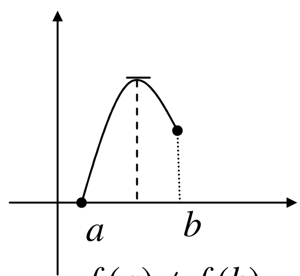
نکته ی ۳: عکس قضیه ی رول درست نیست. یعنی ممکن است تابعی مانند f طوری باشد که بازاء یک عدد $c\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(c)=۰$ نمی توان نتیجه گرفت که شرایط آن (اولاً، ثانیاً یا ثالثاً) برقرار است. به نمودار های زیر توجه کنید.



تابع پیوسته نیست.



تابع مشتق پذیر نیست.



$f(a)\neq f(b)$

تمرین: تابع $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$ را در نظر بگیرید.

الف: شرایط قضیه ی رول را در بازه ی $[۱,۲]$ بررسی کنید.

ب: مقدار مناسبی برای c بیابید که حکم قضیه ی رول را برآورده کند.

حل:

شرط اول: تابع f یک تابع چند جمله ای است و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $[۱,۲]$ پیوسته است.

شرط دوم: تابع f یک تابع چند جمله ای است و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $(۱,۲)$ مشتق پذیر است.

شرط سوم:

$$f(۱)=۱^{۳}-۲(۱)^{۲}-(۱)+۲=۰$$

$$f(۲)=۲^{۳}-۲(۲)^{۲}-(۲)+۲=۰$$

$$\Rightarrow f(۱)=f(۲)=۰$$

لذا تابع در فاصله ی داده شده هر سه شرط قضیه ی رول را دارد.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۴x-۱\xrightarrow{f'(c)=۰}۳c^{۲}-۴c-۱=۰$$

$$\Rightarrow c_1=\frac{۲+\sqrt{۷}}{۳} \quad و \quad \Rightarrow c_2=\frac{۲-\sqrt{۷}}{۳}$$

مقدار c_2 در فاصله ی $(۱,۲)$ واقع نیست، لذا قابل قبول نیست.

تمرین: تابع $f(x)=۳\cos^{۲}x$ را در نظر بگیرید.

الف: در بازه ی $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ شرایط قضیه ی رول را بررسی کنید.

ب: مقدار مناسبی برای c بیابید که حکم قضیه ی رول را برآورده می کند.

حل:

شرط اول: تابع f در بازه ی $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ پیوسته است.

شرط دوم: تابع f در بازه ی $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ مشتق پذیر است.

شرط سوم: $f(\frac{\pi}{۲})=f(\frac{۳\pi}{۲})=۰$

$$f'(x)=-۳\times ۲\sin x\cos x=-۳\sin ۲x\xrightarrow{f'(c)=۰}-۳\sin ۲c=۰$$
$$\rightarrow ۲c=k\pi\rightarrow c=\frac{k\pi}{۲}$$

$k=۰\rightarrow c=۰\notin(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ غیر قابل قبول

$k=۱\rightarrow c=\frac{\pi}{۲}\notin(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ غیر قابل قبول

$k=۲\rightarrow c=\pi\in(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ مقدار مناسب برای c

$k=۳\rightarrow c=\frac{۳\pi}{۲}\notin(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ غیر قابل قبول

تمرین: تابع $f(x)=\frac{x^۲-x-۱۲}{x-۳}$ و $[-۳,۴]$ فاصله ی داده شده اند. تعیین کنید که کدام یک از شرایط قضیه ی رول در این فاصله برقرار نیست.

حل:

$$x-۳=۰\rightarrow x=۳\rightarrow ۳\in[-۳,۴]$$

تابع در نقطه ی $x=۳$ پیوسته نیست، پس شرط اولاً در قضیه ی رول برقرار نیست.

تمرین: با استفاده از قضیه ی رول ثابت کنید که تابع زیر دارای سه ریشه می باشد. سپس حدود ریشه ها را تعیین کنید.

$$f(x)=(x-۲)(x-۳)(x-۴)+(x-۱)(x-۳)(x-۴)$$
$$+(x-۱)(x-۲)(x-۴)+(x-۱)(x-۲)(x-۳)$$

حل: فرض می کنیم که: $g(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)$ پس $f(x)=g'(x)$ و چون تابع $g(x)$ چند جمله ای بوده پس در همه ی نقاط پیوسته و مشتق پذیر است.از طرفی

$$g(x)=۰ \to (x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)=۰ \to \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \\ x=۳ \\ x=۴ \end{cases}$$

$$g(۱)=g(۲)=۰ \xrightarrow{\text{طبق قضیه رول}} \exists c_1 \in (۱,۲) \ni g'(c_1)=۰ \to f(c_1)=۰$$

$$g(۲)=g(۳)=۰ \xrightarrow{\text{طبق قضیه رول}} \exists c_2 \in (۲,۳) \ni g'(c_2)=۰ \to f(c_2)=۰$$

$$g(۳)=g(۴)=۰ \xrightarrow{\text{طبق قضیه رول}} \exists c_3 \in (۳,۴) \ni g'(c_3)=۰ \to f(c_3)=۰$$

لذا تابع $f(x)$ دارای سه ریشه به نام های c_1 و c_2 و c_3 می باشد. بدیهی است که

$$۱<c_1<۲<c_2<۳<c_3<۴$$

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که تابع $f(x)=x^۴-۴x^۲$ در فاصله ی $[۰\,,\,۲]$ شرایط قضیه ی رول را دارد. سپس مقدار c را طوری به دست آورید که به ازای آن قضیه ی رول برقرار باشد.

۲ : نشان دهید که تابع $f(x)=x^۳-x$ در فاصله ی $[-۱\,,\,۰]$ شرایط قضیه ی رول را دارد. سپس مقدار c را طوری به دست آورید که به ازای آن قضیه ی رول برقرار باشد.

***

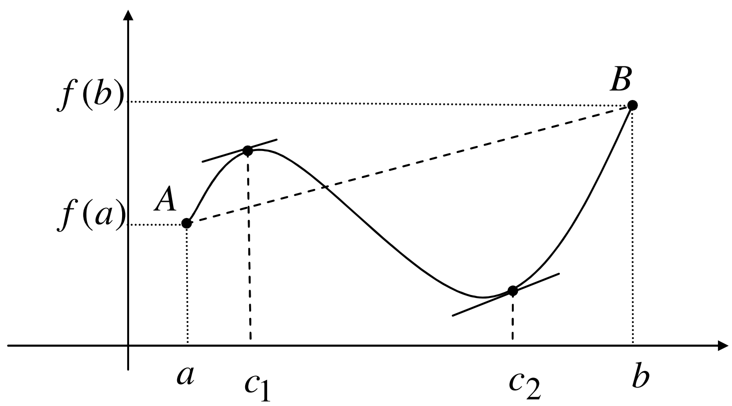
☑ قضیه ی مقدار میانگین(قضیه ی لاگرانژ)

تابع f را با شرایط زیر در نظر می گیریم:

اولاً: روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد.

ثانیاً: روی بازه ی (a,b)مشتق پذیر باشد.

در ایـن صـورت حـداقل یـک عـدد ماننـد c در بـازه ی (a,b)وجود دارد بطوری که:



$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تذکر: با توجه به شکل واضح است که کسر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط AB می باشد. پس یک نقطه بـین Bو A وجـود دارد که خط مماس بر منحنی در آن نقطه با خط AB موازی است.

تمرین: در تابع زیر شرایط قضیه ی مقدار میانگین را بررسی کرده و سپس مقدار c را بیابید.

$$f(x)=۲x-x^{۲} \text{ و } x\in[۰,۱]$$

حل: تابع f یک تابع چند جمله ای است،پس به ازاء هر x پیوسته و مشتق پذیر است و شرایط قضیه ی مقدار میانگین را دارد.

$$f(۰)=۰ \ , f(۱)=۱, f'(x)=۲-۲x$$
$$f'(c)=۲-۲c$$
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=۱-۰=۱$$
$$\therefore ۲-۲c=۱\rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

تمرین: در قضیه ی مقدار میانگین در مورد مشتق برای تابع با ضابطه ی $y=x^{۳}-x+۱$ بر بازه ی $[۱,b]$ مقدار c برابر $\sqrt{۷}$ است. مقدار b را بدست آورید.

حل: تابع داده شده در تمام نقاط حقیقی پیوسته ومشتق پذیر است پس طبق قضیه ی مقدار میانگین داریم.

$$f(x)=x^{۳}-x+۱\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۱$$
$$\rightarrow f'(c)=۳c^{۲}-۱\xrightarrow{c=\sqrt{۷}} f'(\sqrt{۷})=۳\sqrt{۷}^{۲}-۱=۲۰$$
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(۱)}{b-۱}$$
$$\rightarrow ۲۰=\frac{f(b)-f(۱)}{b-۱}\rightarrow ۲۰=\frac{(b^{۳}-b+۱)-(۱^{۳}-۱+۱)}{b-۱}\rightarrow ۲۰=\frac{b^{۳}-b}{b-۱}\rightarrow ۲۰=\frac{b(b^{۲}-۱)}{b-۱}$$
$$\rightarrow ۲۰=\frac{b(b-۱)(b+۱)}{b-۱}\rightarrow ۲۰=b(b+۱)\rightarrow b^{۲}+b-۲۰=۰\rightarrow (b+۵)(b-۴)=۰\rightarrow b=-۵ \ , \ b=۴$$

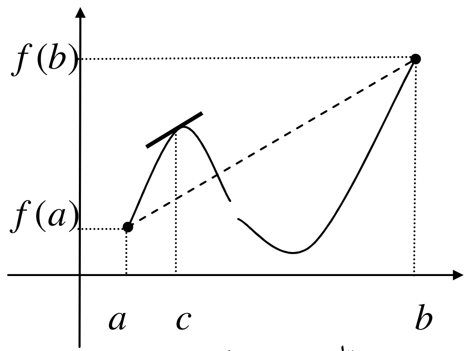
و چون با توجه به بازه ی داده شده مقدار $b>۱$ است پس فقط $b=۴$ قابل قبول است

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که تابع $f(x)=x^{۲}+۲x-۱$ در فاصله ی $[۰,۱]$ شرایط قضیه ی لاگرانژ (مقدار میانگین) را دارد. سپس مقدار مناسب c را بدست آورید.

۲ : برای هر دو عدد حقیقی b و a ثابت کنید که : $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$

توجه: عکس قضیه ی مقدار میانگین برقرار نیست. به نمودار زیر توجه کنید.



تابع پیوسته نیست.

برای مثال تابع زیر در فاصله ی $[۰,۲]$ پیوسته است ولی در نقطه ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست. در حالی کـه $\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=۲$ و $f'(\sqrt{\frac{۲}{۳}})=۲$ در حالی که $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\in[۰,۲]$

$$f(x)=\begin{cases}x^{۳} & ۰\le x\le ۱\\ x^{۲} & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

و

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲} & ۰\le x<۱\\ \text{وجود ندارد} & x=۱\\ ۲x & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

***

☑ **قضیه ی مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیه ی کوشی)**

فرض کنید توابع f و g بر $[a,b]$ تعریف شده و در شرایط زیر صدق کنند.

الف: f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند.

ب: f و g بر (a,b) مشتق پذیر باشند.

ج: برای هر $x\in(a,b)$ مقدار $g'(x)$ مخالف صفر باشد.

در این صورت عددی چون c در بازه ی باز (a,b) موجود است. بطوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

تمرین: نشان دهید که توابع $f(x)=x^{۲}+۲x-۱$ و $g(x)=x^{۲}-۲x+۱$ در فاصله ی $[۰,۱]$ شرایط قضیه ی کوشی را دارند. سپس مقدار مناسب c را بدست آورید.

حل :

شرط اول: توابع g و f چند جمله ای هستند و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $[۰,۱]$ پیوسته می باشند.

شرط دوم: تابع g و f چند جمله ای هستند و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $(۰,۱)$ مشتق پذیر می باشند.

شرط سوم: $g'(x)=۲x-۲ \xrightarrow{g'(x)=۰} ۲x-۲=۰ \to x=۱$

پس در فاصله ی $(۰,۱)$ مقدار $g'(x)\neq ۰$ است.

لذا توابع داده شده در فاصله ی $[۰,۱]$ شرایط قضیه ی کوشی را دارند. از طرفی:

$$f(۰)=(۰)^{۲}+۲(۰)-۱=-۱$$

$$f(۱)=(۱)^{۲}+۲(۱)-۱=۲$$

$$f'(x)=۲x+۲ \to f'(c)=۲c+۲$$

$$g(۰)=(۰)^{۲}-۲(۰)+۱=۱$$

$$g(۱)=(۱)^{۲}-۲(۱)+۱=۰$$

$$g'(x)=۲x-۲ \to f'(c)=۲c-۲$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \frac{f(۱)-f(۰)}{g(۱)-g(۰)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \frac{۲-(-۱)}{۰-۱}=\frac{۲c+۲}{۲c-۲} \to \frac{۳}{-۱}=\frac{۲(c+۱)}{۲(c-۱)}$$

$$\to ۳c-۳=-c-۱ \to ۴c=۲ \to c=\frac{۱}{۲}$$

***

☑ قضیه ی مشتق تابع ثابت

اگر تابع f روی بازه ی باز I مشتق پذیر بوده و f' روی I برابر مقدار ثابت صفر باشد،آنگاه f روی I تابع ثابت است.

تمرین: با استفاده از قضیه ی مشتق تابع ثابت نشان دهید که برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\sin^{۲} x+\cos^{۲} x=۱$$

حل: تابع $f(x)=\sin^{۲} x+\cos^{۲} x$ را روی R در نظر می گیریم. f تابعی پیوسته و مشتق پذیر است. بنابراین

$f'(x) = ۲\sin x\cos x - ۲\sin x\cos x = ۰$

چون مشتق تابع f صفر شده است،پس مقدار تابع یک عدد ثابت مانند k است. گیریم که $f(x) = k$

حال برای تعیین این مقدار ثابت یک عدد دلخواه را طوری انتخاب می کنیم که مقدار آن به آسانی محاسبه شود. برای مثال :

$x = ۰ \rightarrow f(۰) = \sin^۲(۰) + \cos^۲(۰) = ۰ + ۱ = ۱$

لذا

$$f(x) = \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

تمرین برای حل : نشان دهید که $Arc\sin x + Arc\cos x = \frac{\pi}{۲}$

***

☑ دیفرانسیل تابع

اگر تابع f در نقطه ی $x = x_\circ$ مشتق پذیر باشد، در این صورت $f'(x_\circ)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع در نقطه ی $x = x_\circ$ می نامند و آن را با dy یا $df(x_\circ)$ نمایش می دهند.

$$dy = df(x_\circ) = f'(x_\circ).\Delta x$$

توجه: مقدار dy به هر دو عامل $x_\circ$ و Δx بستگی دارد. Δx را نمو x می نامند.

همچنین دیفرانسیل تابع در هر نقطه از دامنه اش به صورت زیر تعریف می شود.

$$dy = df(x) = f'(x).dx$$

تمرین: دیفرانسیل تابع $f(x) = \cos ۲x$ را در نقطه ی $x = \frac{\pi}{۴}$ وقتی x به اندازه ی ۰/۱ نمو کند را پیدا کنید.

حل:

$$df(x) = f'(x).\Delta x$$
$$df(x) = -۲\sin ۲x.\Delta x$$
$$\xrightarrow{df(x_\circ) = f'(x_\circ).\Delta x} df(\frac{\pi}{۴}) = -۲\sin ۲(\frac{\pi}{۴}).(۰/۱) = -۲ \times ۱ \times ۰/۱ = -۰/۲$$

تمرین: نمو تقریبی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$ را در نقطه ی $x = ۳$ وقتی x به اندازه ی ۰/۱ نمو کند را پیدا کنید.

حل:

$$\Delta y \approx df(x) = f'(x).\Delta x$$
$$\Delta y \approx df(x) = \frac{۲x}{۳ \times \sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}}.\Delta x$$
$$\xrightarrow{\Delta y \approx df(x_\circ) = f'(x_\circ).\Delta x} \Delta y = df(۳) = \frac{۲(۳)}{۳ \times \sqrt[۳]{(۳^۲ - ۱)^۲}}.(۰/۱) = ۰/۶ \times ۰/۱ = ۰/۰۵$$

توجه: چون نمو تقریبی تابع در $x = x_\circ$ برابر $\Delta y \approx df(x_\circ) = f'(x_\circ).\Delta x$ می باشد.

تمرین: دیفرانسیل توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=۲x^{۳}-x+\cos x$

۲) $g(x)=L_n ۲x-e^{x}+\sqrt{۳}$

۳) $h(x)=Arc\cos ۴x+\sqrt{x^{۲}+\sin x}$

۴) $k(x)=\dfrac{۱}{(x^{۲}-۱)^{۵}}$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $d(\dfrac{x^{۲}+x-۱}{x^{۴}+x})=$

۲) $d(\sqrt{x^{۲}-x+۱})=$

۳) $d[(\cos\sqrt{x})^{۵}]=$

۴) $d(\dfrac{\sin x}{e^{x}})=$

تمرین: درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$d(\frac{x}{۱+x^{۲}}+Arc\tan x)=\frac{۲dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

حل:

$$d(\frac{x}{۱+x^{۲}}+Arc\tan x)=d(\frac{x}{۱+x^{۲}})+d(Arc\tan x)$$

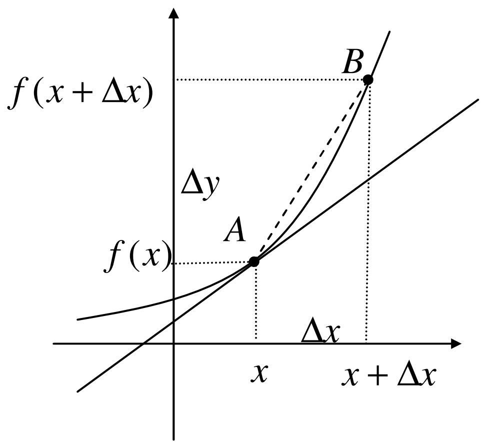
$$=\frac{۱(۱+x^{۲})-۲x(x)}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx+\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx=(\frac{۱+x^{۲}-۲x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}+\frac{۱}{۱+x^{۲}})dx$$

$$=(\frac{۱-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}+\frac{۱}{۱+x^{۲}})dx=(\frac{۱-x^{۲}+۱+x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}})dx=\frac{۲dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

تمـــــرین بـــــرای حـــــل : تـــساوی مقابــــل را ثابـــت کنیــــد.

$$d(\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}}{۲x+۱})=\frac{x-۲}{(۲x+۱)^{۲}\sqrt{x^{۲}+۱}}dx$$

☑ **تعبیر هندسی دیفرانسیل**



اگر $y=f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\rightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

لذا می توان نوشت: $f'(x)\Delta x=f(x+\Delta x)-f(x)$

در نهایت خواهیم داشت:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

این رابطه برای محاسبه ی مقدار تقریبی بسیاری از تساوی های ریاضی بکار می رود.

تمرین: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt{۲۶}$ را پیدا کنید.

حل: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\rightarrow f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} \\ x=۲۵ \\ \Delta x=۱ \end{cases}\rightarrow f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Delta x\rightarrow \sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۵}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}}(۱)$$

$$\rightarrow \sqrt{۲۶}=۵+\frac{۱}{۲(۵)}=۵/۱$$

نتیجه: اگر k یک عدد مثبت باشد. داریم:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{k^۲+r}=\sqrt{k^۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{k^۲}}r\rightarrow \sqrt{k^۲+r}=k+\frac{r}{۲k}$$

تمرین: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی هر یک از موارد زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[۳]{۱۰}$

ب) $\sin ۳۱^\circ$

ج) $\cos ۵۸^\circ$

د) $Arc\tan ۰/۹$

حل:

الف) تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[۳]{x} \to f'(x)=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \\ x=۸ \\ \Delta x=۲ \end{cases} \to f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt[۳]{x+\Delta x}=\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Delta x \to \sqrt[۳]{۸+۲}=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}(۲)$$

$$\to \sqrt[۳]{۱۰}=۲+\frac{۱}{۳(۴)}(۲)=۲+۰/۱۶=۲/۱۶$$

ب) تابع $f(x)=\sin x$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x \\ x=۳۰^\circ \\ \Delta x=۱^\circ=\dfrac{\pi}{۱۸۰}=۰/۰۱۶ \end{cases} \to f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\sin(x+\Delta x)=\sin x+\cos x.\Delta x \to \sin(۳۰+۱)=\sin ۳۰+\cos ۳۰\times(۰/۰۱۶)$$

$$\to \sin ۳۱=\sin ۳۰+\cos ۳۰\times(۰/۰۱۶) \to \sin ۳۱=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۰/۰۱۷)=۰/۵۱۳$$

توجه: لازم است زاویه ی Δx یعنی یک درجه را به رادیان تبدیل کنیم. رابطه ی تبدیل درجه به رادیان به صورت زیر است.

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}}$$

در این صورت داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{D=۱}\frac{۱}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\to R=\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۳/۱۴}{۱۸۰}=۰/۰۱۷$$

ج) تابع $f(x)=\cos x$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\cos x \to f'(x)=-\sin x \\ x=۶۰^\circ \\ \Delta x=-۲^\circ=-\dfrac{۲\pi}{۱۸۰}=-۰/۰۳۴ \end{cases} \to f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\cos(x+\Delta x)=\cos x+(-\sin x).\Delta x \to \cos(۶۰-۲)=\cos ۶۰+(-\sin ۶۰)\times(-۰/۰۳۴)$$

$$\to \cos ۵۸=\cos ۶۰+\sin ۶۰\times(۰/۰۳۴) \to \cos ۶۲=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times(۰/۰۳۴)=۰/۵۲۹$$

توجه:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{D=۲}\frac{۲}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\to R=\frac{۲\pi}{۱۸۰}=\frac{۳/۱۴}{۹۰}=۰/۰۳۴$$

د) تابع $f(x)=Arc\ \tan x$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x)=Arc\ \tan x\to f'(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}} \\ x=۱ \\ \Delta x=-۰/۱\,R \end{cases}\to f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\to Arc\ \tan(x+\Delta x)=Arc\ \tan x+(\frac{۱}{۱+x^{۲}}).\Delta x$$

$$\to Arc\ \tan(۱-۰/۱)=Arc\ \tan ۱+(\frac{۱}{۱+۱^{۲}})\times(-۰/۱)$$

$$\to Arc\ \tan(۰/۹)=\frac{\pi}{۴}+(\frac{۱}{۲})\times(-۰/۱)=\frac{\pi}{۴}-(\frac{۱}{۲۰})R=۴۵-۲/۸۶=۴۲/۱۳^{\circ}$$

توجه:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{R=\frac{\pi}{۴}}\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۴}}{\pi}\to D=\frac{۱۸۰\pi}{۴\pi}=۴۵^{\circ}$$

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{R=\frac{۱}{۲۰}}\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{\pi}\to D=\frac{۱۸۰}{۲۰\pi}=\frac{۹}{\pi}=۲/۸۶^{\circ}$$

تمرین برای حل : مقدار تقریبی هر یک از اعداد زیر را به کمک دیفرانسیل به دست آورید.

۱) $\sqrt{۲۸}$

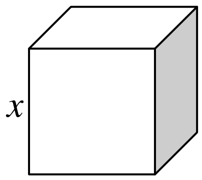
۲) $\sqrt{۳۸}$

۳) $\sqrt[۳]{۹}$

۴) $\sin(۴۸^{\circ})$

تمرین: یک مکعب فلزی به ضلع ۱۰ سانتی متر را حرارت می دهیم و هر ضلع آن یک میلی متر بزرگ می شود. حجم تقریبی مکعب پس از حرارت دادن را برحسب سانتی متر مکعب بدست آورید.

حل: تابع $V(x)=x^3$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:



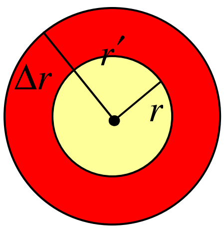
$$\begin{cases} V(x)=x^3 \to V'(x)=3x^2 \\ x=10_{cm} \\ \Delta x=1_{mm}=0/1_{cm} \end{cases}$$

$$\to V(x+\Delta x)=V(x)+V'(x)\Delta x \to (x+\Delta x)^3=x^3+(3x^2)\Delta x$$

$$\to (x+\Delta x)^3=(10)^3+3(10)^2(0/1)=1000+30=1030_{cm^3}$$

تمرین: شعاع های داخلی و خارجی یک کره ی توخالی به ترتیب ۱۰ سانتی متر و ۱۰/۰۱ سانتی متر است. حجم تقریبی جداره ی کره چند سانتی متر مکعب است.

حل: تابع $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:



$$\begin{cases} V(x)=\frac{4}{3}\pi r^3 \to V'(x)=4\pi r^2 \\ r=10_{cm} \\ \Delta r=0/01_{cm} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r'=r+\Delta r} V(r')=V(r+\Delta r)=V(r)+V'(r)\Delta r$$

بدیهی است که حجم جداره با تفاضل حجم کره ی کوچک از حجم کره ی کوچک بدست می آید. پس:

حجم جداره = $V(r')-V(r)$

لذا

$$V(r')-V(r)=[V(r)+V'(r)\Delta r]-V(r)=V'(r)\Delta r=(4\pi r^2)\Delta r=4\pi(10)^2\times(0/01)=4\pi_{cm^3}$$

فصل چهارم (انتگرال و کاربرد آن)

فهرست مطالب فصل چهارم

عنوان..

انتگرال

تا به حال روش های متعددی برای محاسبه ی مشتق تابع $f(x)$ ارائه گردید. امّا در حل بسیاری از مسائل لازم است که عکس این روند را انجام دهیم. به عبارت دیگر،در این قسمت فرض بر این است که $f'(x)$ داده شده و منظور تعیین تابع $f(x)$ است. فرآیند تعیین تابع $f(x)$ از $f'(x)$ را ضد مشتقگیری یا پادمشتق گیری می نامند.

***

تعریف : تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه یا ضدمشتق یا پاد مشتق $f(x)$ می نامند، هرگاه به ازای هر x داشته باشیم.

$$F'(x) = f(x)$$

***

تمرین : یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = ۳x^۲$ به دست آورید.

حل: بنابر تعریف تابع اولیه، چون مشتق هر یک از این توابع زیر برابر $f(x) = ۳x^۲$ است. پس هر یک از توابع می تواند یک تابع اولیه برای تابع $f(x)$ باشند.

$$F(x) = x^۳$$

$$F(x) = x^۳ + ۱$$

$$F(x) = x^۳ - ۲$$

$$F(x) = x^۳ + \frac{۳}{۲}$$

$$F(x) = x^۳ - \sqrt{۵}$$

....

به طور کلی برای هر عدد حقیقی c می توان نوشت:

$$F(x) = x^۳ + c$$

***

تمرین : یک تابع اولیه برای تابع $g(x) = \sin x$ به دست آورید.

حل: بنابر تعریف تابع اولیه، چون مشتق تابع زیر برابر $g(x)=\sin x$ است. پس این تابع می تواند یک تابع اولیه برای تابع $g(x)$ باشند.

$$G(x)=-\cos x+c$$

***

تعریف : تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه ی $f(x)$ باشد. در این صورت می نویسند:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

و تابع $F(x)+c$ را **انتگرال نامعین** یا به اختصار انتگرال $f(x)$ می نامند.

مثال

۱ : $\int ۳x^{۲}dx=x^{۳}+c$ ۲ : $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

***

توجه :

۱ : نماد dx دیفرانسیل متغیر x می باشد.

۲ : عمل تعیین تابع اولیه را انتگرال گیری می نامند.

۳ : اگر تابع f در یک بازه مانند I پیوسته باشد، آنگاه روی این فاصله دارای تابع اولیه و در نتیجه دارای انتگرال است.

***

ویژگی های انتگرال

۱ : انتگرال حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در انتگرال تابع برابر است.

$$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)dx$$

۲ : انتگرال مجموع دو تابع با مجموع انتگرال های آنها برابر است.

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

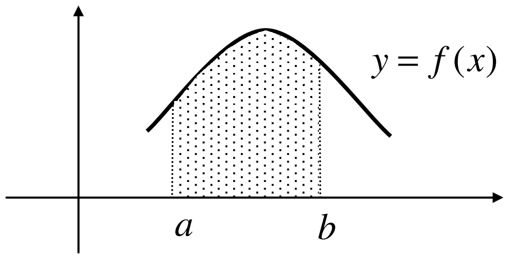
مثال :

۱) $\int ۵\sin x\,dx=۵(-\cos x)+c=-۵\cos x+c$ ۲) $\int (۳x^{۲}+\sin x)dx=x^{۳}-\cos x+c$

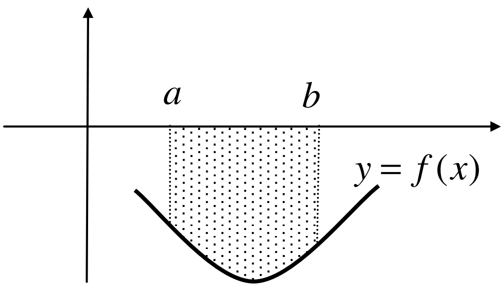
***

انتگرال معین

فرض کنید که تابع f در بازه ی $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. **انتگرال معین** تابع f از a تا b که آن را به صورت $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می دهند. به صورت زیر تعریف می کنند.



الف : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد (نمودار تابع بالای محور x ها باشد) ، در این صورت مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.



ب : اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد (نمودار تابع پایین محور x ها باشد) ، در این صورت قرینه ی مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.

تذکر : عدد a را حد پایین و عدد b را حد بالای انتگرال معین می نامند.

نتیجه : انتگرال معین یک تابع پیوسته در فاصله ی $[a,b]$ همواره یک عدد حقیقی است. اگر نمودار تابع بالای محور x ها باشد، مقدار انتگرال معین مثبت و اگر پایین محور x ها باشد، مقدار انتگرال را منفی خواهد شد.

***

رابطه ی بین انتگرال نامعین و انتگرال معین

فرض کنید که تابع f در بازه ی $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه ی آن باشد. در این صورت

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

این تساوی به قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال موسوم است.

نتیجه : برای هر تابع f داریم :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

***

فرمول های انتگرال گیری

۱) $\int dx = x + c$

مثال :

$$\int ۳\,dx = ۳x + c$$

***

۲) $\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} + c \qquad n \neq -۱$

مثال :

$$\int ۵x^۳ dx = ۵\left(\frac{۱}{۳+۱} x^{۳+۱}\right) + c = \frac{۵}{۴} x^۴ + c$$

***

۳) $\int x^{-۱} dx = \int \frac{۱}{x} dx = L_n |x| + c$

مثال :

$$\int \frac{۳}{x} dx = ۳\ L_n |x| + c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \left(۳x^۲ + \frac{۵}{x} - ۱\right) dx$$

حل :

$$\int \left(۳x^۲ + \frac{۵}{x} - ۱\right) dx = \frac{۳}{۲+۱} x^{۲+۱} + ۵\ L_n |x| - x + c = x^۳ + ۵\ L_n |x| - x + c$$

***

توجه : برای هر عدد حقیقی و غیر صفر a و اعداد طبیعی m و n همواره داریم:

الف) $\frac{۱}{a^n} = a^{-n}$ ب) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

از این دو تساوی در سهولت استفاده از فرمول های انتگرال (بویژه توابع کسری و رادیکالی) نیز مورد استفاده قرار می گیرند.

***

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{۵}{x^۴}dx$ ب) $\int ۴\sqrt[۳]{x^۲}dx$ ج) $\int (۵x^۴ + \frac{۱}{x} + \sqrt{x} - ۱۲)dx$

حل :

الف) $\int \frac{۵}{x^۴}dx = \int ۵x^{-۴}dx = \frac{۵}{-۴+۱}x^{-۴+۱} + c = \frac{۵}{-۳}x^{-۳} + c = \frac{۵}{-۳x^۳} + c$

ب) $\int ۴\sqrt[۳]{x^۲}dx = \int ۴x^{\frac{۲}{۳}}dx = \frac{۴}{\frac{۲}{۳}+۱}x^{\frac{۲}{۳}+۱} + c = \frac{۴}{\frac{۵}{۳}}x^{\frac{۵}{۳}} + c = \frac{۱۲}{۵}\sqrt[۳]{x^۵} + c$

***

نتیجه :

۱) $\int \frac{۱}{x}dx = L_n |x| + c$ ۲) $\int \sqrt{x}dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳} + c$

***

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (x^۲ - ۳\sqrt{x^۵} + \frac{۷}{x^۲} + ۱)dx$

ب) $\int (۵x^۴ + \frac{۱}{x} + \sqrt{x} - ۱۲)dx = x^۵ + L_n |x| + \frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳} + ۱۲x + c$

حل :

الف) $\int (x^۲ - ۳\sqrt{x^۵} + \frac{۷}{x^۲} + ۱)dx = \int (x^۲ - ۳x^{\frac{۵}{۲}} + ۷x^{-۲} + ۱)dx$

$= \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۳}{\frac{۷}{۲}}x^{\frac{۷}{۲}} + \frac{۷}{-۱}x^{-۱} + x + c = \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۶}{۷}\sqrt{x^۷} - \frac{۷}{x} + x + c$

ب) $\int (۵x^۴ + \frac{۱}{x} + \sqrt{x} - ۱۲)dx = x^۵ + L_n |x| + \frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳} + ۱۲x + c$

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-1}^{1}(3x^2+5x)dx$

ب) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}$

حل :

الف) $\int_{-1}^{1}(3x^2+5x)dx$

$$=(x^3+\frac{5}{2}x^2)\Big|_{-1}^{1}=((1)^3+\frac{5}{2}(1)^2)-((-1)^3+\frac{5}{2}(-1)^2)=1+\frac{5}{2}+1-\frac{5}{2}=2$$

ب) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}=L_n x\Big|_{1}^{2}=(L_n 2)-(L_n 1)=(L_n 2)-(0)=L_n 2$

***

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int(3x^2-4x+2)dx$

ب) $\int(x^2+5x\sqrt{x}-1)\,dx$

ج) $\int(\frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-5}{x^2})dx$

د) $\int 2(x+1)^3\,dx$

هـ) $\int_{0}^{1}(3x^2-4x+2)dx$

و) $\int_{2}^{5}(x^2+\frac{1}{x^2})dx$

تمرین برای حل : حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$$\int_a^b(x-a)(x-b)dx=?$$

تمرین برای حل : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\int_a^a f(x)dx=0$

ب) $\int_a^b m\,dx=m(b-a)$

***

تذکر: با تعیین شرایطی می توان مقدار ثابت انتگرال گیری یعنی c را تعیین کرد. به تمرین زیر توجه کنید.

تمرین : تابع اولیه ای مانند $F(x)$ برای $f(x)=3x^2+2x+6$ به قسمی تعیین کنید که $F(1)=5$

حل :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(۳x^{۲}+۲x+۶)dx=x^{۳}+x^{۲}+۶x+c$$

حال با توجه به شرط داده شده مقدار c را تعیین می کنیم.

$$F(۱)=۵$$

$$F(۱)=(۱)^{۳}+(۱)^{۲}+۶(۱)+c\rightarrow ۵=۱+۱+۶+c\rightarrow c=-۳$$

لذا تابع اولیه ی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود.

$$F(x)=x^{۳}+x^{۲}+۶x-۳$$

***

ادامه ی فرمول های انتگرال گیری

۴) $\int a^{mx}\,dx=\frac{۱}{m L_n a}a^{mx}+c \qquad a>۰\ ,\ a\neq ۱$

مثال :

$$\int ۳\times ۵^{۴x}\,dx=\frac{۳}{۴L_n ۵}۵^{۴x}+c$$

نتیجه :

الف) $\int a^{x}\,dx=\frac{۱}{L_n a}a^{x}+c \qquad a>۰\ ,\ a\neq ۱$

ب) $\int e^{mx}\,dx=\frac{۱}{m}e^{mx}+c$

ج) $\int e^{x}\,dx=e^{x}+c$

مثال :

الف) $\int ۳\times ۴^{x}\,dx=\frac{۳}{L_n ۴}۴^{x}+c$

ب) $\int ۳e^{۵x}\,dx=\frac{۳}{۵}e^{۵x}+c$

ج) $\int ۲e^{x}\,dx=۲e^{x}+c$

۵) $\int \sin ax dx = -\frac{۱}{a}\cos ax + c$

مثال :

$$\int ۵\sin ۳x dx = -\frac{۵}{۳}\cos ۳x + c$$

نتیجه :

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

***

۶) $\int \cos ax dx = \frac{۱}{a}\sin ax + c$

مثال :

$$\int ۵\cos ۳x dx = \frac{۵}{۳}\sin ۳x + c$$

نتیجه :

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

***

۷) $\int \tan ax\, dx = -\frac{۱}{a}L_n |\cos ax| + c$

مثال :

$$\int ۵\tan ۳x\, dx = -\frac{۵}{۳}L_n |\cos ۳x| + c$$

نتیجه :

$$\int \tan x\, dx = -L_n |\cos x| + c$$

***

۸) $\int \cot ax\, dx = \frac{۱}{a}L_n |\sin ax| + c$

مثال :

$$\int ۵\cot ۳x\,dx = \frac{۵}{۳}L_n|\sin ۳x|+c$$

نتیجه :

$$\int \cot x\,dx = L_n|\sin x|+c$$

***

۹) $\int (۱+\tan^۲ ax)\,dx = \int \frac{۱}{\cos^۲ ax}dx = \frac{۱}{a}\tan ax + c$

مثال :

$$\int ۵(۱+\tan^۲ ۳x)\,dx = \frac{۵}{۳}\tan ۳x + c$$

نتیجه :

$$\int (۱+\tan^۲ x)\,dx = \int \frac{۱}{\cos^۲ x}dx = \tan x + c$$

***

۱۰) $\int (۱+\cot^۲ ax)\,dx = \int \frac{۱}{\sin^۲ ax}dx = -\frac{۱}{a}\cot ax + c$

مثال :

$$\int ۵(۱+\cot^۲ ۳x)\,dx = -\frac{۵}{۳}\cot ۳x + c$$

نتیجه :

$$\int (۱+\cot^۲ x)\,dx = \int \frac{۱}{\sin^۲ x}dx = -\cot x + c$$

***

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (\cos x - \sin x + e^x)dx$

ب) $\int (۳\tan x + ۵\cot x)dx$

ج) $\int (\tan^۲ x + \cot^۲ x)dx$

د) $\int (e^{-۵x} + ۳^{۲x} - \frac{۲}{x} + \frac{۱}{۳})dx$

هـ) $\int_۰^۱ (۲x + e^x)dx$

حل:

الف) $\int (\cos x - \sin x + e^x)dx = \sin x + \cos x + e^x + c$

ب) $\int (۳\tan x + ۵\cot x)dx = ۳L_n |\cos x| + ۵L_n |\sin x| + c$

ج) $\int (\tan^۲ x + \cot^۲ x)dx = \int (۱ + \tan^۲ x + ۱ + \cot^۲ x - ۲)dx = \tan x - \cot x - ۲x + c$

د) $\int e^{-۵x} + ۳^{۲x} - \frac{۲}{x} + \frac{۱}{۳})dx = \frac{۱}{-۵}e^{-۵x} + \frac{۱}{۲L_n ۳}۳^{۲x} - ۲L_n |x| + \frac{۱}{۳}x + c$

هـ) $\int_۰^۱ (۲x + e^x)dx = (\frac{۲}{۲}x^۲ + e^x)\Big|_۰^۱ = ((۱)^۲ + e^۱) - ((۰)^۲ + e^۰) = ۱ + e - ۰ - ۱ = e$

***

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (\cos x + \cot x)dx$

۲) $\int (۲\tan x - \frac{۱}{\cos^۲ x} + ۲e^x)dx$

۳) $\int \sin^۲ x dx$

۴) $\int \cos^۲ x dx$

۵) $\int (\cos x - \sin x + e^x)dx$

۶) $\int (۳ + \tan^۲ x)dx$

۷) $\int \cos^۳ x dx$

۸) $\int \sin^۳ x dx$

تمرین برای حل : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۰^{۲\pi} (۱ + \cos\theta)^۲ d\theta =$$

***

ادامه ی فرمول های انتگرال گیری

$$۱۱)\ \int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}dx=\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c$$

مثال:

$$\int \frac{۵}{\sqrt{۴-x^{۲}}}dx=۵\sin^{-۱}\frac{x}{۲}+c$$

نتیجه :

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\sin^{-۱}x+c$$

مثال :

$$\int \frac{۳}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=۳\sin^{-۱}x+c$$

❋❋❋

$$۱۲)\ \int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}dx=L_n|x+\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}|+c$$

مثال:

$$\int \frac{۵}{\sqrt{۴+x^{۲}}}dx=۵\ L_n|x+\sqrt{۴+x^{۲}}|+c$$

❋❋❋

$$۱۳)\ \int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}}dx=L_n|x+\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}|+c$$

مثال:

$$\int \frac{۵}{\sqrt{x^{۲}-۹}}dx=۵\ L_n|x+\sqrt{x^{۲}-۹}|+c$$

❋❋❋

۱۴) $\int \frac{۱}{a^۲ + x^۲} dx = \frac{۱}{a} \tan^{-۱} \frac{x}{a} + c \qquad a > ۰$

مثال:

$$\int \frac{۵}{۱۶ + x^۲} dx = \frac{۵}{۴} \tan^{-۱} \frac{x}{۴} + c$$

نتیجه :

$$\int \frac{۱}{۱ + x^۲} dx = \tan^{-۱} x + c$$

مثال:

$$\int \frac{۵}{۱ + x^۲} dx = ۵ \tan^{-۱} x + c$$

***

۱۵) $\int \frac{۱}{a^۲ - x^۲} dx = \frac{۱}{۲a} L_n \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$

مثال:

$$\int \frac{۴}{۲۵ - x^۲} dx = \frac{۴}{۲(۵)} L_n \left| \frac{۵ + x}{۵ - x} \right| + c$$

۱۶) $\int L_n ax\, dx = -x + xL_n ax + c$

مثال:

$$\int ۴L_n ۳x\, dx = ۴(-x + xL_n ۳x) + c$$

نتیجه :

$$\int L_n x\, dx = -x + xL_n x + c$$

***

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (۲^x - ۵\sin x + \frac{۴}{۳ + x^۲}) dx$

ب) $\int (\sqrt{x} - \frac{۳}{\sqrt{۴ - x^۲}}) dx$

حل :

$$\text{(الف} \int (2^x - 5\sin x + \frac{4}{3+x^2})dx = \frac{1}{L_n 2} 2^x - 5\cos x + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$\text{(ب} \int (\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}})dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3\sin^{-1}\frac{x}{2} + c$$

***

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

۲) $\int \frac{dx}{8+x^2}$

۳) $\int \frac{5dx}{6+x^2}$

۴) $\int (\frac{3}{2+x^2} - \frac{5}{2-x^2})dx$

۵) $\int (\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}})dx$

۶) $\int (2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + L_n x)dx$

***

توجه : نماد dx در انتگرال نشان دهنده ی متغیری است که باید نسبت به آن عمل انتگرال گیری صورت گیرد. لذا در محاسبه ی انتگرال توجه به این نماد ضروری است. به نمونه های زیر توجه کنید.

$$\text{(الف} \int 6x^2 y\,dx = \frac{6}{3}x^3 y + c = 2x^3 y + c$$

$$\text{(ب} \int 6x^2 y\,dy = \frac{6}{2}x^2 y^2 + c = 3x^2 y^2 + c$$

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (ax^2 + bx + c)dx =$

۲) $\int (ax^2 + by^2 + 3x^2y^2 - 1)dx =$

۳) $\int (ax^2 + by^2 + 3x^2y^2 - 1)dy =$

۴) $\int (e^{2xy} + 5x^2y^3 + 2)dx =$

۵) $\int (e^{2xy} + 5x^2y^3 + 2)dy =$

۶) $\int (\sin x.\cos 2\theta + L_n\theta - 1 + e^x)d\theta =$

روش های انتگرال گیری

در این بخش به معرفی برخی از روش های انتگرال گیری می پردازیم.

الف) انتگرال گیری به روش تغییر متغیر (روش جانشانی)

در برخی انتگرال ها با قرار دادن یک عبارت به عنوان متغیر جدید می توان انتگرال را طوری ساده کرد که به شکل یکی از فرمول های بیان شده تبدیل شود. این روش را روش تغییر متغیر می نامند. شرط استفاده از این روش این است که مشتق عبارتی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می شود، در انتگرال وجود داشته باشد. فرض کنید که u تابعی انتگرال پذیر بر حسب x و du دیفرانسیل u باشد. در این صورت می توان نوشت که :

۱) $\int u^n du = \frac{۱}{n+۱}u^{n+۱} + c \qquad n \neq -۱$

۲) $\int u^{-۱} du = \int \frac{۱}{u} du = L_n \mid u \mid + c$

***

مثال۱ :

$$\int ۳(۵x^۲ + ۴x - ۱)^۵ (۱۰x + ۴)dx = ?$$

$$u = ۵x^۲ + ۴x - ۱$$
$$du = (۱۰x + ۴)dx$$

$$\int ۳(۵x^۲ + ۴x - ۱)^۵ (۱۰x + ۴)dx = \int ۳u^۵ du = \frac{۳}{۶}u^۶ + c = \frac{۱}{۲}(۵x^۲ + ۴x - ۱)^۶ + c$$

***

مثال۲ :

$$\int ۱۴(x^۲ + ۴x + ۳)^{۱۰۰} (x + ۲)dx = ?$$

$$u = x^۲ + ۴x + ۳$$
$$du = (۲x + ۴)dx = ۲(x + ۲)dx$$

$$\int ۱۴(x^۲ + ۴x + ۳)^{۱۰۰} (x + ۲)dx = \int ۷ \times ۲(x^۲ + ۴x + ۳)^{۱۰۰} (x + ۲)dx = \int ۷u^{۱۰۰} du = \frac{۷}{۱۰۱}u^{۱۰۱} + c$$
$$= \frac{۷}{۱۰۱}(x^۲ + ۴x + ۳)^{۱۰۱} + c$$

***

مثال۳ :

$$\int ۵(\sin x+\cos x)^{۴}(\cos x-\sin x)dx=?$$

$$u=\sin x+\cos x$$
$$du=(\cos x-\sin x)dx$$

$$\int ۵(\sin x+\cos x)^{۴}(\cos x-\sin x)dx=\int ۵u^{۴}du=u^{۵}+c=(\sin x+\cos x)^{۵}+c$$

***

مثال۴ :

$$\int \frac{۲x+۳}{x^{۲}+۳x+۱}dx=?$$

$$u=x^{۲}+۳x+۱$$
$$du=(۲x+۳)dx$$

$$\int \frac{۲x+۳}{x^{۲}+۳x+۱}dx=\int \frac{du}{u}=L_n|u|+c=L_n|x^{۲}+۳x+۱|+c$$

***

۳) $\int a^{mu}du=\frac{۱}{mL_na}a^{mu}+c \qquad a>۰\ ,\ a\neq ۱$

مثال :

$$\int ۲\times ۵^{۳\sin x}\cos x dx=?$$

$$u=\sin x \to du=\cos x\,dx$$

$$\int ۲\times ۵^{۳\sin x}\cos x dx=\int ۲\times ۵^{۳u}du=\frac{۲}{۳L_n۵}۵^{۳u}=\frac{۲}{۳L_n۵}۵^{۳\sin x}+c$$

نتیجه :

الف) $\int a^{u}du=\frac{۱}{L_na}a^{u}+c \qquad a>۰\ ,a\neq ۱$

ب) $\int e^{mu}du=\frac{۱}{m}e^{mu}+c$

ج) $\int e^{u}du=e^{u}+c$

مثال :

$$\int e^{x^۲+۳x}(۲x+۳)dx=?$$

$$u=x^۲+۳x\to du=(۲x+۳)dx$$

$$\int e^{x^۲+۳x}(۲x+۳)dx=\int e^u du=e^u+c=e^{x^۲+۳}+c$$

***

۴) $\int \sin au\, du=-\frac{۱}{a}\cos au+c$

مثال :

$$\int ۵\sin ۳(x^۲+\sqrt{x})(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})dx=?$$

$$u=x^۲+\sqrt{x}\to du=(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})dx$$

$$\int ۵\sin ۳(x^۲+\sqrt{x})(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})dx=\int ۵\sin ۳u\, du=-\frac{۵}{۳}\cos ۳u+c=-\frac{۵}{۳}\cos ۳(x^۲+\sqrt{x})+c$$

نتیجه :

$$\int \sin u\, du=-\cos u+c$$

***

۵) $\int \cos au\, du=\frac{۱}{a}\sin au+c$

مثال:

$$\int ۱۰x\cos x^۲ dx=?$$

$$u=x^۲\to du=۲xdx$$

$$\int ۱۰x\cos x^۲ dx=\int ۵(\cos x^۲)(۲xdx)=\int ۵\cos u\, du=۵\sin u+c=۵\sin x^۲+c$$

***

نتیجه :

$$\int \cos u\, du=\sin u+c$$

$$۶)\ \int \tan au\, du = -\frac{۱}{a} L_n |\cos au| + c$$

مثال:

$$\int (۲x+۱)\tan(x^{۲}+x)dx = ?$$

$$u = x^{۲}+x \to du = (۲x+۱)dx$$

$$\int (۲x+۱)\tan(x^{۲}+x)dx = \int \tan u\, du = -L_n |\cos(x^{۲}+x)| + c$$

***

نتیجه :

$$\int \tan u\, du = -L_n |\cos u| + c$$

***

$$۷)\ \int \cot au\ du = \frac{۱}{a} L_n |\sin au| + c$$

مثال:

$$\int e^{x}\cot(e^{x})\ dx = ?$$

$$u = e^{x} \to du = e^{x}\ dx$$

$$\int e^{x}\cot(e^{x})\ dx = \int \cot u\, du = L_n |\sin u| + c = L_n |\sin e^{x}| + c$$

***

نتیجه :

$$\int \cot u\ du = L_n |\sin u| + c$$

***

$$۸)\ \int (۱+\tan^{۲} au)du = \int \frac{۱}{\cos^{۲} au} du = \frac{۱}{a}\tan au + c$$

مثال:

$$\int ۲x(۱+\tan^۲ ۳x^۲)\, dx = ?$$

$$u = x^۲ \to du = ۲x\,dx$$

$$\int ۲x(۱+\tan^۲ ۳x^۲)\, dx = \int (۱+\tan^۲ ۳u)du = \frac{۱}{۳}\tan ۳u + c = \frac{۱}{۳}\tan ۳x^۲ + c$$

نتیجه :

$$\int (۱+\tan^۲ u)\,du = \int \frac{۱}{\cos^۲ u}du = \tan u + c$$

***

۹) $$\int (۱+\cot^۲ au)\,du = \int \frac{۱}{\sin^۲ au}du = -\frac{۱}{a}\cot au + c$$

مثال:

$$\int ۴(۱+\cot^۲(۴x+۱))\, dx = ?$$

$$u = ۴x+۱ \to du = ۴\,dx$$

$$\int ۴(۱+\cot^۲(۴x+۱))\,dx = \int (۱+\cot^۲ u)du = -\cot u + c = -\cot(۴x+۱) + c$$

نتیجه :

$$\int (۱+\cot^۲ u)\,du = \int \frac{۱}{\sin^۲ u}du = -\cot u + c$$

***

۱۰) $$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - u^۲}}du = \sin^{-۱}\frac{u}{a} + c$$

مثال:

$$\int \frac{۲۱dx}{\sqrt{۴-۹x^۲}} = ?$$

$$u = ۳x \to du = ۳\,dx$$

$$\int \frac{۲۱dx}{\sqrt{۴-۹x^۲}} = \int \frac{۷(۳dx)}{\sqrt{۴-(۳x)^۲}} = \int \frac{۷\,du}{\sqrt{۴-u^۲}} = ۷\sin^{-۱}\frac{u}{۲} + c = ۷\sin^{-۱}\frac{۳x}{۲} + c$$

نتیجه :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sin^{-1}u + c$$

***

۱۱) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}du = L_n\,|u+\sqrt{a^2+u^2}\,| + c$$

مثال:

$$\int \frac{10\,dx}{\sqrt{4+25x^2}} = ?$$

$$u = 5x \rightarrow du = 5dx$$

$$\int \frac{10\,dx}{\sqrt{4+25x^2}} = \int \frac{2(5dx)}{\sqrt{4+(5x)^2}} = \int \frac{2\,du}{\sqrt{4+u^2}} = 2L_n\,|u+\sqrt{4+u^2}\,| + c$$

$$= 2L_n\,|5x+\sqrt{4+25x^2}\,| + c$$

***

۱۲) $$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du = L_n\,|u+\sqrt{u^2-a^2}\,| + c$$

مثال:

$$\int \frac{10\,dx}{\sqrt{25x^2-9}} = ?$$

$$u = 5x \rightarrow du = 5dx$$

$$\int \frac{10\,dx}{\sqrt{25x^2-9}} = \int \frac{2(5dx)}{\sqrt{(5x)^2-9}} = \int \frac{2\,du}{\sqrt{u^2-9}} = 2L_n\,|u+\sqrt{u^2-9}\,| + c$$

$$= 2L_n\,|5x+\sqrt{25x^2-9}\,| + c$$

***

۱۳) $$\int \frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c \qquad a > 0$$

مثال:

$$\int \frac{۱۰dx}{۹+۲۵x^{۲}}=?$$

$$u=۵x \to du=۵dx$$

$$\int \frac{۱۰dx}{۹+۲۵x^{۲}}=\int \frac{۲(۵dx)}{۹+(۵x)^{۲}}=\int \frac{۲du}{۹+u^{۲}}=\frac{۲}{۳}\tan^{-۱}\frac{u}{۳}+c=\frac{۲}{۳}\tan^{-۱}\frac{۳x}{۳}+c$$

نتیجه :

$$\int \frac{۱}{۱+u^{۲}}du=\tan^{-۱}u+c$$

***

۱۴) $\int \frac{۱}{a^{۲}-u^{۲}}du=\frac{۱}{۲a}L_n\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$

مثال:

$$\int \frac{۱۰dx}{۹+۲۵x^{۲}}=?$$

$$u=۵x \to du=۵dx$$

$$\int \frac{۱۰dx}{۴۹-۲۵x^{۲}}=\int \frac{۲(۵dx)}{۴۹-(۵x)^{۲}}=\int \frac{۲du}{۴۹+u^{۲}}=\frac{۲}{۲(۷)}L_n\left|\frac{۷+u}{۷-u}\right|+c=\frac{۱}{۷}L_n\left|\frac{۷+۵x}{۷-۵x}\right|+c$$

***

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int ۳(۵x^{۲}+۴x-۱)^{۵}(۱۰x+۴)dx$

۲) $\int e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)dx$

۳) $\int \frac{\sin x}{\cos^{۴} x}dx$

۴) $\int \frac{۲xdx}{x^{۲}+۳}$

۵) $\int ۲(x^{۲}+۴x)^{۱۰۰}(x+۲)dx$

۶) $\int \frac{xdx}{\sqrt{۲x^{۲}+۵}}$

حل :

۱)

$$u=۵x^{۲}+۴x-۱ \to du=(۱۰x+۴)dx$$

$$\int ۳(۵x^{۲}+۴x-۱)^{۵}(۱۰x+۴)dx=\int ۳u^{۵}du=\frac{۳}{۶}u^{۶}+c=\frac{۱}{۲}(۵x^{۲}+۴x-۱)^{۶}+c$$

۲)

$$u=\sin x+\cos x \rightarrow du=(\cos x-\sin x)dx$$
$$\int e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)dx=\int e^{u}du=e^{u}+c=e^{\sin x+\cos x}+c$$

۳)

$$u=\cos x \rightarrow du=-\sin x\,dx$$
$$\int \frac{\sin x}{\cos^{۴} x}dx=\int \frac{-۱}{u^{۴}}du=\int -u^{-۴}du=\frac{-۱}{-۳}u^{-۳}+c=\frac{۱}{۳u^{۳}}+c=\frac{۱}{۳\cos^{۳} x}+c$$

۴)

$$u=x^{۲}+۳ \rightarrow du=۲x\,dx$$
$$\int \frac{۲xdx}{x^{۲}+۳}=\int \frac{du}{u}=L_n\,|u|+c=L_n\,|x^{۲}+۳|+c$$

۵)

$$u=x^{۲}+۴x \rightarrow du=(۲x+۴)dx=۲(x+۲)dx$$
$$\int ۲(x^{۲}+۴x)^{۱۰۰}(x+۲)dx=\int u^{۱۰۰}du=\frac{۱}{۱۰۱}u^{۱۰۱}+c=\frac{۱}{۱۰۱}(x^{۲}+۴x)^{۱۰۱}+c$$

تمرین : انتگرال $\int_{۰}^{۲}\sqrt{۴x+۱}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا $\int \sqrt{۴x+۱}\,dx$ را محاسبه می کنیم.

$$\int \sqrt{۴x+۱}\,dx=?$$
$$u=۴x+۱ \rightarrow du=۴dx$$
$$\int \sqrt{۴x+۱}\,dx=\frac{۱}{۴}\int (\sqrt{۴x+۱})(۴)dx=\frac{۱}{۴}\int \sqrt{u}\,du=\frac{۱}{۴}\int u^{\frac{۱}{۲}}du=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}u^{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{u^{۳}}+c$$
$$=\frac{۱}{۶}\sqrt{(۴x+۱)^{۳}}+c$$
$$\int_{۰}^{۲}\sqrt{۴x+۱}\,dx=\left(\frac{۱}{۶}\sqrt{(۴x+۱)^{۳}}\right)\Big|_{۰}^{۲}=\frac{۱}{۶}\sqrt{(۴(۲)+۱)^{۳}}-\frac{۱}{۶}\sqrt{(۴(۰)+۱)^{۳}}=\frac{۱}{۶}(۲۷)-\frac{۱}{۶}=\frac{۲۶}{۶}=\frac{۱۳}{۲}$$

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int ۲(e^{x}+e^{-x})^{۴}(e^{x}-e^{-x})\,dx$

۲) $\int \frac{۵x^{۲}}{(۱-۴x^{۳})^{۸}}dx$

۳) $\int \frac{۳x^{۲}-۶x}{x^{۳}-۳x^{۲}+۱}dx$

۴) $\int \frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}+۲x+۳}}dx$

۵) $\int \sin^{۳} x\cos x dx$

۶) $\int \sqrt{\sin x}\,\cos x dx$

۷) $\int \frac{\sin x}{۲+\cos x}dx$

۸) $\int \cos x\, e^{\sin x}dx$

۹) $\int \frac{۲e^{x}}{۱+e^{x}}dx$

۱۰) $\int (x+۱)۲^{x^{۲}+۲x-۱}dx$

۱۱) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

۱۲) $\int x e^{۳x^{۲}}dx$

۱۳) $\int \sin^{۳} x dx$

۱۴) $\int \sin^{۵} x dx$

تمرین برای حل: انتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۴\sin^{۳} x\cos x\,dx$ را محاسبه کنید.

***

ب) انتگرال گیری به روش جزء به جزء

اگر u و v دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت مطابق دستور مشتق گیری از ضرب دو تابع خواهیم داشت:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

این روش انتگرال گیری که به روش جزء به جزء موسوم است، یکی از مهمترین روش های انتگرال گیری است. توجه داشته باشید که در این روش ابتدا باید u و dv را با دقت انتخاب نمود.

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x\sin x\,dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = ?$$

$$u = x \to du = dx$$

$$dv = \sin x\ dx \to v = \int \sin x\ dx = -\cos x$$

$$\int x\sin x\,dx = (x)(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x e^{x}\, dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{x}\,dx}_{dv} = ?$$

$$u = x \to du = dx$$

$$dv = e^{x}\ dx \to v = \int e^{x}\ \ dx = e^{x}$$

$$\int x e^{x}\ dx = (x)(e^{x}) - \int (e^{x})\,dx = x e^{x} - \int e^{x}\, dx = xe^{x} - e^{x} + c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x\cos x\,dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = ?$$

$$u = x \to du = dx$$

$$dv = \cos x\ dx \to v = \int \cos x\ \ dx = \sin x$$

$$\int x\cos x\ dx = (x)(\sin x) - \int (\sin x)\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int e^x \cos x \, dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = ?$$

$$u = e^x \to du = e^x dx$$

$$dv = \cos x \, dx \to v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = (e^x)(\sin x) - \int e^x (\sin x) \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \qquad (۱)$$

اکنون $\int e^x \, Sinx \, dx = ?$ را محاسبه به طور مشابه محاسبه می کنیم.

$$\int \underbrace{e^x}_{w} \underbrace{\sin x \, dx}_{dr} = ?$$

$$w = e^x \to dw = e^x dx$$

$$dr = \sin x \, dx \to r = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = (e^x)(\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \qquad (۲)$$

اکنون از دو تساوی (۱) و (۲) داریم :

$$\begin{cases} \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx & (۱) \\ \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx & (۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx)$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow ۲\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{۲} + c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int (x^۲ - ۲x + ۵) e^{-x} dx = ?$$

حل :

$$\int (\underbrace{x^{۲}-۲x+۵}_{u})\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = ?$$

$$u = x^{۲}-۲x+۵ \to du = (۲x-۲)dx$$

$$dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}$$

$$\int (x^{۲}-۲x+۵)e^{-x}dx = (x^{۲}-۲x+۵)(-e^{-x}) - \int (۲x-۲)(-e^{-x})dx$$

$$= -(x^{۲}-۲x+۵)e^{-x} + ۲\int (\underbrace{x-۱}_{m})\underbrace{e^{-x}dx}_{dn}$$

$$m = x-۱ \to dm = dx$$

$$dn = e^{-x}dx \to n = -e^{-x}$$

$$\int (x^{۲}-۲x+۵)e^{-x}dx = -(x^{۲}-۲x+۵)e^{-x} + ۲((x-۱)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})dx)$$

$$= -(x^{۲}-۲x+۵)e^{-x} - ۲(x-۱)e^{-x} + ۲\int (-e^{-x})dx$$

$$= -(x^{۲}-۲x+۵)e^{-x} - ۲(x-۱)e^{-x} + ۲e^{-x} + c$$

***

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int (x-۲)e^{x}\ dx =$

۲) $\int x L_n x\ dx =$

۳) $\int L_n x\, dx =$

۴) $\int x^{۲} e^{x}\ dx =$

۵) $\int x^{۲} e^{-۳x}\ dx =$

۶) $\int x^{۲} \sin x\ dx =$

***

ج) انتگرال گیری به روش تجزیه ی کسرها

یکی دیگر از روش های انتگرال گیری، تجزیه ی کسرها می باشد. در این روش به کمک یکی از روش های تجزیه ی کسر ها ، یک کسر را به مجموع دو یا چند کسر گویای دیگر تبدیل می کنیم و سپس از هر یک از آنها انتگرال گیری می کنیم. در ابتدا به روش های تجزیه ی کسر ها به طور مختصر اشاره می کنیم.

تجزیه ی کسرها

منظور از تجزیه ی یک کسر آن است که آن کسر را به صورت مجموع دو یا چند کسر دیگر بنویسیم بطوری که در کسر های نوشته شده درجه ی صورت هر یک از درجه ی مخرج آن کسر کمتر باشد.

در تجزیه ی یک کسر ابتدا ریشه های مخرج آن را تعیین می کنیم سپس یکی از حالت های زیر را بکار می بریم.

***

حالت اول: تجزیه ی کسر هایی که مخرجشان ریشه ی تکراری ندارد.

تمرین: کسر $\frac{x+۳}{x(x-۱)}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا ریشه های مخرج را تعیین می کنیم.

$$x(x-۱)=۰ \to \left\langle \begin{array}{l} x=۰ \\ x=۱ \end{array} \right.$$

پس مخرج ریشه ی تکراری ندارد.

حال می توان نوشت:

$$\frac{x+۳}{x(x-۱)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱} \to \frac{x+۳}{x(x-۱)}=\frac{a(x-۱)+bx}{x(x-۱)}$$

$$a(x-۱)+bx=x+۳$$

$$IF\ x=۰ \to a(۰-۱)+b(۰)=۰+۳ \to -a=۳ \to a=-۳$$
$$IF\ x=۱ \to a(۱-۱)+b(۱)=۱+۳ \to b=۴$$
$$\therefore \frac{x+۳}{x(x-۱)}=\frac{-۳}{x}+\frac{۴}{x-۱}$$

***

تمرین: کسر $\frac{۲}{x^{۳}-x}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^{۳}-x=۰ \to x(x-۱)(x+۱)=۱ \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

مخرج ریشه ی تکراری ندارد.

$$\frac{۲}{x^{۳}-x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x+۱}\to\frac{۲}{x^{۳}-x}=\frac{a(x-۱)(x+۱)+bx(x+۱)+cx(x-۱)}{x(x-۱)(x+۱)}$$

$$a(x-۱)(x+۱)+bx(x+۱)+cx(x-۱)=۲$$

$$IF\ \ x=۰\to -a=۲\to a=-۲$$
$$IF\ \ x=۱\to ۲b=۲\to b=۱$$
$$IF\ \ x=-۱\to ۲c=۲\to c=۱$$

$$\therefore \frac{۲}{x^{۳}-x}=\frac{-۲}{x}+\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}$$

***

حالت دوم: تجزیه ی کسر هایی که مخرجشان ریشه ی مضاعف دارد.

تمرین: کسر $\frac{x+۳}{x(x-۱)^{۲}}$ را تجزیه کنید.

$$x(x-۱)^{۲}=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$$

مخرج ریشه ی مضاعف دارد و $x=۱$ ریشه ی مضاعف آن است.

$$\frac{x+۳}{x(x-۱)^{۲}}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{(x-۱)^{۲}}\to\frac{x+۳}{x(x-۱)^{۲}}=\frac{a(x-۱)^{۲}+bx(x-۱)+cx}{x(x-۱)^{۲}}$$

$$a(x-۱)^{۲}+bx(x-۱)+cx=x+۳$$

$$IF\ \ x=۰\to a=۰+۳=۳$$
$$IF\ \ x=۱\to c=۱+۳=۴$$
$$IF\ \ x=۲\to a+۲b+۲c=۵\to b=-۳$$

$$\therefore \frac{x+۳}{x(x-۱)^{۲}}=\frac{۳}{x}+\frac{-۳}{x-۱}+\frac{۴}{(x-۱)^{۲}}$$

***

حالت سوم: تجزیه ی کسر هایی که مخرجشان عامل غیر قابل تجزیه و غیر درجه ی اول دارد.

تمرین: کسر $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+2)}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$(x-1)(x^2+2)=0 \to \left\langle \begin{array}{l} x-1=0 \to x=1 \\ x^2+2=0 \quad \text{ریشه ندارد} \end{array} \right.$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+2}$$

$$\to \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{a(x^2+2)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\to a(x^2+2)+(bx+c)(x-1)=x+3$$

$$IF \quad x=1 \to -3a=4 \to a=\frac{4}{3}$$

$$IF \quad x=0 \to 2a-c=3 \xrightarrow{a=\frac{4}{3}} c=-\frac{1}{3}$$

$$IF \quad x=-1 \to 3a-2(-b+c)=2 \to 3a+2b-2c=2 \xrightarrow{a=\frac{4}{3},c=-\frac{1}{3}} b=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+2}=\frac{4}{3(x-1)}+\frac{-4x-1}{3(x^2+2)}$$

***

تمرین : الف: کسر $\frac{x-1}{x^2-x-2}$ را تجزیه کنید. ب: انتگرال $\int \frac{x-1}{x^2-x-2}dx$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا ریشه های مخرج را تعیین می کنیم.

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0 \to \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

مخرج ریشه ی تکراری ندارد. پس قرار می دهیم.

$$\frac{x-۱}{x^{۲}-x-۲}=\frac{x-۱}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{a}{x-۲}+\frac{b}{x+۱}$$

$$\to \frac{x-۱}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{a(x+۱)+b(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$\Rightarrow x-۱=a(x-۲)+b(x+۱)$$

$$\begin{cases} x=۲\to ۲-۱=a(۲-۲)+b(۲+۱)\to b=\frac{۱}{۳} \\ x=-۱\to -۱-۱=a(-۱-۲)+b(-۱+۱)\to b=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\frac{x-۱}{x^{۲}-x-۲}=\frac{x-۱}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{a}{x-۲}+\frac{b}{x+۱}\to \frac{x-۱}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{\frac{۲}{۳}}{x-۲}+\frac{\frac{۱}{۳}}{x+۱}$$

$$\int\frac{x-۱}{x^{۲}-x-۲}dx=\int(\frac{\frac{۲}{۳}}{x-۲}+\frac{\frac{۱}{۳}}{x+۱})dx=\frac{۲}{۳}\int\frac{۱}{x-۲}dx+\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{x+۱}dx$$

$$=\frac{۲}{۳}L_n\,|x-۲|+\frac{۱}{۳}L_n\,|x+۱|+c$$

***

تمرین:

الف) مقادیر b و a را طوری بیابید که داشته باشیم.

$$\frac{۱}{(۳x-۱)(۳x+۲)}=\frac{a}{۳x-۱}+\frac{b}{۳x+۲}$$

ب) انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int\frac{۱}{(۳x-۱)(۳x+۲)}dx$$

حل:

الف) واضح است که مخرج ریشه ی تکراری ندارد.

$$(۳x-۱)(۳x+۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۳}\\ x=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\frac{۱}{(۳x-۱)(۳x+۲)}=\frac{a}{۳x-۱}+\frac{b}{۳x+۲}\rightarrow\frac{۱}{(۳x-۱)(۳x+۲)}=\frac{a(۳x+۲)+b(۳x-۱)}{(۳x-۱)(۳x+۲)}$$

$$a(۳x+۲)+b(۳x-۱)=۱$$

$$IF\ \ x=\frac{-۲}{۳}\rightarrow a(۰)+b(-۳)=۱\rightarrow b=\frac{-۱}{۳}$$

$$IF\ \ x=\frac{۱}{۳}\rightarrow a(۳)+b(۰)=۱\rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

ب)

$$\int\frac{۱}{(۳x-۱)(۳x+۲)}dx=\int(\frac{\frac{۱}{۳}}{۳x-۱}+\frac{-\frac{۱}{۳}}{۳x+۲})dx=\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{۳x-۱}dx-\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{۳x+۲}dx$$

$$=\frac{۱}{۹}\int\frac{۳}{۳x-۱}dx-\frac{۱}{۹}\int\frac{۳}{۳x+۲}dx=\frac{۱}{۹}L_n(۳x-۱)-\frac{۱}{۹}L_n(۳x+۲)+c$$

***

تمرین : انتگرال $\int\frac{۲}{x(x+۲)}dx$ را محاسبه کنید.

حل : اگر کسر $\frac{۲}{x(x+۲)}$ را تجزیه کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{x(x+۲)}=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۲}\rightarrow\int\frac{۲}{x(x+۲)}dx=\int\frac{۱}{x}dx-\int\frac{۱}{x+۲}dx=L_nx-L_n(x+۲)+c$$

***

تمرین : انتگرال $\int\frac{x^۲-۳x-۴}{x^۲-۲x+۱}dx$ را محاسبه کنید.

حل : چون درجه صورت با درجه ی مخرج برابر است ، لذا از تقسیم صورت بر مخرج به دست می آوریم:

$$\frac{x^۲-۳x-۴}{x^۲-۲x+۱}=۱-\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}$$

اکنون کسر $\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}$ را تجزیه می کنیم. به شکل مشابه تمرین های قبل خواهیم داشت:

$$\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}=\frac{a}{x-۱}+\frac{b}{(x-۱)^۲}\to\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}=\frac{a(x-۱)}{x-۱}+\frac{b}{(x-۱)^۲}\to x+۵=a(x-۱)+b$$

$$\begin{cases}x=۱\to ۱+۵=a(۱-۱)+b\to b=۶\\ x=۰\to ۰+۵=a(۰-۱)+b\to a=۱\end{cases}$$

$$\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۶}{(x-۱)^۲}$$

لذا :

$$\frac{x^۲-۳x-۴}{x^۲-۲x+۱}=۱-\frac{x+۵}{x^۲-۲x+۱}=۱-(\frac{۱}{x-۱}+\frac{۶}{(x-۱)^۲})=۱-\frac{۱}{x-۱}-\frac{۶}{(x-۱)^۲}$$

$$\int\frac{x^۲-۳x-۴}{x^۲-۲x+۱}dx=\int(۱-\frac{۱}{x-۱}-\frac{۶}{(x-۱)^۲})dx=\int ۱\,dx-\int\frac{۱}{x-۱}dx-۶\int\frac{۱}{(x-۱)^۲}dx$$

$$=x-L_n\,|x-۱|-\frac{۶}{x-۱}+c$$

***

تمرین : انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int\sec x dx=\int\frac{۱}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^۲ x}dx=\int\frac{\cos x}{۱-\sin^۲ x}dx=I$$

حال قرار می دهیم

$$t=\sin x\to dt=\cos x dx$$

$$I=\int\frac{dt}{۱-t^۲}=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲dt}{۱-t^۲}=\frac{۱}{۲}\int(\frac{۱}{۱-t}+\frac{۱}{۱+t})dt=\frac{۱}{۲}(-L_n\,|۱-t|+L_n\,|۱+t|)+c$$

$$=\frac{۱}{۲}(L_n\,|\frac{۱+t}{۱-t}|)+c=\frac{۱}{۲}(L_n\,|\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}|)+c$$

***

تمرین برای حل: انتگرال های را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{۵x-۳}{(x+۱)(x-۳)}dx$

۲) $\int \frac{dx}{x^۳+۳x^۲}$

۳) $\int \frac{۳x^۲+۲x-۲}{x^۳+۳x^۲+۲x}dx$

۴) $\int \frac{x^۳+۳x^۲+۵x}{۱+x^۲}dx$

۵) $\int \frac{x^۳+۲x}{x+۱}dx$

۶) $\int \frac{dx}{x(x-۱)^۲}$

***

د) انتگرال گیری به روش جانشانی مثلثاتی

انتگرال های بعضی از عبارت های جبری با معرفی بعضی از توابع مثلثاتی آسانتر محاسبه می شوند. ما در ادامه قواعدی را ذکر می کنیم که ممکن است، مورد استفاده واقع شوند.

الف: اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^۲-u^۲}$ باشد. تعویض متغیر $x=a\sin t$ را استفاده می کنیم.

ب : اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^۲+u^۲}$ باشد. تعویض متغیر $x=a\tan t$ را استفاده می کنیم.

ج : اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{u^۲-a^۲}$ باشد. تعویض متغیر $x=a\sec t$ را استفاده می کنیم.

مثال : انتگرال $\int \frac{x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}dx$ را محاسبه کنید.

حل : قرار می دهیم $x=۳\sin t$ پس $dx=۳\cos t\, dt$ لذا

$$\int \frac{x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}dx=\int \frac{(۳\sin t)^۲}{\sqrt{۹-(۳\sin t)^۲}}(۳\cos t dt)=\int \frac{۲۷\sin^۲ t\cos t}{\sqrt{۹-۹\sin^۲ t}}dt=\int \frac{۲۷\sin^۲ t\cos t}{۳\sqrt{۱-\sin^۲ t}}dt$$

$$=\int \frac{۹\sin^۲ t\cos t}{\cos t}dt=\int ۹\sin^۲ t\,dt=۹\int (\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲t)\,dt=۹(\frac{۱}{۲}t-\frac{۱}{۴}\sin ۲t)+c$$

$$=\frac{۹}{۲}\sin^{-۱}(\frac{x}{۳})-\frac{۹}{۴}\sin(۲(\sin^{-۱}(\frac{x}{۳}))+c$$

توجه :

$$x=۳\sin t \rightarrow \sin t=\frac{x}{۳} \rightarrow t=\sin^{-۱}(\frac{x}{۳})$$

مثال : انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{(۴x^۲+۴x+۱۷)^۳}}$ را محاسبه کنید.

حل : با توجه به اینکه

$$۴x^۲+۴x+۱۷=۴x^۲+۴x+۱+۱۶=(۲x+۱)^۲+۱۶$$

لذا قرار می دهیم $u=۲x+۱$ پس $du=۲dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(۴x^۲+۴x+۱۷)^۳}}=\int \frac{dx}{\sqrt{۴^۲+(۲x+۱)^۲}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{۲dx}{\sqrt{۴^۲+(۲x+۱)^۲}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{du}{\sqrt{۴^۲+u^۲}}=I$$

اکنون نیز قرار می دهیم. $u=۴\tan t$ پس نتیجه می شود. $du=۴(۱+\tan^۲ t)dt$

$$\to I=\frac{۱}{۲}\int \frac{۴(۱+\tan^۲ t)dt}{\sqrt{۴^۲+(۴\tan t)^۲}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{۴(۱+\tan^۲ t)dt}{۴\sqrt{۱+\tan^۲ t}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{(۱+\tan^۲ t)dt}{\sqrt{۱+\tan^۲ t}}=\frac{۱}{۲}\int \sqrt{۱+\tan^۲ t}\,dt$$

$$=\frac{۱}{۲}\int \sqrt{۱+\tan^۲ t}\,dt=\frac{۱}{۲}\int \sec dt=\frac{۱}{۲}L_n(\sec t+\tan t)+c$$

مثال : انتگرال $\int \frac{\sqrt{۹x^۲-۱}}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل : واضح است که

$$\int \frac{\sqrt{۹x^۲-۱}}{x}dx=\int \frac{\sqrt{(۳x)^۲-۱}}{x}dx=I$$

حال قرار می دهیم $۳x=u$ در نتیجه $x=\frac{u}{۳}$ و $۳dx=du$ یعنی $dx=\frac{du}{۳}$

$$\to I=\int \frac{\sqrt{u^۲-۱}}{\frac{u}{۳}}(\frac{du}{۳})=\int \frac{\sqrt{u^۲-۱}}{\frac{u}{۳}}(\frac{du}{۳})=\int \frac{\sqrt{u^۲-۱}}{u}du=I$$

باز قرار می دهیم $u=\sec t$ پس $du=\sec t\ \tan t\ dt$

$$\to I=\int\frac{\sqrt{\sec^{۲} t-۱}}{\sec t}(\sec t\ \tan t dt)=\int(\tan t)(\tan t)dt=\int\tan^{۲} t dt=\tan t-t+c$$

تمرین برای حل : انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱) $\int\frac{dx}{\sqrt{(۹-x^{۲})^{۳}}}$

۲) $\int\frac{dy}{\sqrt{(۲۵-y^{۲})^{۳}}}$

۳) $\int\frac{dr}{r^{۲}\sqrt{r^{۲}-۶}}$

۴) $\int\frac{\sqrt{۹-s^{۲}}}{s^{۲}}ds$

۵) $\int\frac{۱}{x^{۳}\sqrt{x^{۲}-۹}}dx$

۶) $\int\sqrt{x^{۲}+۵}\,dx$

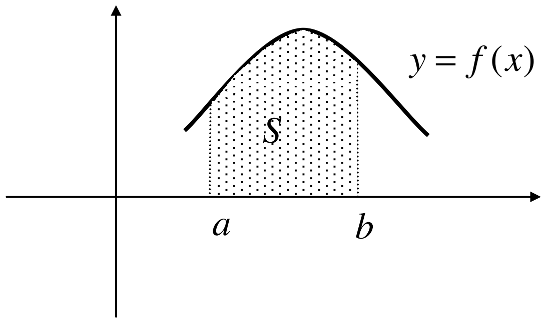
***

کاربرد های انتگرال

در این بخش چند کاربرد مهم انتگرال را معرفی می کنیم.

الف) کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت زیر منحنی

اگر تابع f روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد. مساحت محصور بین منحنی نمودار f و محور طولها و دو خط $x=a$ و $x=b$ به شکل زیر به دست می آید.

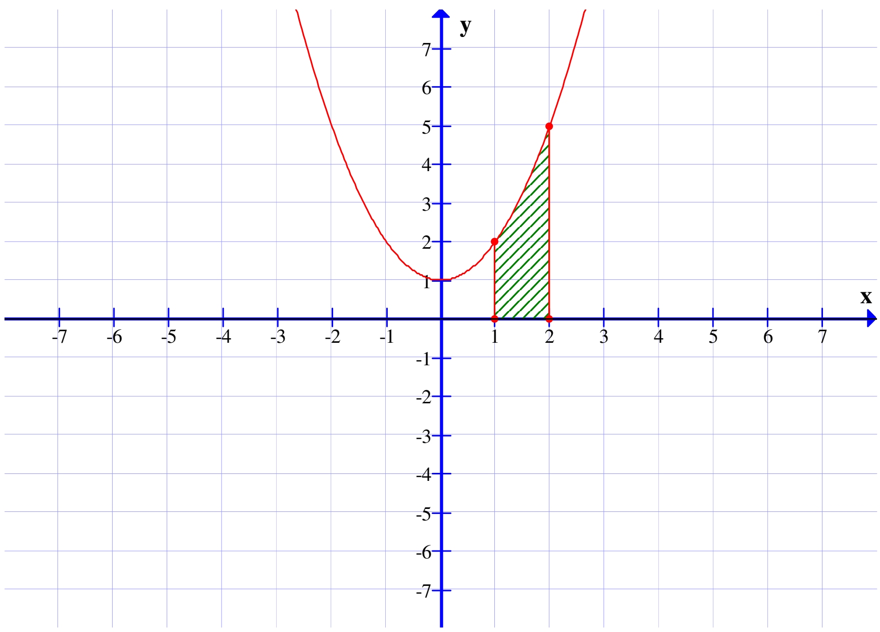


$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

***

تمرین : مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=x^{2}+1$ و محور x ها و خطوط $x=1$ و $x=2$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم.



$f(x)=x^{۲}+۱$

$\int f(x)dx=\int(x^{۲}+۱)dx=\frac{۱}{۳}x^{۳}+x+c$

$\int_{۱}^{۲} f(x)dx=(\frac{۱}{۳}x^{۳}+x)\Big|_{۱}^{۲}=(\frac{۱}{۳}(۲)^{۳}+(۲))-(\frac{۱}{۳}(۱)^{۳}+(۱))=\frac{۸}{۳}+۲-\frac{۱}{۳}-۱=\frac{۱۰}{۳}$

$S=|\int_{۱}^{۲} f(x)dx|=\frac{۱۰}{۳}$

***

تمرین برای حل :

۱) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۵x^{۲}$ و محور x ها و خطوط $x=۰$ و $x=۱$ را محاسبه کنید.

۲) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ و محور x ها و خطوط $x=۱$ و $x=۳$ را محاسبه کنید.

۳) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و محور x ها و خطوط $x=۱$ و $x=۱۶$ را محاسبه کنید.

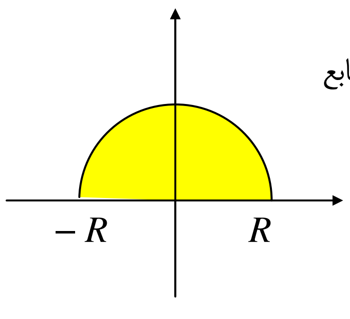
۴) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=\sin x$ و محور x ها و خطوط $x=۰$ و $x=\pi$ را محاسبه کنید.

***

تمرین: محاسبه ی مساحت دایره را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: گیریم که دایره به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات باشد. پس معادله ی آن می شود:

$$x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}$$



واضح است که مساحت این دایره دو برابر سطح محصور بین تابع $f(x)=\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}$ و محور طولها بدست می آید.

$$S=۲\int_{-R}^{R} f(x)dx=۲\int_{-R}^{R}\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}dx=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{R^{۲}-R^{۲}\sin^{۲}\theta}.R\cos\theta.d\theta$$

$$=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{R^{۲}(۱-\sin^{۲}\theta)}.R\cos\theta.d\theta=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{R^{۲}\cos^{۲}\theta}.R\cos\theta.d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2\theta.d\theta = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.d\theta = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2R^2(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2})] - 2R^2[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{2})]$$

$$=2R^2\frac{\pi}{2}+0+2R^2\frac{\pi}{2}-0 = 2R^2\frac{\pi}{2}=\pi R^2$$

توجه:

$$x=R\sin\theta \to dx = R\cos\theta.d\theta$$

$$\begin{cases} x=R\to\sin\theta=1\to\theta=\frac{\pi}{2} \\ x=-R\to\sin\theta=-1\to\theta=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

تمرین برای حل : مساحت دایره به معادله ی $x^2+y^2=9$ را به کمک انتگرال معین تعیین کنید.

تمرین: محاسبه ی مساحت بیضی را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: گیریم که بیضی از نوع افقی و به مرکز مبدأ مختصات . پس معادله ی آن می شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

واضح است که مساحت این بیضی دو برابر سطح محصور بین تابع $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ و محور طولها بدست می آید.

$$S=2\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = 2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}.a\cos\theta.d\theta$$

$$=2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}.a\cos\theta.d\theta = 2\times\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2Cos^2\theta}.a\cos\theta.d\theta$$

$$=2\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta.d\theta = 2\times\frac{b}{a}\times a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.d\theta = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2ab(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2ab[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2})]-2ab[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{2})]$$

$$=2ab\frac{\pi}{2}+0+2ab\frac{\pi}{2}-0=2ba\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

توجه:

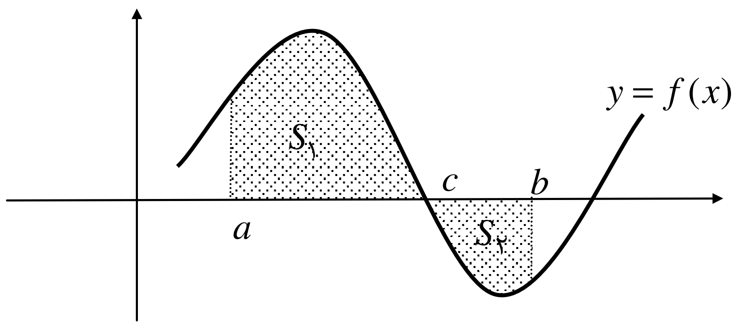
$$x=a\sin\theta\rightarrow dx=a\cos\theta.d\theta$$

$$\begin{cases} x=a\rightarrow \sin\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2} \\ x=-a\rightarrow\sin\theta=-1\rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

تمرین برای حل: مساحت دایره به معادله ی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ را به کمک انتگرال معین تعیین کنید.

***

تذکر : اگر نمودار تابع در فاصله ی $[a,b]$ محور طول ها را قطع کند. طبق اصل مجموع مساحت ها می توان مساحت هر ناحیه را جداگانه محاسبه و سپس مساحت کل را تعیین کرد.



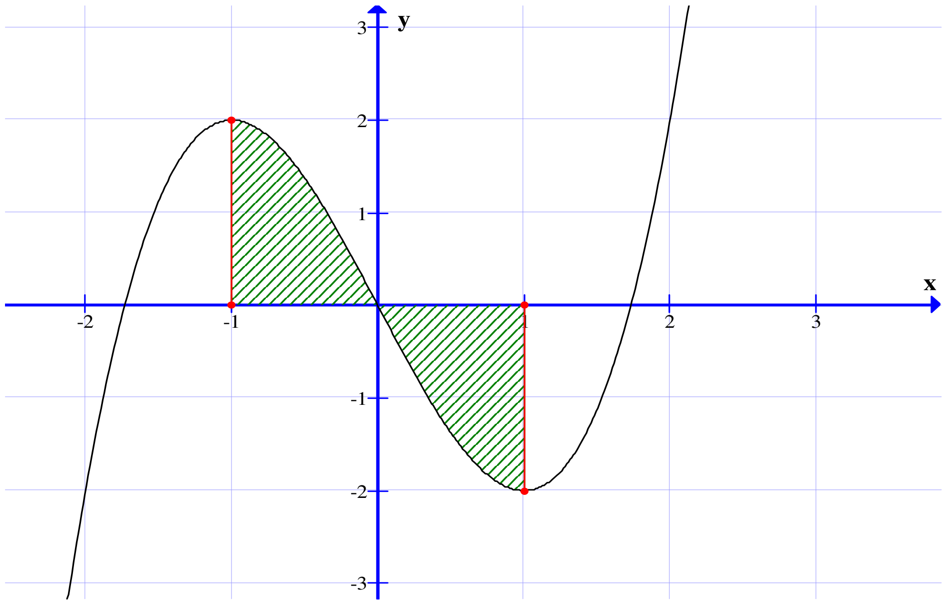
$$S=S_1+S_2=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

***

تمرین : مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=x^3-3x$ و محور x ها و خطوط $x=-1$ و $x=1$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور طولها را تعیین می کنیم.

$$f(x)=x^3-3x\xrightarrow{f(x)=0}x^3-3x=0\rightarrow x=-\sqrt{3}\ ,\ x=0\ ,\ x=\sqrt{3}$$



$f(x)=x^{۳}-۳x$

$\int f(x)dx=\int (x^{۳}-۳x)dx=\frac{۱}{۴}x^{۴}-\frac{۳}{۲}x^{۲}+c$

$\int_{-۱}^{۰} f(x)dx=(\frac{۱}{۴}x^{۴}-\frac{۳}{۲}x^{۲})\Big|_{-۱}^{۰}=(\frac{۱}{۴}(۰)^{۴}-\frac{۳}{۲}(۰)^{۲})-(\frac{۱}{۴}(-۱)^{۴}-\frac{۳}{۲}(-۱)^{۲})=-(\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲})=\frac{۵}{۴}$

$\int_{۰}^{۱} f(x)dx=(\frac{۱}{۴}x^{۴}-\frac{۳}{۲}x^{۲})\Big|_{۰}^{۱}=(\frac{۱}{۴}(۱)^{۴}-\frac{۳}{۲}(۱)^{۲})-(\frac{۱}{۴}(۰)^{۴}-\frac{۳}{۲}(۰)^{۲})=(\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲})=-\frac{۵}{۴}$

$S=|\int_{-۱}^{۰} f(x)dx|+|\int_{۰}^{۱} f(x)dx|=\frac{۵}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$

***

تمرین برای حل :

۱) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+x^{۲}+۲x$ و محور x ها و خطوط $x=-۱$ و $x=۱$ را محاسبه کنید.

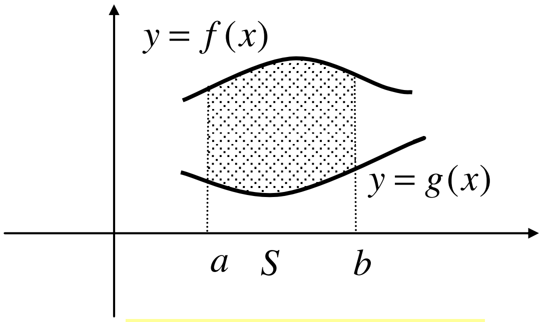
۲) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=\sin x$ و محور x ها و خطوط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ را محاسبه کنید.

۳) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۴x$ و محور x ها و خطوط $x=-۳$ و $x=۳$ را محاسبه کنید.

***

ب) کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت بین دو منحنی

اگر دو تابع f و g روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشند. مساحت محصور بین منحنی نمودار این دو تابع و دو خط $x=a$ و $x=b$ به شکل زیر به دست می آید.



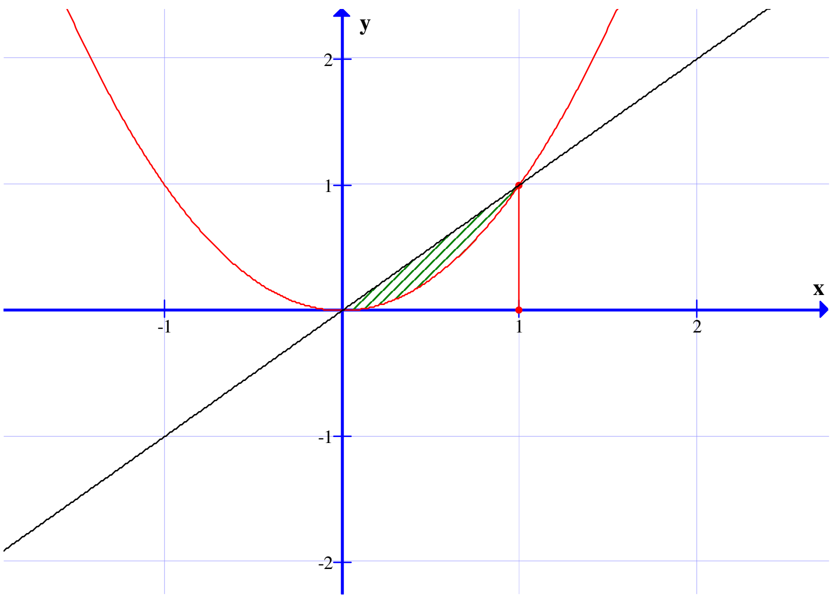
$$S=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

***

تمرین : مساحت ناحیه ی بین نمودار های دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲$ را به دست آورید.

حل : ابتدا محل تقاطع این دو منحنی را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^۲ \end{cases} \to x^۲=x \to x=۰\ ,\ x=۱$$



$$\int (f(x)-g(x))dx=\int (x-x^۲)dx=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳+c$$

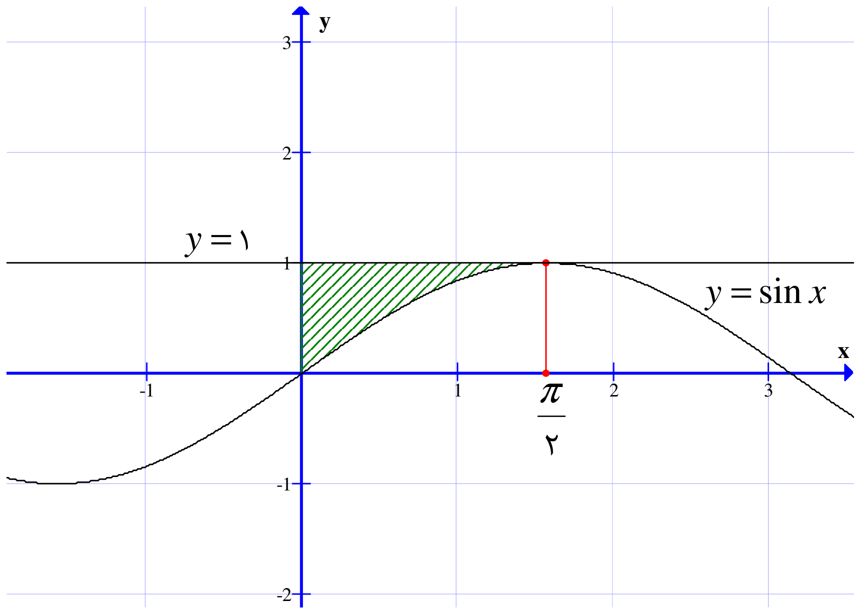
$$\int_۰^۱ (f(x)-g(x))dx=\left(\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_۰^۱=\left(\frac{۱}{۲}(۱)^۲-\frac{۱}{۳}(۱)^۳\right)-\left(\frac{۱}{۲}(۰)^۲-\frac{۱}{۳}(۰)^۳\right)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right| = \frac{۱}{۶}$$

***

تمرین برای حل :

۱) با توجه به شکل زیر مساحت ناحیه ی هاشور خورده را به دست آورید.



۲) مساحت ناحیه ی بین نمودار های دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ را به دست آورید.

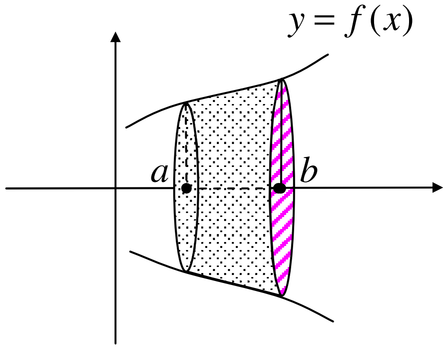
۳) مساحت ناحیه ی بین نمودار های دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را در فاصله ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ به دست آورید.

۴) مساحت ناحیه ی بین نمودار های سه تابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲$ و $h(x)=۲x$ را به دست آورید.

***

ج) کاربرد انتگرال در محاسبه ی حجم جسم دوار

اگر تابع f روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشند. حجم جسم حاصل از دوران نمودار تابع f حول محور طولها از خط $x=a$ تا خط $x=b$ به شکل زیر به دست می آید.



$$V=\pi\int_a^b f^{۲}(x)\,dx$$

تمرین : حجم جسم حاصل از دوران نمودار تابع $y=x^{۲}$ حول محور x از خط $x=۱$ تا خط $x=۳$ بدست آورید.

حل :

$$f(x)=x^{۲} \to f^{۲}(x)=x^{۴}$$

$$\int f^{۲}(x)dx=\int x^{۴}dx=\frac{۱}{۵}x^{۵}+c$$

$$\int f^{۲}(x)dx=\frac{۱}{۵}x^{۵}\Big|_{۱}^{۳}=\frac{۱}{۵}(۳)^{۵}-\frac{۱}{۵}(۱)^{۵}=\frac{۲۴۳}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲۴۲}{۵}$$

$$V=\pi\int_a^b f^{۲}(x)\,dx=\frac{۲۴۲}{۵}\pi$$

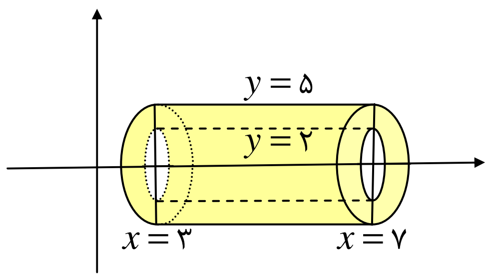
***

تمرین برای حل :

۱) سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=\sqrt{x-۲}$ و محور طول ها و دو خط $x=۲$ و $x=۴$ را حول محور طول ها دوران می دهیم. حجم جسم حادث از این دوران را محاسبه کنید.

۲) حجم جسم حادث از دوران خط $y=۴$ حول محور طولها و محصور بین دو خط $x=۲$ و $x=۵$ را بدست آورید.

۳) با توجه به شکل مقابل حجم ناحیه ی محصور بین دو استوانه را محاسبه کنید.



تمرین: حجم استوانه را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل:کافی است حجم جسم حادث از دوران خط $y=k$ حول محور طولها از $x=a$ تا $x=b$ را تعیین کنیم.

واضح است که شعاع قاعده ی استوانه برابر k و ارتفاع آن برابر $b-a$ است.

$$f(x)=k$$
$$R=k$$
$$h=b-a$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_1^2 k^2dx=\pi\times k^2x\,|_a^b=\pi\times k^2(b-a)=\pi R^2h$$

تمرین: حجم مخروط را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: کافی است حجم جسم حادث از دوران خط $y=kx$ حول محور طولها از $x=0$ تا $x=a$ را تعیین کنیم.

واضح است که شعاع قاعده ی استوانه برابر ka و ارتفاع آن برابر $a-0=a$ است.

$$f(x)=kx$$
$$R=ka$$
$$h=a$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^a k^2x^2dx=\frac{1}{3}\pi\times k^2x^3\,|_0^a=\frac{1}{3}\pi\times k^2(a-0)^3$$
$$=\frac{1}{3}\pi\times k^2a\times a^2=\frac{1}{3}\pi\times(k^2\times a^2)\times a=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

تمرین برای حل: حجم حادث از دوران دایره ای به معادله ی $x^2+y^2=9$ به دور محور طولها را بدست آورید.

تمرین: حجم کره را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل:کافی است حجم جسم حادث از دوران دایره ی $x^۲ + y^۲ = R^۲$ حول محور طولها از $x = -R$ تا $x = R$ را تعیین کنیم.

$$x^۲ + y^۲ = R^۲ \rightarrow f^۲(x) = R^۲ - x^۲$$

$$V = \pi\int_a^b f^۲(x)dx = \pi\int_{-R}^{R}(R^۲ - x^۲)dx = \pi \times (R^۲x - \frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \pi \times [R^۲ \times R - \frac{۱}{۳}R^۳] - \pi \times [R^۲ \times (-R) - \frac{۱}{۳}(-R)^۳]$$

$$= \pi R^۳ - \frac{۱}{۳}\pi R^۳ + \pi R^۳ - \frac{۱}{۳}\pi R^۳ = \pi R^۳ - \frac{۱}{۳}\pi R^۳ + \pi R^۳ - \frac{۱}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

تمرین برای حل: حجم حادث از دوران بیضی به معادله ی $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ به دور محور طولها را بدست آورید.

تمرین: حجم بیضی گون را به کمک انتگرال معین ثابت کنید.

حل: کافی است حجم جسم حادث از دوران بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ حول محور طولها از $x = -a$ تا $x = a$ را تعیین کنیم.

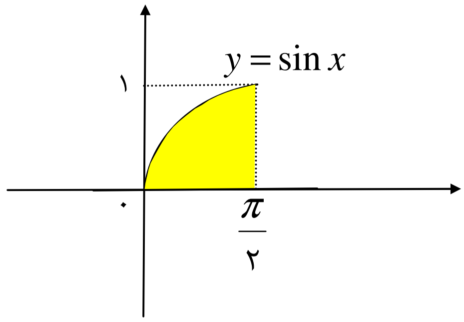
$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \rightarrow f^۲(x) = b^۲ - \frac{b^۲}{a^۲}x^۲$$

$$V = \pi\int_a^b f^۲(x)dx = \pi\int_{-a}^{a}(b^۲ - \frac{b^۲}{a^۲}x^۲)dx =$$

$$= \pi \times (b^۲x - \frac{۱}{۳} \times \frac{b^۲}{a^۲}x^۳)\Big|_{-a}^{a} = \pi \times (b^۲a - \frac{۱}{۳} \times \frac{b^۲}{a^۲}a^۳) - \pi \times (-b^۲a + \frac{۱}{۳} \times \frac{b^۲}{a^۲}a^۳)$$

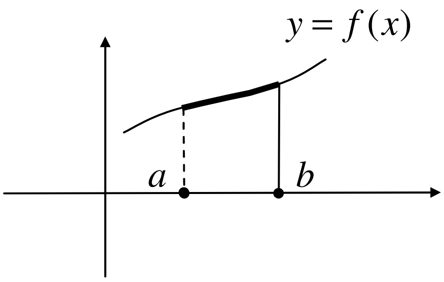
$$= \pi b^۲a - \frac{۱}{۳} \times \pi b^۲a + \pi b^۲a - \frac{۱}{۳}\pi b^۲a = \frac{۴}{۳}\pi b^۲a$$

تمرین: حجم حادث از دوران سطح هاشور خورده در شکل مقابل حول محور x ها را بدست آورید.



د) کاربرد انتگرال در محاسبه ی طول قوس یک منحنی

اگر $y=f(x)$ معادله ی یک منحنی مسطح و $y'=f'(x)$ مشتق آن و پیوسته باشد ، آنگاه طول قوس ایـن منحنـی از $x=a$ تا $x=b$ به شکل زیر به دست می آید.



$$L=\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx$$

***

تمرین : طول قوس منحنی $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ را در فاصله ی $x=-۲$ تا $x=۲$ به دست آورید.

حل :

$$f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \to f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}} \to (f'(x))^۲=(\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}})^۲=\frac{x^۲}{۴-x^۲}$$

$$\int\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx=\int\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۴-x^۲}}\,dx=\int\sqrt{\frac{۴-x^۲+x^۲}{۴-x^۲}}\,dx=\int\sqrt{\frac{۴}{۴-x^۲}}\,dx=\int\frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲}}\,dx$$

$$=۲\int\frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}\,dx=۲\sin^{-۱}\frac{x}{۲}+c$$

$$\int_{-۲}^{۲}\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx=۲\sin^{-۱}\frac{x}{۲}\Big|_{-۲}^{۲}$$

$$=(۲\sin^{-۱}\frac{۲}{۲})-(۲\sin^{-۱}\frac{-۲}{۲})=۲(\frac{\pi}{۲})-۲(-\frac{\pi}{۲})=\pi+\pi=۲\pi$$

***

تمرین برای حل :

۱) طول قوس منحنی $y=۳x$ را در فاصله ی $x=۱$ تا $x=۴$ به دست آورید.

۲) طول منحنی $y=\frac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{\frac{۲}{۳}}$ را بین $x=۰$ و $x=۱$ به دست آورید.

۳) طول منحنی $y=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ را بین $x=۰$ و $x=a$ به دست آورید.

۴) طول قوس منحنی $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ را در فاصله ی $x=-۲$ تا $x=۲$ به دست آورید.

فصل پنجم (اعداد مختلط)

مخصوص رشته های الکترونیک و الکتروتکنیک

فهرست مطالب فصل پنجم

(مخصوص رشته های الکترونیک و الکتروتکنیک)

عنوان..

اعداد مختلط

معادله ی $x^{۲}+۱=۰$ در دستگاه اعداد حقیقی دارای جواب نیست. این معادله و معادلاتی دیگر از ایـن قبیـل در مجموعـه ی جدیدی از اعداد قابل حل می باشند. این مجموعه را مجموعه ی اعداد مخـتلط (کُمـپِلِکس) مـی نامنـد و آن را بـا $\mathbb{C}$ نمـایش می دهند. مجموعه ی اعداد حقیقی زیر مجموعه ای از اعداد مختلط می باشد.

قبل از تعریف مجموعه ی اعداد مختلط، لازم است نماد i را برای $\sqrt{-۱}$ معرفی کنیم. نماد $i=\sqrt{-۱}$ را **عدد موهومی** مـی نامند. با این قرار داد واضح است که

$i=\sqrt{-۱}$

$i^{۲}=-۱$

$i^{۳}=(i^{۲})(i)=-i$

$i^{۴}=(i^{۲})^{۲}=(-۱)^{۲}=۱$

$i^{۵}=(i^{۴})(i)=i$

....

تعریف : مجموعه ی اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر نمایش می دهند.

$$\mathbb{C}=\{x+yi \mid x,y\in R, i=\sqrt{-۱}\}$$

هر عدد مختلط را به صورت $z=x+yi$ نمایش می دهند و آن را فرم اسـتانده ی عـدد z مـی نامنـد. عـدد x را قـسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می گویند و نماد های زیرین را برای نمایش آنها به کار می برند.

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}(z)=y$$

مثال۱ :

الف) $z=۵+۳i$

ب) $z=-۲+\sqrt{۳}i$

ج) $z=۴=۴+۰i$

د) $z=۱=۱+۰i$

هـ) $z=۰=۰+۰i$

توجه : قرار می دهیم که : $۱i=i$ و $-۱i=-i$ و $۰i=۰$

مثال ۲ : در مجموعه ی اعداد مختلط $(\sqrt{-۱})^۲=-۱$ می باشد.

مثال ۳ : عدد $\sqrt{-۲۵}$ و اعدادی از این قبیل ، در مجموعه ی اعداد مختلط معین می باشند.

$$\sqrt{-۲۵}=\sqrt{(۲۵)(i)}=۵\sqrt{i}=۵i$$

تمرین : نشان دهید که $x=۲i$ ریشه ی معادله ی $x^۲-۴=۰$ می باشد.

حل :

$$x^۲+۴=۰\xrightarrow{x=۲i}(۲i)^۲+۴=۰\to ۴i^۲+۴=۰\to ۴(-۱)+۴=۰\to -۴+۴=۰$$

تعریف : دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ مساویند، اگر و فقط اگر

$$\mathrm{Re}(z_۱)=\mathrm{Re}(z_۲) \text{ و } \mathrm{Im}(z_۱)=\mathrm{Im}(z_۲)$$

مثال : دو عدد مختلط زیر مساوی هستند.

$$z_۱=۵-۳i \quad \text{و} \quad z_۲=۵-\sqrt{-۹}=۵-۳i$$

تمرین : فرض کنید که دو عدد مختلط $z_۱=\dfrac{a+۲i}{۶}$ و $z_۲=\dfrac{۱+i}{۳}$ مقدار a را تعیین کنید.

حل :

$$z_۱=\frac{a+۲i}{۶}=\frac{a}{۶}+\frac{۲i}{۶}=\frac{a}{۶}+\frac{۱}{۳}i \qquad \text{و} \qquad z_۲=\frac{۱+i}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}i$$

$$z_۱=z_۲\to\begin{cases}\mathrm{Re}(z_۱)=\mathrm{Re}(z_۲)\to\dfrac{a}{۶}=\dfrac{۱}{۳}\to a=۲\\ \mathrm{Im}(z_۱)=\mathrm{Im}(z_۲)\to\dfrac{۱}{۳}=\dfrac{۱}{۳}\end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱ : مقادیر زیر را بیابید.

الف) $(۱+۲i)(۳(۲+i)-۲(۳+۶i))$ ب) $(۱+i)^۳$ ج) $(۱+i)^۴$

۲ : نشان دهید که دو مقدار زیر برابر یک هستند.

الف) $\left(\dfrac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}\right)^۳$ ب) $\left(\dfrac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}\right)^۳$

***

اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف : فرض کنید $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z_1 = x_1 + y_1 i$ دو عدد مختلط و α یک عدد حقیقی باشند، در این صورت اعمال زیر را روی این دو عدد به شکل زیر تعریف می کنیم.

الف : ضرب عدد حقیقی در یک عدد مختلط

$$\alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 i) = \alpha x_1 + \alpha y_1 i$$

$$\boxed{\alpha z_1 = \alpha x_1 + \alpha y_1 i}$$

توجه : ضرب عدد -1 در عدد مختلط z_1 را قرینه ی z_1 می نامند و به شکل زیر نمایش می دهند.

$$-z_1 = -x_1 - y_1 i$$

ب : جمع دو عدد مختلط

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$$

ج : تفریق دو عدد مختلط

برای تفریق دو عدد مختلط، عدد اول را با قرینه ی عدد دوم جمع می کنیم.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + y_1 i) + (-x_2 - y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i}$$

د : ضرب دو عدد مختلط

$$\begin{aligned} z_1 . z_2 &= (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 . z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i}$$

هـ : تقسیم دو عدد مختلط

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \times \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + x_2 y_1)i}{(x_2)^2 - (y_2 i)^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + x_2 y_1)i}{(x_2)^2 + (y_2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(-x_1y_2+x_2y_1)i}{(x_2)^2+(y_2)^2}$$

توجه داشته باشید که تقسیم دو عدد مختلط z_1 بر z_2 زمانی معنی دارد که $z_2\neq 0$ باشد. یعنی y_2 و x_2 هر دو همزمان صفر نباشند. $(x_2)^2+(y_2)^2\neq 0$

البته در ادامه به طریقی دیگر ولی ساده تر تقسیم اعداد مختلط را بررسی می کنیم.

تمرین برای حل :

۱ : اگر $z_1=5-3i$ و $z_2=2+4i$ آنگاه تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $z_1+z_2=$

ب) $z_1-z_2=$

ج) $3z_1=$

د) $2z_1-3z_2=$

هـ) $z_1.z_2=$

و) $(z_1+z_2).(z_1-z_2)=$

۲ : اگر $z_1=5-3i$ و $z_2=2+4i$ و $z_3=-3-2i$ آنگاه تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(z_1+z_2)+z_3=$

ب) $(z_1+z_2).z_3=$

۳ : اگر z_3 و z_2 و z_1 سه عدد مختلط باشند. ثابت کنید که

الف) $z_1+z_2=z_2+z_1$

ب) $z_1+0=0+z_1=z_1$

ج) $z_1+(z_1+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

د) $z_1+(-z_1)=(-z_1)+z_1=0$

هـ) $z_1\times 1=1\times z_1=z_1$

و) $z_1.z_2=z_2.z_1$

***

توان رسانی در اعداد مختلط

فرض کنید که z یک عدد مختلط باشد. در این صورت تعریف می کنیم.

الف) $z^{0}=1=1+0i$

ب) $z^1=z$

ج) $z^2=z.z$

د) $z^n = z^{n-۱}.z \qquad (n\in N)$

مثال: اگر $z = ۵ - ۳i$ در این صورت داریم:

$$z^۲ = z.z = (۵-۳i).(۵-۳i) = (۲۵-۹) + (-۱۵-۱۵)i = ۱۶ - ۳۰i$$

***

وارون اعداد مختلط

فرض کنید که $a \neq ۰$ یک عدد مختلط باشد. در این صورت عدد مختلط b را وارون (معکوس) a می نامند، هرگاه

$$a.b = b.a = ۱$$

تمرین: نشان دهید که $b = \frac{۳}{۱۳} - \frac{۲}{۱۳}i$ وارون $a = ۳ + ۲i$ می باشد.

حل :

$$a.b = (۳+۲i)(\frac{۳}{۱۳} - \frac{۲}{۱۳}i) = (\frac{۹}{۱۳} + \frac{۴}{۱۳}) + (-\frac{۶}{۱۳} + \frac{۶}{۱۳})i = ۱ + ۰.i = ۱$$

$$b.a = (\frac{۳}{۱۳} - \frac{۲}{۱۳}i)(۳+۲i) = (\frac{۹}{۱۳} + \frac{۴}{۱۳}) + (\frac{۶}{۱۳} - \frac{۶}{۱۳})i = ۱ + ۰.i = ۱$$

توجه :

۱ : طبق تعریف یک عدد مختلط ، وارون پذیر است هرگاه مخالف صفر باشد.

۲ : وارون عدد مختلط منحصر بفرد است.

۳ : وارون عدد مختلط z را با $z^{-۱}$ یا $\frac{۱}{z}$ نمایش می دهند.

تمرین : اگر $z = x + yi$ یک عدد مختلط غیر صفر باشد، نشان دهید. که

$$z^{-۱} = \frac{x}{x^۲ + y^۲} - \frac{y}{x^۲ + y^۲}i$$

حل :

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{x+yi}\times\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}$$
$$=\frac{x-yi}{(x)^2-(yi)^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

تمرین : وارون عدد مختلط $z=3-5i$ را بنویسید.

با توجه به مفهوم وارون یک عدد مختلط می توان تقسیم دو عدد مختلط را نیز به شکل زیر بررسی نمود.

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\times\frac{1}{z_2}$$

مثال :

$$\frac{5+4i}{3-i}=(5+4i)(\frac{1}{3-i})=(5+4i)(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{6}{5}i-\frac{2}{5}=\frac{11}{5}+\frac{17}{5}i$$

تمرین : تساوی زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{i^{80}-i+1}{i^4+i}=$$

حل :

$$\frac{i^{80}-i+1}{i^4+i}=\frac{(i^2)^{40}-i+1}{(i^2)^2+i}=\frac{(-1)^{40}-i+1}{(-1)^2+i}=\frac{1-i+1}{1+i}=\frac{2-i}{1+i}$$
$$=(2-i)(\frac{1}{1+i})=(2-i)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=-i$$

تمرین : ثابت کنید که :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$$

حل :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x+i\sqrt{1+x^2}}{x+i\sqrt{1+x^2}}=\frac{i(2x^2+1)}{2x^2+1}=i$$

تمرین برای حل :

۱ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$x^{۲}+۲x+۳=۰$$

۲ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$(۳-۲i)x+(۵-i)=۰$$

۳ : جواب های حقیقی معادله ی زیر را بیابید.

$$(۴-۲i)x+(۵-۳i)y=۱۳+i$$

۲ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $z=\dfrac{۵+۵i}{۳-۴i}+\dfrac{۲۰}{۴+۳i}=$ ب) $z=\dfrac{(۱+i)(۱+۲i)}{۱-i}+i=$ ج) $z=\dfrac{۳i^{۳۰}-i^{۱۹}}{۲i-۱}$

۳ : جواب دستگاه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases}(۱+i)x-iy=۲+i\\(۲+i)x+(۲-i)y=۲i\end{cases}$$

***

مزدوج اعداد مختلط

تعریف : عدد مختلط $z=x+yi$ را در نظر بگیرید. مزدوج z را با نماد $\bar{z}$ نمایش داده و به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\bar{z}=x-yi$$

مثال : با توجه به تعریف داریم.

الف) $z=۱-i \rightarrow \bar{z}=۱+i$

ب) $z=-۲i+۱ \rightarrow \bar{z}=۲i+۱$

تمرین برای حل : اگر $z_۲$ و $z_۱$ دو عدد مختلط و α یک عدد حقیقی باشند. ثابت کنید که

الف) $\bar{\bar{z}}_۱=z_۱$

ب) $\bar{z}_۱+\bar{z}_۲=\overline{z_۱+z_۲}$

ج) $\bar{z}_{1}.\bar{z}_{2}=\overline{z_{1}.z_{2}}$

د) $\alpha\bar{z}_{1}=\overline{\alpha z_{1}}$

توجه : اگر z_n و ... و z_3 و z_2 و z_1 اعداد مختلط و α یک عدد حقیقی باشند. در این صورت :

الف) $\bar{z}_{1}+\bar{z}_{2}+\bar{z}_{3}+\ldots+\bar{z}_{n}=\overline{z_{1}+z_{2}+z_{3}+\ldots+z_{n}}$

ب) $\bar{z}_{1}.\bar{z}_{2}.\bar{z}_{3}\ldots\bar{z}_{n}=\overline{z_{1}.z_{2}.z_{3}\ldots z_{n}}$

ج) $(\bar{z}_{1})^{n}=\overline{(z_{1})^{n}}$

تمرین برای حل :

۱ : ثابت کنید که اگر z یک ریشه ی معادله ی $ax^{3}+bx+c=0$ باشد. آنگاه $\bar{z}$ نیز یک ریشه ی دیگر آن است.
$(a,b,c\in R)$

۲ : فرض کنید z_2 و z_1 دو عدد مختلط و $\bar{z}_{2}\neq 0$ ثابت کنید که $\overline{\left(\frac{z_{1}}{z_{2}}\right)}=\frac{\bar{z}_{1}}{\bar{z}_{2}}$

۳ : عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{(2+i)(3+2i)(1+2i)}{(1-i)^{2}}=$

ب) $\frac{i^{4}+i^{9}+i^{16}}{2-i^{5}+i^{10}-i^{15}}=$

ج) $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2}-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{3}=$

۴ : درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

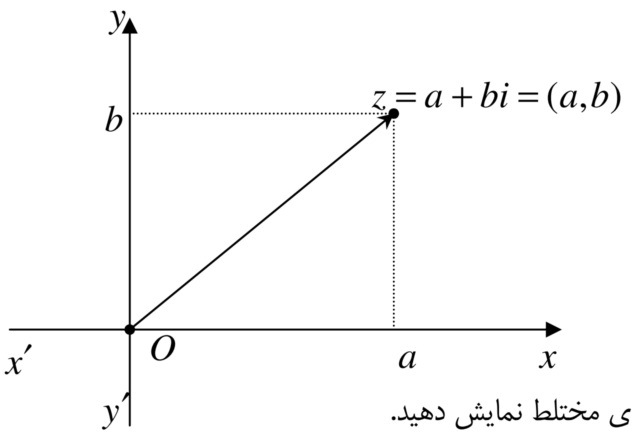
الف) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$

ب) $\frac{z-\bar{z}}{2i}=\operatorname{Im}(z)$

***

نمایش هندسی اعداد مختلط

دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را در یک صفحه در نظر بگیرید. برای هر عدد مختلط $z = a + bi$ نقطه به مختصات (a,b) را در صفحه نظیر می کنیم. این نقطه را **نگار** عدد z می نامیم. برعکس، هر نقطه از این صفحه بـه مختـصات (a,b) می تواند نگـار عـدد مخـتلط $a + bi$ باشـد. بـه ایـن ترتیـب اعـداد حقیقـی $a = a + \cdot i = (a,\cdot)$ بـر محـور طـول هـا و $bi = \cdot + bi = (\cdot,b)$ بر محور عرضها واقع است. به همین دلیل است که محور طول ها را **محور حقیقی** و محور عرض ها را **محور موهومی** می نامند. شکل حاصل از نمایش اعداد موهومی به طریق مذکور را نمودار **آرگان** (argan) می نامند. صفحه ای که در آن دو محور عمود بر هم با این تعاریف منظور گردد، **صفحه ی مختلط** نامیده می شود.



تمرین : عدد زیر را در صفحه ی مختلط نمایش دهید.

الف) $z = ۵ + ۲i$ ب) $z = ۳$ ج) $z = -۴i$

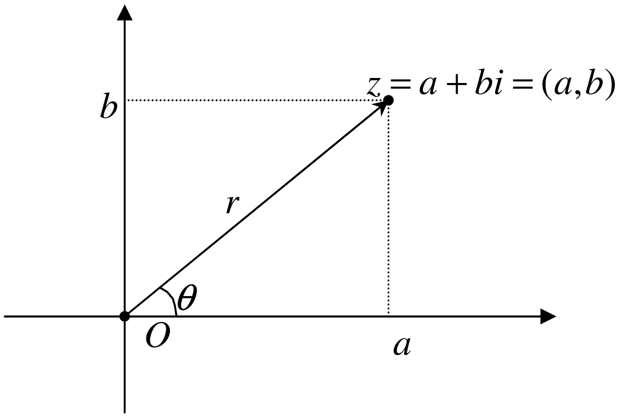
***

اندازه ی یک عدد مختلط

عدد مختلط $z = a + bi$ را در صفحه در نظر بگیرید. فاصله ی مبدأ مختصات تـا نقطـه ی (a,b) را انـدازه یـا طـول عـدد مختلط z می نامند. طول عدد مختلط z را با نماد $|z|$ نمایش می دهند. واضح است که

$$|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

برای هر عدد مختلط غیر صفر z زاویه ای که پاره خط متناظر با محور طول ها در جهت مثبت می سـازد را آرگومـان اصـلی یـا مقدار اصلی گویند و آن را با نماد $\theta = \arg(z)$ نمایش می دهند. واضح است که $\cdot \le \theta < ۲\pi$



واضح است که :

$$r = |z| = \sqrt{a^۲ + b^۲} \quad \text{و} \quad \theta = \arg(z) = arc\tan(\frac{b}{a})$$

تمرین : طول و آرگومان اصلی هر یک از اعداد مختلط زیر را تعیین کنید.

الف) $z_۱ = -۱ - \sqrt{۳}i$ ب) $z_۲ = -i$

حل :

$$|z_۱| = \sqrt{۱+۳} = ۲$$

$$\theta = \arg(z_۱) = arc\tan(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}$$

$$|z_۲| = \sqrt{۰+۱} = ۱$$

$$\theta = \arg(z_۲) = arc\tan(\frac{-۱}{۰}) = -arc\tan(\infty) = \frac{۳\pi}{۲}$$

توجه : عدد $z_۲$ روی نقطه ی $(۰,-۱)$ منطبق است.

تمرین : ابتدا ثابت کنید که $z.\bar{z} = |z|^۲$. سپس تساوی $|z_۱.z_۲| = |z_۱||z_۲|$ را به دست آورید.

حل : ابتدا فرض می کنیم که $z = x + yi$ پس

$$z.\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^۲ + y^۲ = |z|^۲$$

حال داریم:

$$|z_۱.z_۲|^۲ = (z_۱.z_۲)(\overline{z_۱.z_۲}) = (z_۱.z_۲)(\overline{z_۱}.\overline{z_۲}) = (z_۱.\overline{z_۱})(z_۲.\overline{z_۲}) = |z_۱|^۲ . |\overline{z_۲}|^۲$$

بنابراین

$$|z_۱.z_۲|=|z_۱||z_۲|$$

تمرین برای حل : اگر $z_۲$ و $z_۱$ دو عدد مختلط و n یک عدد طبیعی باشند. ثابت کنید که

الف) $|z_۱^n|=|z_۱|^n$

ب) $|z_۱|=|\overline{z_۱}|$

ج) $\mathrm{Re}(z)\le|z|$

د) $|z_۱+z_۲|\le|z_۱|+|z_۲|$

توجه : اگر z_n و ... و $z_۳$ و $z_۲$ و $z_۱$ اعداد مختلط باشند، در این صورت :

الف) $|z_۱+z_۲+z_۳+...+z_n|=|z_۱|+|z_۲|+|z_۳|+...+|z_n|$

ب) $|z^n|=|z|^n$

تمرین برای حل:

۱ : اگر $z_۱=۲+i$ و $z_۲=۳-۲i$ هر یک از عبارت های زیر را حساب کنید.

الف) $|۳z_۱-۴z_۲|=$

ب) $\left|\dfrac{۲z_۲+z_۱-۵-i}{۲z_۱+z_۲+۳-i}\right|^۲=$

۲ : آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $۱-i$

ب) $-۱+i$

ج) ۱

د) $۲i$

۳ : اگر $z_۲$ و $z_۱$ دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید که

$$|z_۱+z_۲|+|z_۱-z_۲|=۲(|z_۱|^۲+|z_۲|^۲)$$

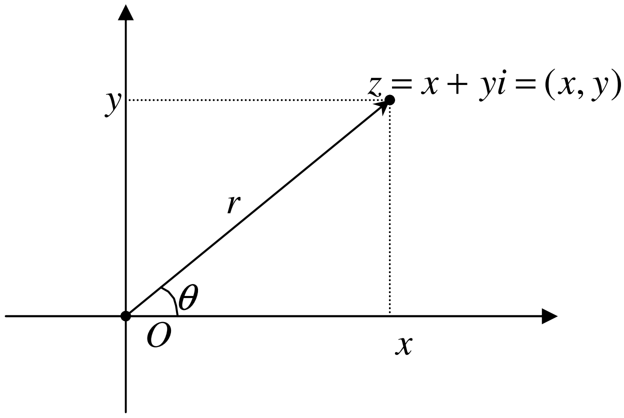
۴ : اگر $z=x+yi$ ، نشان دهید که:

$$|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le\sqrt{۲}|z|$$

***

نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

فرض کنید $z = x + yi$ یک عدد مختلط باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



$$x = r\cos\theta \rightarrow x = |z|\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta \rightarrow y = |z|\sin\theta$$

$$z = x + yi \rightarrow z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \rightarrow z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال : می خواهیم عدد مختلط $z = ۱ + i$ را به صورت مثلثاتی نمایش دهیم. در این صورت داریم.

$$|z| = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$z = ۱ + i = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴})$$

توجه : اغلب مناسب است که عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $e^{i\theta}$ نمایش دهیم. لذا

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\rightarrow z = |z|e^{i\theta}$$

این فرمول را **فرمول اویلر** می نامند.

تمرین برای حل :

۱ : هر یک از اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید.

الف) $z = -۱ - \sqrt{۳}i$

ب) $z = ۱$

ج) $z = ۱ - i$

د) $z = -i$

۲ : هر یک از اعداد زیر را به صورت عدد مختلط معمولی نمایش دهید.

الف) $z = \sqrt{۳}(\cos ۶۰ + i\sin ۶۰)$

ب) $z = ۶(\cos ۲۴۰ + i\sin ۲۴۰)$

ج) $z = ۲(\cos(-\frac{\pi}{۴}) + i\sin(-\frac{\pi}{۴}))$

د) $z = ۵(\cos(\frac{\pi}{۲}) + \sin(\frac{\pi}{۲}))$

***

معکوس یک عدد مختلط به روش اویلر

با استفاده از نماد گذاری اویلر می توان معکوس یک عدد مختلط به به شکل زیر نیز به دست آورید.

$$\frac{۱}{z} = \frac{۱}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z|(\cos\theta - i\sin\theta)$$

مثال : می خواهیم عدد مختلط $z = ۱ + i$ را به صورت مثلثاتی نمایش دهیم. در این صورت داریم.

$$|z| = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$z = ۱ + i = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}) \rightarrow \frac{۱}{z} = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} - i\sin\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۱ - i$$

تمرین برای حل : وارون عدد مختلط $z = ۳ - ۴i$ را بنویسید.

***

ضرب و تقسیم در اعداد مختلط به روش اویلر

اکنون به راحتی می توان ضرب و تقسیم اعداد مختلط را به کمک نماد گذاری جدید به دست آورید. اگر قرار دهیم:

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = |z_1| e^{i\theta_1}$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_2| e^{i\theta_2}$. پس :

$$z_1.z_2 = |z_1| e^{i\theta_1}.|z_2| e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

تمرین برای حل : اگر $z_1 = \sqrt{3} + i$ و $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $z_1 z_2 =$ ب) $\frac{1}{z_1} =$ ج) $\frac{z_1}{z_2} =$

***

توان در اعداد مختلط به روش اویلر

با آشنایی با نمایش مثلثاتی اعداد مختلط، می توان توان رسانی این اعداد را به راحتی انجام داد. به نتایج عنوان شده در ادامه توجه نمایید.

اگر $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. پس :

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= |z_1||z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ و $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$. در این صورت نتیجه ی فوق به راحتی به دست می آید.

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= |z_1| e^{i\theta_1}.|z_2| e^{i\theta_2} = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}$$

مثال : اگر $z_1 = 2(\cos 100 + i\sin 100)$ و $z_2 = -(\cos 20 + i\sin 20)$ در این صورت

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$z_۱.z_۲ = ۲(-۱)(\cos(۱۰۰+۲۰)+i\sin(۱۰۰+۲۰)) = -۲(\cos ۱۲۰ + i\sin ۱۲۰)$$

نتیجه ۱ : اگر $z_۲$ و $z_۱$ دو عدد مختلط باشند. با توجه به ضرب عنوان شده در فوق نتیجه می شود که

الف) $|z_۱.z_۲| = |z_۱|.|z_۲|$

ب) $\arg(z_۱z_۲) = \arg(z_۱) + \arg(z_۲)$

همچنین اگر z یک عدد مختلط و n یک عدد طبیعی باشد. پس:

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{و} \quad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

نتیجه ۲ : اگر $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ یک عدد مختلط باشند. با توجه به ضرب عنوان شده در فوق نتیجه می شود که

$$z^۲ = z.z = |z||z|(\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)) = |z|^۲(\cos(۲\theta)+i\sin(۲\theta))$$

و به همین ترتیب برای هر عدد طبیعی n داریم.

$$z = |z|e^{i\theta} \to z^n = (|z|e^{i\theta})^n \to z^n = |z|e^{i(n\theta)}$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

این تساوی را **دستور دِموآور** می نامند.

تمرین برای حل : اگر $z_۲$ و $z_۱$ دو عدد مختلط و $z_۲ \neq ۰$ باشند. ثابت کنید که

الف) $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}$

ب) $\arg(\frac{z_۱}{z_۲}) = \arg(z_۱) - \arg(z_۲)$

تمرین : فرض کنید $z_۱ = ۲(\cos ۴۰ + i\sin ۴۰)$ و $z_۲ = \cos ۸ + i\sin ۸)$ مطلوبست محاسبه ی $\arg(\frac{{z_۱}^۴}{{z_۲}^{۱۰}})$

حل :

$$\arg(\frac{{z_۱}^۴}{{z_۲}^{۱۰}}) = \arg({z_۱}^۴ - {z_۲}^{۱۰}) = \arg({z_۱}^۴) - \arg({z_۲}^{۱۰}) = ۴\arg(z_۱) - ۱۰\arg(z_۲) = ۱۶۰ - ۸۰ = ۸۰$$

تمرین : عدد $(۱+i\sqrt{۳})^{-۱۰}$ را ساده کنید.

حل : فرض کنید که $z=۱+i\sqrt{۳}$ بنابراین :

$$z=۲(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳})$$

$$z^{-۱۰}=۲^{-۱۰}(\cos\frac{-۱۰\pi}{۳}+i\sin\frac{-۱۰\pi}{۳})=\frac{۱}{۲^{۱۰}}(-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i)=\frac{۱}{۲^{۱۱}}(-۱+\sqrt{۳}i)$$

تمرین : اعداد حقیقی a و b را چنان تعیین کنید که $z=۱-i$ ریشه ی معادله ی $z^{۷}+az^{۵}+b=۰$ باشد.

حل : کافی است $z=۱-i=\sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴})$ را در معادله ی داده شده جایگزین کنیم.

$$z^{۷}+az^{۵}+b=۰\to(\sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴}))^{۷}+a(\sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴}))^{۵}+b=۰$$

$$\to(\sqrt{۲})^{۷}(\cos\frac{۴۹\pi}{۴}+i\sin\frac{۴۹\pi}{۴})+a(\sqrt{۲})^{۵}(\cos\frac{۳۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۳۵\pi}{۴})+b=۰$$

$$\to ۸\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۴a\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})+b=۰$$

$$\to ۸+۸i-۴a+۴ai+b=۰\to(۸-۴a+b)(۴a+۸)i=۰\to a=-۲\ ,\ b=-۱۶$$

تمرین برای حل : هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین شکل بنویسید.

الف) $(\sqrt{۳}+i)^{۶}=$

ب) $(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i})^{۱۰}=$

ج) $[۳(\cos ۴۰+i\sin ۴۰)][۲(\cos ۸۰+i\sin ۸۰)]=$

***

ریشه گیری در اعداد مختلط

عدد مختلط z را در نظر بگیرید. عدد مختلط w را ریشه ی n ام عدد مختلط z می نامیم، هرگاه $w^{n}=z$ و می نویسیم.

$$z^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{z}=w$$

توجه : در مجموعه ی اعداد مختلط هر عدد دارای ریشه ی nام است و به تعداد n ریشه دارد. زیرا اگر قرار دهیم:

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

و ریشه ی nام عدد z برابر $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))$ باشد. پس

$$z=w^n=(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

لذا

$$\rho=\sqrt[n]{|z|}$$

$$\cos\theta=\cos n\alpha\ ,\ \sin\theta=\sin n\alpha\to\theta=n\alpha\xrightarrow{k\in Z}n\alpha=۲k\pi+\theta\to\alpha=\frac{۲k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}$$

و با توجه به $۰\le\alpha\le۲\pi$ می توان نوشت:

$$\alpha=\frac{۲k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\quad;\ k=۰,۱,۲,\dots,n-۱$$

نتیجه : اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد. ریشه ی nام عدد z به شکل زیر است.

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{۲k\pi}{n}+\frac{\theta}{n})+i\sin(\frac{۲k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}))$$

$$k=۰,۱,۲,\dots,n-۱$$

$$\Rightarrow w_k=\sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{۲k\pi+\theta}{n})}$$

تمرین : ریشه ی چهارم عدد یک را در مجموعه ی اعداد مختلط به دست آورید.

حل :

$$z=۱=۱+۰i\to\theta=\arg(z)=۰\ ,|z|=۱$$

$$\sqrt[۴]{۱}=\sqrt[۴]{۱}(\cos(\frac{۲k\pi+۰}{۴})+i\sin(\frac{۲k\pi+۰}{۴}))\quad;\ k=۰,۱,۲,۳$$

$$\to\sqrt[۴]{۱}=\cos(\frac{۲k\pi}{۴})+i\sin(\frac{۲k\pi}{۴})\quad;\ k=۰,۱,۲,۳$$

$$\to\begin{cases} k=0 \to w_1=\sqrt[4]{1}=\cos(0)+i\sin(0)=1+0=1 \\ k=1 \to w_2=\sqrt[4]{1}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=0+i=i \\ k=2 \to w_3=\sqrt[4]{1}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1+0=-1 \\ k=3 \to w_4=\sqrt[4]{1}=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})=0-i=-i \end{cases}$$

تمرین : ریشه ی دوم عدد $z=1+i$ را محاسبه کنید.

$$z=1+i \to \theta=\arg(z)=\frac{\pi}{4}\ ,|z|=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{2}(\cos(\frac{2k\pi}{2}+\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{2k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}))\quad ;\ k=0,1$$

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{2}(\cos(k\pi+\frac{\pi}{8})+i\sin(k\pi+\frac{\pi}{8}))\quad ;\ k=0,1$$

$$\to\begin{cases} k=0 \to w_1=\sqrt{1+i}=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})) \\ k=1 \to w_2=\sqrt{1+i}=\sqrt{2}(\cos(\pi+\frac{\pi}{8})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{8}))=\sqrt{2}(\cos(\frac{9\pi}{8})+i\sin(\frac{9\pi}{8})) \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱ : ریشه ی پنجم عدد یک را در مجموعه ی اعداد مختلط به دست آورید.

۲ : ریشه ی دوم عدد ۱− را در مجموعه ی اعداد مختلط به دست آورید.

۳ : ریشه ی دوم عدد $z=\sqrt{3}+i$ را به دست آورید.

۴ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$z^3-1=0$$

۵ : معادله ی زیر را حل کنید.

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

۶ : اگر $(z\neq 1)$ در این صورت معادله ی زیر را حل کنید.

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$$

۷ : تساوی زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} =$$

***

منبع :

۱ : احمد پور ابراهیم ، میمیانی آنه گلدی ، ریاضی عمومی ۱ ، دانشگاه پیام نور ، رشته ی ریاضی ، ۱۳۸۸

۲ : جیمز روئل ، بروان چرچیل ، ترجمه ی امیر خسروی ، متغیرهای مختلط و کاربرد آنها ، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ، ۱۳۷۰

۳ : سیلورمن هِرب ، ترجمه ی محسن نقشینه ارجمند، متغیر های مختلط ، نشر جهاد دانشگاهی ، اصفهان ، ۱۳۶۹

منابع

۱ : رحیم زاده ، علی اکبر ، ریاضیات عمومی، مراکز تربیت معلم ، تهران (۱۳۶۸)

۲ : احمد پور، ابراهیم ، ریاضی عمومی ۱، دانشگاه پیام نور، تهران (۱۳۸۶)

۳ : نیکوکار ، مسعود ، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ، دانشگاه امیر کبیر ، تهران (۱۳۷۶)

۴ : رفسنجانی صادقی ، محمد رضا ، ریاضیات پایه ، دانشگاه امیر کبیر ، تهران (۱۳۷۶)

۵ : نیکوکار ، مسعود ، ریاضی عمومی ، گسترش علوم پایه ، تهران (۱۳۸۷)

۶ : کرایه چیان ، محمد علی ، ریاضی عمومی ۱ ، آهنگ قلم ، مشهد (۱۳۸۸)

۷ : مرادی ، تیمور ، ریاضی عمومی ، فرهنگ مردم ، اصفهان (۱۳۸۶)

۸ : فرخو ، لیدا ، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ، دانشگاه پیام نور ، تهران (۱۳۸۵)

۹ : احمد پور ابراهیم ، میمیانی آنه گلدی ، ریاضی عمومی ۱ ، دانشگاه پیام نور ، رشته ی ریاضی ، ۱۳۸۸

۱۰ : جیمز روئل ، بروان چرچیل ، ترجمه ی امیر خسروی ، متغیرهای مختلط و کاربرد آنها ، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ، ۱۳۷۰

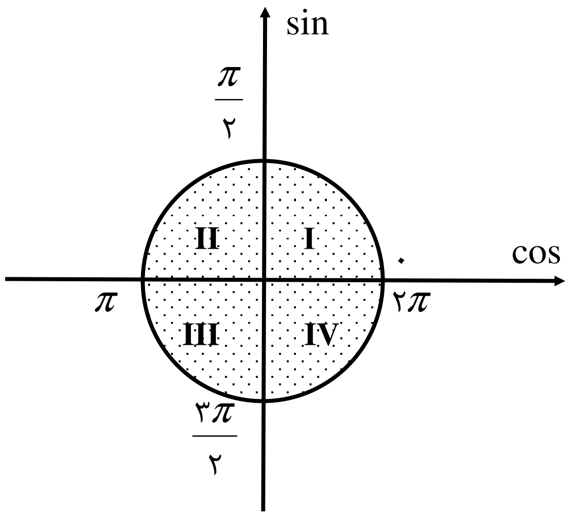
۱۱ : سیلورمن هِرب ، ترجمه ی محسن نقشینه ارجمند، متغیر های مختلط ، نشر جهاد دانشگاهی ، اصفهان ، ۱۳۶۹

ضمیمه ی ۱ : مثلثات

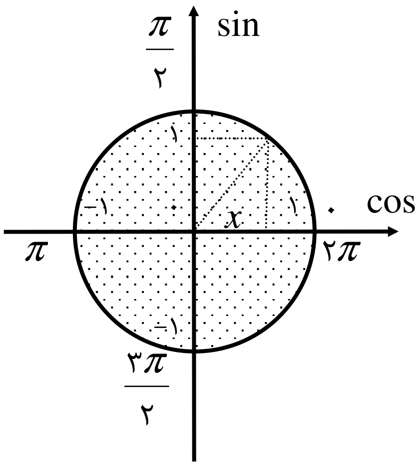
☑ **اتحاد های بنیادی مثلثات**

۱. $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$	۴. $۱+\tan^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$	۷. $\sec\alpha=\dfrac{۱}{\cos\alpha}$
۲. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	۵. $۱+\cot^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$	۸. $\cos ec\alpha=\dfrac{۱}{\sin\alpha}$
۳. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۶. $\tan\alpha.\cot\alpha=۱$	

☑ **جدول علامت نسبت های مثلثاتی**



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−



$-۱\le\cos\alpha\le۱$ و $-۱\le\sin\alpha\le۱$

***

☑ **جداول مقادیر نسبت های مثلثا تی زاویه های مهم**

....

الف)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

ب)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱−	۰
cos		۱	۰	۱−	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

☑ **نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه**

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

***

☑ **نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم ومکمل**

الف) در نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس می توان مـضربهای زوج π را حـذف کـرد ولـی اگـر مـضربهای فـرد πرا حـذف کنیم،باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(3\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

ب) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(3\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

ج) اگر زاویه مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. ربعی که زاویه ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره ی مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده وجلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha$$ ربع دوم

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$$ ربع سوم

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+\cot g\alpha$$ ربع اول

***

نتیجه ی۱) اگر $n\in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\sin(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\sin\alpha$$
$$\cos(n\pi+\alpha)=(-۱)^n\cos\alpha$$
$$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

نتیجه ی ۲) با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) \qquad \tan\alpha=\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) \qquad \cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

***

☑ **مفهوم arc (زاویه ای که .....) یا معکوس مثلثاتی**

$$\left.\begin{array}{l} arc\sin a=x\leftrightarrow\sin x=a \\ arc\cos b=y\leftrightarrow\cos y=b \end{array}\right\rangle -۱\le a,b\le ۱$$
$$arc\tan c=z\leftrightarrow\tan z=c$$
$$arc\cot d=t\leftrightarrow\cot t=d$$

مثلاً: $$arc\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۳}\leftrightarrow\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

***

☑ **نسبت های مثلثاتی زاویه های مرکب**

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta \qquad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$$

***

☑ **نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر و سه برابر کمان**

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \end{cases}$$

☑ **نسبت های مثلثاتی تبدیل توان۲ به ضریب۲**

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

توجه :

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \to \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \to \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

***

توجه : روابط مشابه روابط فوق برای توان های دیگر نیز بیان نمود.

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

***

☑ **روابط تبدیل جمع و تفریق به ضرب**

$$\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}.\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}.\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}.\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}.\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

***

☑ **روابط تبدیل ضرب به جمع**

$$\sin\alpha.\cos\beta=\frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha.\cos\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

توجه:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^{۲}x+\sin^{۲}y=\sin(x+y).\sin(x-y)$$

$$\cos^{۲}x-\cos^{۲}y=-\sin(x+y).\sin(x-y)=\cos(x+y).\cos(x-y)$$

***

☑ **معادله ی مثلثاتی**

هر معادله که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله ی مثلثاتی می نامند. منظور از حل معادله ی مثلثاتی، یافتن زاویه یا زاویه هایی است که به ازاء آنها تساوی برقرار باشد.

	معادله	حل
معادله ی جبری	$2x-1=0$	$2x=1 \to x=\frac{1}{2}$
معادله ی مثلثاتی	$2\sin x-1=0$	$2\sin x=1 \to \sin x=\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\sin x=\sin\frac{\pi}{6}} \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$

در واقع برای حل هر معادله ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد.

ردیف	صورت معادله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب
۱	$\sin\varphi(x)=a$	$-1\le a\le 1$	$\sin\varphi(x)=\sin\alpha$	$\varphi(x)=2k\pi+\alpha$ $\varphi(x)=2k\pi+\pi-\alpha$
۲	$\cos\varphi(x)=b$	$-1\le b\le 1$	$\cos\varphi(x)=\cos\alpha$	$\varphi(x)=2k\pi+\alpha$ $\varphi(x)=2k\pi-\alpha$
۳	$\tan\varphi(x)=c$	-	$\tan\varphi(x)=\tan\alpha$	$\varphi(x)=k\pi+\alpha$
۴	$\cot\varphi(x)=d$	-	$\cot\varphi(x)=\cot\alpha$	

که در آن α کوچکترین زاویه ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می باشد. این زاویه را در صورت وجود از جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی پیدا کنید و در غیر این صورت می توانید از مفهوم arc استفاده کنید.

***

تذکر: با توجه به جدول فوق ، اگر مقادیر c و a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه ی زاویه ی α را قرار دهید . همچنین اگر مقادیر d و b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه ی α را قرار دهید.

....

***

حالت های خاص معادلات مثلثاتی

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می توان از حالت های خاص زیر نیز استفاده نمود.

$\sin\varphi(x)=۱\rightarrow\varphi(x)=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$\cos\varphi(x)=۰\rightarrow\varphi(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$\sin\varphi(x)=۰\rightarrow\varphi(x)=k\pi$	$\cos\varphi(x)=-۱\rightarrow\varphi(x)=۲k\pi+\pi$
$\sin\varphi(x)=-۱\rightarrow\varphi(x)=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$	$\tan\varphi(x)=۰\rightarrow\varphi(x)=k\pi$
$\cos\varphi(x)=۱\rightarrow\varphi(x)=۲k\pi$	$\cot\varphi(x)=۰\rightarrow\varphi(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

***

ضمیمه ی ۲ : فرمول های مشتق

مشتق تابع f در نقطه ی $x = x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تابع مشتق (مشتق اول تابع)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الف : فرمول های مقدماتی

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y = a$	$y' = 0$	$y = 3 \to y' = 0$
۲	$y = ax$	$y' = a$	$y = 5x \to y' = 5$
۳	$y = ax^n$	$y' = anx^{n-1}$	$y = 5x^3 \to y' = 5(3x^2) = 15x^2$
۴	$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	
۵	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
۶	$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[5]{x^2} \to y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
۷	$y = a^x$	$y' = a^x . L_n a$	$y = 3^x \to y' = 3^x L_n 3$
۸	$y = e^x$	$y' = e^x$	
۹	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
۱۰	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
۱۱	$y = \tan x$	$y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

۱۲	$y=\cot x$	$y'=-(۱+\cot^{۲} x)=-\frac{۱}{\sin^{۲} x}$	
۱۳	$y=\log_a^x$	$y'=\frac{۱}{xL_n a}$	$y=\log_{۳}^{x} \to y'=\frac{۱}{xL_n ۳}$
۱۴	$y=L_n x$	$y'=\frac{۱}{x}$	
۱۵	$y=\sin^{-۱} x$	$y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$	
۱۶	$y=\cos^{-۱} x$	$y'=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$	
۱۷	$y=\tan^{-۱} x$	$y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$	
۱۸	$y=\cot^{-۱} x$	$y'=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$	

ب : فرمول های تکمیلی

فرض کنید که u و v و ... توابعی بر حسب متغیر x باشند. در این صورت می توان فرمول های زیر را نیز بیان کرد.

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=au$	$y'=au'$	$y=۳\sin x \to y'=۳\cos x$
۲	$y=u+v+\dots$	$y'=u'+v'+\dots$	$y=۳x^{۵}-۴x+۲ \to y'=۱۵x^{۴}-۴$
۳	$y=u.v$	$y'=u'v+v'u$	$y=(۳x-۴)(۱-۴x)$ $\to y'=۳(۱-۴x)+(-۴)(۳x-۴)$
۴	$y=u.v.w$	$y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$	$y=(۳x^{۲}-۱)(۵-۴x)(۲x-۷)$ $\to y'=۶x(۵-۴x)(۲x-۷)$ $+(-۴)(۳x^{۲}-۱)(۲x-۷)$ $+(۲)(۳x^{۲}-۱)(۵-۴x)$

۵	$y = u^n$	$y' = nu'u^{n-۱}$	$y = \sin^۵ x \to y' = ۵\cos x \sin^۴ x$
۶	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v + v'.u}{v^۲}$	$y = \frac{۳x^۲ - ۱}{۲x + x^۲}$ $\to y' = \frac{۶x(۲x + x^۲) - (۲ + ۲x)(۳x^۲ - ۱)}{(۲x + x^۲)^۲}$
۷	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{۵x - x^۲} \to y' = \frac{۵ - ۲x}{۲\sqrt{۵x - x^۲}}$
۸	$y = \sqrt[n]{u^m}$	$y' = \frac{m.u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[۵]{\sin x^۲} \to y' = \frac{۲\cos x}{۵\sqrt[۵]{\sin^۳ x}}$
۹	$y = f(u)$	$y' = u'.f'(u)$	$y = f(\sin x) \to y' = (\cos x) f'(\sin x)$
۱۰	$y = a^u$	$y' = u'.a^u.L_n a$	$y = ۳^{\sin x}$ $\to y' = (\cos x)(۳^{\sin x})(L_n ۳))$
۱۱	$y = e^u$	$y' = u'.e^u$	$y = e^{\sqrt{x}} \to y' = (\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(e^{\sqrt{x}})$
۱۲	$y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$	$y = \sin ۲x \to y' = ۲\cos x$
۱۳	$y = \cos u$	$y' = -u'.\sin u$	$y = \cos\sqrt{x} \to y' = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x$
۱۴	$y = \tan u$	$y' = ۱ + \tan^۲ x = \frac{u'}{\cos^۲ u}$	$y = \tan e^x \to y' = e^x(۱ + \tan e^x)$
۱۵	$y = \cot u$	$y' = -u'(۱ + \cot^۲ u) = -\frac{u'}{\sin^۲ u}$	$y = \cot\frac{۱}{x} \to y' = -(\frac{-۱}{x^۲})(۱ + \cot^۲\frac{۱}{x})$
۱۶	$y = \log_a^u$	$y' = \frac{u'}{u} \times \frac{۱}{L_n a}$	$y = \log_۳^{x^۲ + ۵x}$ $\to y' = \frac{۲x + ۵}{x^۲ + ۵x} \times \frac{۱}{L_n ۳}$
۱۷	$y = L_n u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = L_n(۲ + \sin x) \to y' = \frac{\cos x}{۲ + \sin x}$

۱۸	$y=\sin^{-۱}u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$	$y=\sin^{-۱}۳x \to y'=\frac{۳}{\sqrt{۱-(۳x)^۲}}$
۱۹	$y=\cos^{-۱}u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$	$y=\cos^{-۱}(x^۲) \to y'=\frac{۲x}{\sqrt{۱-(x^۲)^۲}}$
۲۰	$y=\tan^{-۱}u$	$y'=\frac{u'}{۱+u^۲}$	$y=\tan^{-۱}e^x \to y'=\frac{e^x}{۱+(e^x)^۲}$
۲۱	$y=\cot^{-۱}u$	$y'=\frac{-u'}{۱+u^۲}$	$y=\cot^{-۱}(۳x+۱) \to y'=\frac{۳}{۱+(۳x+۱)^۲}$

ج : مشتق مراتب بالاتر

۱) $y=\frac{۱}{x} \to y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$

۲) $y=\frac{۱}{ax+b} \to y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+۱}}$

۳) $y=(ax+b)^n \to y^{(n)}=n! a^n$

۴) $y=f(ax) \to y^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax)$

۵) $y=\sin ax \to y^{(n)}=a^n.\sin(ax+\frac{n\pi}{۲})$

۶) $y=\cos ax \to y^{(n)}=a^n.\cos(ax+\frac{n\pi}{۲})$

۷) $y=e^{ax} \to y^{(n)}=a^n e^{ax}$

۸) $y=L_n x \to y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{x^n}$

***

ضمیمه ی ۳ : فرمول های انتگرال

۱) $\int a\,dx = ax$

۲) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

۳) $\int (f(x)+g(x)+\ldots)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \ldots$

۴) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(x)dx$

۵) $\int u^{n}du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} \quad ; \quad n \neq -1$

۶) $\int \frac{du}{u} = L_n\,|u|$

۷) $\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}\sqrt{u^{3}} + c$

۸) $\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx}$

۹) $\int e^{mu}\,du = \frac{1}{m}e^{mu}$

۱۰) $\int e^{u}du = e^{u}$

۱۱) $\int a^{mx}\,dx = \frac{1}{mL_n a}a^{mx} \qquad a>0\ ,\ a\neq 1$

۱۲) $\int a^{mu}\,du = \frac{1}{mL_n a}a^{mu} \qquad a>0\ ,\ a\neq 1$

۱۳) $\int a^{u}du = \frac{1}{L_n a}a^{u} \qquad a>0\ ,\ a\neq 1$

۱۴) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

۱۵) $\int \sin au\, du = -\frac{1}{a}\cos au$

۱۶) $\int \sin u\, du = -\cos u$

۱۷) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax$

۱۸) $\int \cos au\, du = \frac{1}{a}\sin au$

۱۹) $\int \cos u\, du = \sin u$

۲۰) $\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a} L_n |\cos ax|$

۲۱) $\int \tan au\, du = -\frac{1}{a} L_n |\cos au|$

۲۲) $\int \tan u\, du = -L_n |\cos u| = L_n |\sec u|$

۲۳) $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a} L_n |\sin ax|$

۲۴) $\int \cot au\; du = \frac{1}{a} L_n |\sin au|$

۲۵) $\int \cot u\, du = L_n |\sin u|$

۲۶) $\int \sec u\, du = L_n(\sec u + \tan u) = L_n \tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})$

۲۷) $\int \csc u\, du = L_n(\sec u - \cot u) = L_n \tan\frac{u}{2}$

۲۸) $\int (1 + \tan^2 au) du = \int \frac{1}{\cos^2 au} du = \frac{1}{a}\tan au$

۲۹) $\int (1 + \cot^2 au) du = \int \frac{1}{\sin^2 au} du = -\frac{1}{a}\cot au$

۳۰) $\int \sin^{2} ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax\,)$

۳۱) $\int \sin^{2} u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u)$

۳۲) $\int \cos^{2} ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$

۳۳) $\int \cos^{2} u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)$

۳۴) $\int \tan^{2} ax dx = \frac{1}{a}\tan ax - x$

۳۵) $\int \tan^{2} u\,du = \tan u - u$

۳۶) $\int \cot^{2} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x$

۳۷) $\int \cot^{2} u\,du = -\cot u - u$

۳۸) $\int \sec^{2} ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax$

۳۹) $\int \sec^{2} u\,du = \tan u$

۴۰) $\int \csc^{2} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax$

۴۱) $\int \csc^{2} u\,du = -\cot u$

۴۲) $\int \sec u \tan u\,du = \sec u$

۴۳) $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u$

۴۴) $\int \sin^{3} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^{3} ax$

۴۵) $\int \cos^{3} ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^{3} ax$

۴۶) $\int \tan^{۳} ax\,dx = \frac{۱}{۲a}\tan^{۲} ax + \frac{۱}{a} L_n \cos ax$

۴۷) $\int \cot^{۳} ax\,dx = -\frac{۱}{۲a}\cot^{۲} ax - \frac{۱}{a} L_n \sin ax$

۴۸) $\int \sec^{۳} ax dx = \frac{۱}{۲a}\sec ax.\tan ax + \frac{۱}{۲a}(\sec ax + \tan ax)$

۴۹) $\int \csc^{۳} ax dx = -\frac{۱}{۲a}\csc ax.\cot ax + \frac{۱}{۲a} L_n \tan\frac{ax}{۲}$

۵۰) $\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} - x^{۲}}} dx = \sin^{-۱}\frac{x}{a}$

۵۱) $\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} dx = \sin^{-۱} x$

۵۲) $\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} - u^{۲}}} du = \sin^{-۱}\frac{u}{a}$

۵۳) $\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} du = \sin^{-۱} u + c$

۵۴) $\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} + x^{۲}}} dx = L_n \mid x + \sqrt{a^{۲} + x^{۲}} \mid$

۵۵) $\int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - a^{۲}}} dx = L_n \mid x + \sqrt{x^{۲} - a^{۲}} \mid$

۵۶) $\int \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} + u^{۲}}} du = L_n \mid u + \sqrt{a^{۲} + u^{۲}} \mid$

۵۷) $\int \frac{۱}{\sqrt{u^{۲} - a^{۲}}} du = L_n \mid u + \sqrt{u^{۲} - a^{۲}} \mid$

۵۸) $\int \frac{۱}{a^{۲} + x^{۲}} dx = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a} \qquad a > ۰$

۵۹) $\int \frac{۱}{۱ + x^{۲}} dx = \tan^{-۱} x$

۶۰) $\int \frac{۱}{a^۲+u^۲}du=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{u}{a}$ $\quad a>۰$

۶۱) $\int \frac{۱}{۱+u^۲}du=\tan^{-۱}u+c$

۶۲) $\int \frac{۱}{a^۲-x^۲}dx=\frac{۱}{۲a}L_n\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

۶۳) $\int \frac{۱}{a^۲-u^۲}du=\frac{۱}{۲a}L_n\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$

۶۴) $\int L_n x\,dx=-x+xL_n x$

۶۵) $\int L_n ax\,dx=-x+xL_n ax$

۶۶) $\int L_n u\,du=-u+uL_n u$

۶۷) $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ انتگرال گیری جزء به جزء

۶۸) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

***