بسم الله الرحمن الرحیم

الکترومغناطیس، آنالیز برداری

تونیکی می کن و دردجله انداز
که ایزددربیابانت دهد باز

((آنالیزبرداری))

- ضرب داخلی

$\vec{a} = ax\hat{\imath}$+ay$\hat{\jmath}$+az$\hat{k}$

$\vec{b}$ = bx$\hat{\imath}$+by$\hat{\jmath}$+bz$\hat{k}$

$\overrightarrow{|c|} = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\ \cos \propto}$

$$\vec{a}.\vec{b}=|a|.\,|b|.\cos\propto$$

$$\propto = \cos^{-1}\frac{a.b}{|a|.|b|}$$

$|a| = \sqrt{a^2x + a^2y + a^2z}$

$|b| = \sqrt{b^2x + b^2y + b^2z}$

$\vec{a}.\vec{b}=a_x b_x + b_y a_y + b_z a_z$

مثال:

$$\begin{cases}\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{k} \\ \vec{b} = 4j + \hat{k}\end{cases}$$

$$a.\mathrm{b}=2\times(0)+(0)\times4+(-3\times1)=-3$$

$$|a| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|b|=\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\propto = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}}$$

ضرب خارجی:

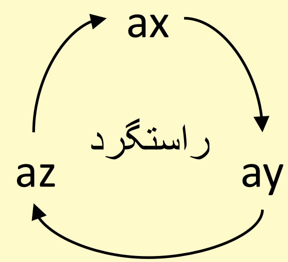
$$\vec{A}\times\vec{B} = |A|.|B|\ \sin\propto$$

$$\propto = \sin^{-1}\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|A|.|B|}$$

$$\begin{cases}\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\end{cases}$$

دستگاه مختصات راستگرد:

$$\begin{cases} a_x \times a_y = a_z \\ a_y \times a_z = a_x \\ a_z \times a_x = a_y \end{cases}$$



دستگاه مختصات متعامد:

اگرستون تشکیل دهنده دستگاه دوبه دوبرهم عمود باشند آن دستگاه مختصات را متعامد می گوییم:

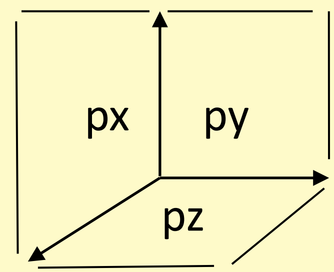
$$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$$

المان طولی در دستگاه مختصات دکارتی:

طولی $\overrightarrow{dl} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$+dz$\hat{z}$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|n|}$$

$$\begin{cases} d_{sx} = dy\ dz\hat{x} \\ d_{sy} = dx\ dz\ \hat{y} \\ d_{sz} = dx\ dy\ \hat{z} \end{cases}$$



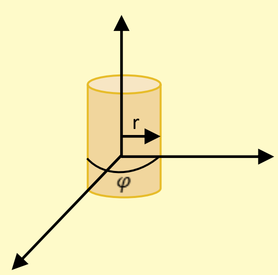
حجم:dv=dx dy dz

دستگاه مختصات استوانه ای:

$$\vec{A} = Ar\vec{r} + A\varphi\vec{\varphi} + Az\vec{z}$$

$$\begin{Bmatrix} -\infty < 2 < \infty \\ 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{Bmatrix}$$

$\overrightarrow{|A|}$=$\sqrt{A^2 r + A^2\varphi + A^2 z}$



المان طولی در دستگاه استوانه ای:

المان سطحی $\begin{cases} ds_r = r\, d\varphi\, dz\hat{r} \\ ds_\varphi = dr\, dz\hat{\varphi} \\ ds_z = r\, dr\, d\varphi\hat{z} \end{cases}$

المان حجم : du=r dφ $dz\ dr$

تبدیل پارامترهای استوانه ای به قائم:

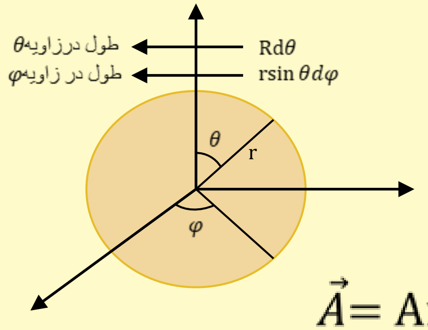
r=$\sqrt{x^2+y}$

$\begin{cases} x = \mathrm{r}\cos\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases}$

$\varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

دستگاه مختصات کروی:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \\ 0 \leq r < \infty \end{cases}$$



$$\vec{A} = \mathrm{A}r\hat{r} + A\theta\hat{\theta} + A\varphi\hat{\varphi}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A^2 r + A^2\theta + A^2\varphi}$$

$$\overrightarrow{dl} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + d\varphi\hat{\varphi}$$

$$\int_0^{\pi} rd\theta = r\int_0^{\pi} d\theta = r\theta\Big|_0^{\pi} = r\pi$$

$$\mathrm{Rsin}\,\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R\sin(2\pi)$$

$$\overrightarrow{ds}\, r = R^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; \hat{R}$$

$$\overrightarrow{ds}\theta = \mathrm{Rsin}\,\theta \; dr \; d\varphi \; \hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{ds}\varphi = \mathrm{R \; dr \; d}\theta \; \hat{\varphi}$$

المان حجم: $\mathrm{dv} = R^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\varphi$

گرادیان:

گرادیان میدان اسکالر V برداری است که اندازه وجهت ماکزیمم شیب افزایش V رادرفضا نشان می دهد:

$$(G=\frac{\partial v}{\partial x}\hat{a}x+\frac{\partial v}{\partial y}\hat{a}y+\frac{\partial v}{\partial z}\hat{a}z)$$

$$\begin{cases} \text{دکارتی } V=\frac{\partial}{\partial x}ax+\frac{\partial}{\partial y}ay+\frac{\partial}{\partial z}az \\ \text{استوانه } V=\frac{\partial}{\partial \rho}a\rho+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}a\rho+\frac{\partial}{\partial z}az \\ \text{کروی } V=\frac{\partial}{\partial r}ar+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}a\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}a\varphi \end{cases}$$

خواص گرادیان:

$$\begin{cases} \nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V \\ \nabla(VU)=V\nabla U+U\nabla V \\ \nabla\left[\dfrac{V}{U}\right]=\dfrac{U\nabla V-V\nabla U}{U^2} \\ \nabla V^n=nV^{n-1}\nabla V \end{cases}$$

دیورژانس بردار $\vec{A}$:

دیورژانس $\vec{\nabla}.\vec{A}=\lim_{\Delta V}\dfrac{\int_S \vec{A}.\vec{ds}}{\Delta V}$

$$\begin{cases} \text{دکارتی}\ \nabla.A=\dfrac{\partial}{\partial x}AX+\dfrac{\partial}{\partial y}AY+\dfrac{\partial}{\partial z}AZ \\ \text{استوانه}\ \nabla.A=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho_{A\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}A\varphi+\dfrac{\partial}{\partial z}AZ \\ \text{کروی}\ \nabla.A=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left({r^2}_{Ar}\right)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta_{A\theta}\right)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}A\varphi \end{cases}$$

قضیه دیورژانس : $\int_\delta \vec{A}.\vec{ds}=\int\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)dv$

تمرین:گرادیان و دیورژانس هرقسمت رابدست آورید؟

الف) $\vec{\rho}=x^2 \mathrm{yz}\,\overrightarrow{ax}+xz\overrightarrow{az}$

گرادیان و دیورژانس: دکارتی $\nabla.A=\frac{\partial}{\partial x}ax+\frac{\partial}{\partial y}+ay\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{az}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\frac{\partial}{\partial x}(xz)=2\mathrm{xyz}+\mathrm{x}$

ب) $\vec{Q}=\rho\sin\varphi\overrightarrow{a\rho}+\rho^2z\overrightarrow{a\varphi}+z\cos\varphi\overrightarrow{az}$

دیورژانس : استوانه : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2\mathrm{z})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{z}\cos\varphi)=2\sin\varphi+\cos\varphi$

گرادیان : استوانه : $\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2\mathrm{z})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{z}\cos\varphi)=\sin\varphi+\frac{1}{r}(0)+(\cos\theta)$

ج) $\mathrm{T}=\frac{1}{r^2}\cos\theta ar+r\sin\theta\cos\varphi a\theta+\cos\theta a\varphi$

دیورژانس : کروی : $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathrm{Tr})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{T}\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{T}\varphi)$

$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\theta\cos\varphi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\theta)$

$=\theta+\frac{1}{r\sin\theta}2r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+\theta=2\cos\theta\cos\varphi$

گرادیان: $\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r^2}\cos\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\cos\varphi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\theta)$

مثال : تابع G محفوظ است شارخارج شونده ناشی از بردارG را بااستفاده از قضیه دیورژانس بدست آورید؟

$$G(r)=10e^{-2z}(\rho_{\overrightarrow{a\rho}}+\overrightarrow{az})=?$$

استوانه : $\nabla.G=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho_{G\rho})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}G\varphi+\frac{\partial}{\partial z}GZ$

$$=\frac{1}{\rho}(\rho_{10e^{-2z}})-20e^{-2z}=20e^{-2z}-20e^{-2z}=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho_{10\rho e^{-2z}})=\frac{1}{\rho}({\rho^2}_{10e^{-2z}})\frac{1}{\rho}2\rho(10e^{-2z})$$

کرل :

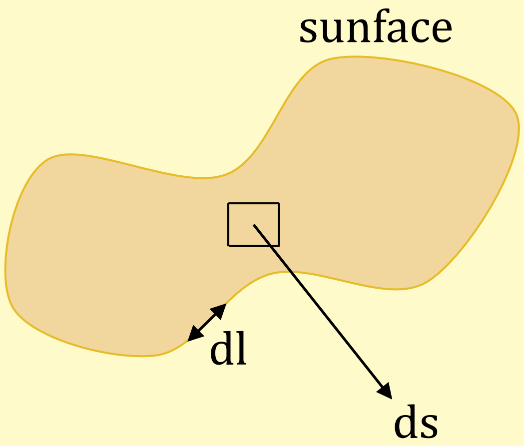
دکارتی $\nabla \times A \begin{vmatrix} \hat{a}x & \hat{a}y & \hat{a}z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & Az \end{vmatrix}$

استوانه $\nabla \times A \begin{vmatrix} \hat{a}\rho & \rho\hat{a}\varphi & \hat{a}z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ar & \rho A\rho & Az \end{vmatrix}$

کروی $\nabla \times A \begin{vmatrix} \hat{a}r & r\hat{a}\theta & r\sin\theta\,\hat{a}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \rho} \\ Ar & rA\theta & r\sin\theta\,A\varphi \end{vmatrix}$

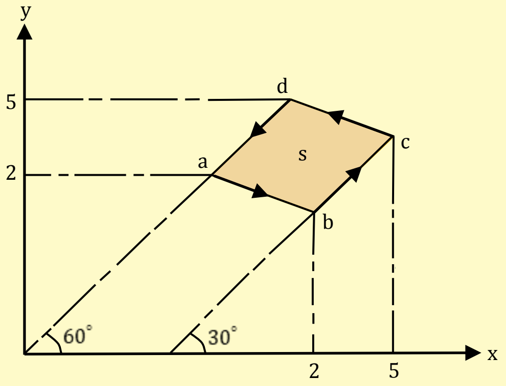
قضیه استوکس :

$$\oint A.dl = \int_s (\nabla \times A).ds$$



مثال : اگر بردار$\vec{A}$ به صورت رابطه زیرباشدمقدار انتگرال خطی$\int_l A.dl$ را بدست آورید.سپس درستی قضیه استوکس را ثابت کنید؟

$$\vec{A} = \rho\cos\varphi\,\hat{a}\rho + \sin\varphi\hat{a}\varphi$$



$$\oint_l \vec{A}.dl = \int_a^b A.dl + \int_b^c A.dl + \int_c^d A.dl + \int_d^a A.dl$$

①مسیر : $\int_a^b \Longrightarrow \int_{60}^{30} \rho \sin\varphi d\varphi \Longrightarrow 2(-\cos)_{30}^{60} = -(\sqrt{3}-1)$

②مسیر : $\int_b^c \Longrightarrow \int_2^5 \rho \cos d\rho \Longrightarrow \cos 30 (\frac{\rho^2}{2})_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

③مسیر : $\int_c^d \Longrightarrow \int_{30}^{60} \rho \sin\varphi\, d\varphi \Longrightarrow 5(-\cos\varphi)_{30}^{60} = \frac{5}{2} = (\sqrt{3}-1)$

④مسیر : $\int_d^a \Longrightarrow \int \rho \cos\varphi\, d\rho \Longrightarrow \cos 60 (\frac{\rho^2}{2})_5^2 = -\frac{21}{2}$

جمع مسیر های ① و ② و ③ و ④ : $\oint_l A.dl = 4/941$

ابتداکرل رابدست می آوریم.
انتگرال ما دوگانه می باشد.

$$\oint_l A.dl = \int_s (\nabla \times A).ds = \int_2^5 \int_{30}^{60} \frac{1}{\rho}(1+\rho)\sin\varphi \hat{a}\, z d\varphi\, d\rho$$

$$\int_{30}^{60} \sin\varphi\, d\varphi \int_2^5 \frac{1}{\rho}\,(1+\rho) d\rho\, \hat{a}z = -\cos\varphi \Big|_{30}^{60} \left(\rho \frac{\rho^2}{2}\right)_2^5 \Longrightarrow \frac{27}{4}(\sqrt{3}-1) = \frac{4}{491}$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} a\rho & \rho\hat{a}y & \hat{a}z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

لاپلاسین:

$$\nabla.\nabla V = \nabla^2 V$$

دکارتی: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

استوانه : $\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

کروی : $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$

(پایان)