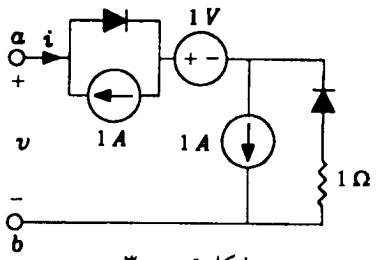
Sabrali.Rozblog.com



شکل تمرین ۳.

اگر منبع ولتاژ $v_s(t) = ۲\cos\frac{\pi t}{۲}$ را در سرهای a و b وصل کنیم، جریان $i(t)$ گذرنده از مدار را تعیین و شکل موج آن را برای یک پریود رسم کنید.

در مورد مدارهای مقاومتی که به شکل اتصال سری-موازی نیستند، تجزیه و تحلیل باز هم پیچیده‌تر است. گرچه در فصلهای ۱۰ و ۱۱ برای تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت خطی، روشهای عمومی ارائه خواهیم کرد؛ لیکن بیان روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی ساده با استفاده از روش تحلیل گره و روش تحلیل مش دراین مرحله، بسیار سودمند است.

* روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی

همان‌طوری که می‌دانیم منظور از تحلیل یک مدار به دست آوردن ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها و یا دستهٔ معینی از شاخه‌ها است. اساس کلیهٔ روشهای تحلیل مدار اعمال مناسب قوانین KCL و KVL و نوشتن درست معادلات شاخه‌ها می‌باشد. یعنی نقطهٔ شروع هر روش تحلیل مدار نوشتن تمام معادلات KCL و KVL و همچنین تمام معادلات شاخه‌ها است. اختلاف اصلی میان روشهای مختلف تحلیل مدار در تعداد و نوع متغیرهایی است که نهایتاً به عنوان متغیرهای مدار در نظر گرفته شده و بقیهٔ متغیرهای باقیمانده حذف می‌شوند. در میان روشهای کلی تحلیل مدار می‌توان از دو روش مهم **تحلیل گره** و **تحلیل مش** نام برد. چون اعمال این روشها در مدارهای مقاومتی خطی به معادلات جبری خطی منجر می‌شوند که به سادگی با روش کرامر حل می‌شوند، از این‌رو بهتر است هرچه زودتر با این روشها و کاربرد آنها در تحلیل مدارهای مقاومتی آشنا شویم و تجربیات مفیدی در به کارگیری آنها در حل انواع مدارهای متفاوت کسب کنیم و سپس آنها را به راحتی به مدارهای مرتبهٔ بالاتر که شامل سلف‌ها و خازن‌ها بوده و به معادلات دیفرانسیل منجر می‌شوند، اعمال کنیم.

*-۱ روش تحلیل گره

همان طوری‌که از نام روش تحلیل گره برمی‌آید، دراین روش متغیرهای مورد نظر **ولتاژ گره‌ها** هستند و چون ولتاژ گره‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شوند بنابراین ابتدا گرهی را به عنوان **گره مبنا** با ولتاژ دلخواه انتخاب می‌کنیم. سپس با به کارگیری روش تحلیل گره، ولتاژ گره‌های دیگر را نسبت به این گره مبنا به دست

Sabrali.Rozblog.com

می‌آوریم. بنابراین تعداد متغیرهای انتخاب شده برابر تعداد گره‌ها منهای یک خواهد بود. از آنجایی که انتخاب ولتاژ گره مبنا دلخواه است، معمول براین است که برای راحتی کار ولتاژ گره مبنا را صفر انتخاب کنیم. معمولاً گره‌ای را که تعداد بیشتری شاخه یا منبع ولتاژ به آن وصل شده است به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. گره مبنا را با علامت زمین، یعنی به‌صورت ⏚ ، مشخص می‌کنیم. بدیهی است چون ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است، پس با معلوم بودن ولتاژ گره‌ها، ولتاژ تمام شاخه‌ها به دست می‌آیند. چون مدار را مقاومتی فرض کردیم بنابراین با معلوم بودن ولتاژ هر شاخه جریان آن شاخه نیز به راحتی به دست می‌آید.

از آن‌جاکه اساس روش تحلیل گره نوشتن معادلات KCL در تمام گره‌ها به استثنای گره مبنا است، پس ابتدا باید تمام منابع ولتاژ سری با مقاومتها را به منابع جریان موازی با آنها تبدیل کرد. همچنین چون جهت واقعی جریان در شاخه‌ها را نمی‌دانیم هنگام نوشتن معادلات KCL جهت تمام شاخه‌ها را جهت‌های خارج شونده از گره در نظر می‌گیریم.

با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان مراحل مختلف روش تحلیل گره را به شرح زیر بیان نمود:

۱- ابتدا گره‌ای را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده و ولتاژ آن را صفر درنظر بگیرید.

۲- همه گره‌های مدار را شماره گذاری کنید و گره مبنا را با شمارهٔ صفر نشان دهید.

۳- ولتاژ گره‌ها را نسبت به گره مبنا به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.

۴- قانون KCL را در تمام گره‌های مدار به‌جز گره مبنا بنویسید (معادلات گره) و سعی کنید معادلات حاصل منحصراً برحسب ولتاژ گره‌ها نوشته شوند. یعنی متغیرهای دیگر را برحسب ولتاژ گره‌های انتخاب شده بیان کنید.

۵- منابع وابسته را از هر نوع که باشند مانند منابع نابسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KCL به گره‌ها، سعی کنید فقط متغیرهای ولتاژ گره‌ها در معادلات ظاهر شوند.

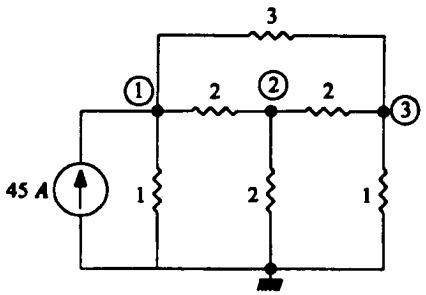
۶- در حالت کلی، اعمال مراحل فوق به هر مدار مقاومتی به n معادلهٔ n مجهولی برحسب متغیرهای ولتاژ گره منجر می‌شود (n تعداد گره‌ها به استثنای گره مبنا است). این معادلات را با روش کرامر یا هر روش دیگری که راحت‌تر باشد، حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید.

۷- ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است و جریان هر شاخه با استفاده از رابطهٔ اساسی آن شاخه، که دراین فصل تمام شاخه‌ها را مقاومتی فرض می‌کنیم، به دست می‌آید.

مثال ۱ مدار شکل (*۱-۱) را با روش تحلیل گره تحلیل کنید و ولتاژ گره‌های آن را به دست آورید. مقادیر رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.

مدار دارای چهار گره است. یکی از آنها را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم و ولتاژ آن را برای راحتی صفر در نظر می‌گیریم. گره‌های دیگر مدار را با شماره‌های ① ، ② و ③ مشخص می‌کنیم و ولتاژ آنها را به

Sabrali.Rozblog.com



شکل ۱-*۱ مثال ۱.

ترتیب با e_1 ، e_2 و e_3 نشان می‌دهیم. با اعمال KCL در سه گره ① ، ② و ③ به دست می‌آوریم:

$$e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - e_3) = 45 \qquad (1-*)$$

$$2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 2(e_2 - e_3) = 0 \qquad (2-*)$$

$$3(e_3 - e_1) + 2(e_3 - e_2) + e_3 = 0 \qquad (3-*)$$

توجه کنید که اگر سه معادلهٔ فوق را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$e_1 + 2e_2 + e_3 = 45 \qquad (4-*)$$

معادلهٔ (۴-*) نشانگر اعمال KCL در گره مبنا است. یعنی اعمال KCL در گره مبنا معادلهٔ مستقلی از نوشتن KCL در گره‌های دیگر به دست نمی‌دهد و بدین دلیل است که در تحلیل گره ما KCL را در همهٔ گره‌های مدار به استثنای گره مبنا می‌نویسیم.

معادلات (۱-*)، (۲-*) و (۳-*) پس از ساده کردن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$6e_1 - 2e_2 - 3e_3 = 45 \qquad (5-*)$$

$$-2e_1 + 6e_2 - 2e_3 = 0 \qquad (6-*)$$

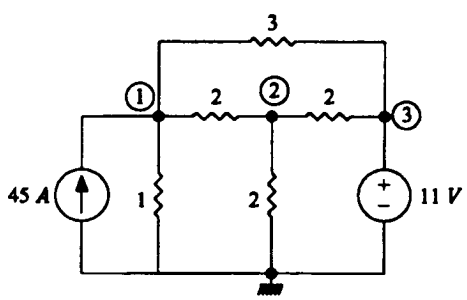
$$-3e_1 - 2e_2 + 6e_3 = 0 \qquad (7-*)$$

از حل دستگاه معادلات فوق با روش کرامر یا هر روش دیگر به دست می‌آوریم:

$e_1 = 16$ ولت , $e_2 = 9$ ولت , $e_3 = 11$ ولت

بدیهی است با دانستن ولتاژ گره‌ها می‌توان ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها را تعیین کرد.

مثال ۲ فرض کنید در مدار شکل (۱-*) مقاومت یک اهمی وصل شده به گره ③ را با منبع ولتاژ ۱۱ ولتی مطابق شکل (۲-*) تعویض کنیم. بار دیگر مدار را تحلیل کرده و ولتاژ گره‌ها را بدست آورید.



شکل ۲-*۱ مثال ۲.

گرچه مدار دارای سه گره و یک گره مبنا است، لیکن ولتاژ گره ③ دیگر مجهول نبوده و برابر ۱۱ ولت است. در حقیقت با انتخاب دو متغیر مجهول e_1 و e_2 و اعمال KCL فقط در گره‌های ① و ② به دست می‌آوریم:

Sabrali.Rozblog.com

$$۶e_۱ - ۲e_۲ = ۷۸ \qquad (۸-*)$$

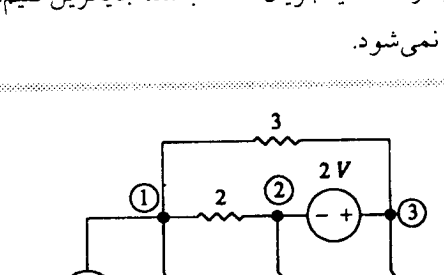
$$-۲e_۱ + ۶e_۲ = ۲۲ \qquad (۹-*)$$

از حل این دو معادله، مقادیر ولتاژهای گره‌ها را به‌صورت $e_۱ = ۱۶$ ولت و $e_۲ = ۹$ ولت، به‌دست می‌آوریم.

تبصرهٔ ۱ گرچه ولتاژ گره ③ مجهول نبود، ولی اعمال KCL به این گره مستلزم معرفی یک متغیر جدید I_E به نام جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۱۱ ولتی است. بنابراین نوشتن KCL در گره‌ای که منبع ولتاژی به آن وصل است، متغیر جدیدی را وارد معادلات می‌کند که اثر نوشتن یک معادلهٔ اضافی را از میان می‌برد. در نتیجه، در هنگام به کار بردن روش تحلیل گره اعمال KCL در گره‌هایی که منابع ولتاژ به آنها وصل است، چندان مؤثر نخواهد بود.

تبصرهٔ ۲ در مثال ۱ چنین به دست می‌آوریم که $e_۳ = ۱۱$ ولت، یعنی ولتاژ شاخهٔ یک اهمی برابر ۱۱ ولت است. ما این شاخه را با منبع ولتاژی جایگزین کردیم که ولتاژ آن دقیقاً برابر ولتاژ همین شاخه بود و به طوری که ملاحظه کردیم ولتاژ گره‌های دیگر همان مقادیر قبلی به دست آمد و هیچ تغییری در ولتاژ گره‌های مدار به وجود نیامد. در حقیقت این مطلب بیانگر یک قضیهٔ مهم مدار به نام **قضیهٔ جانشینی** است که در فصل ۱۶ بیان و اثبات خواهد شد. مفهوم اصلی این قضیه آن است که اگر پس از تحلیل یک مدار، هر شاخهٔ آن را با یک منبع ولتاژ یا منبع جریان نابسته که مقادیر آنها به ترتیب برابر ولتاژ شاخه یا جریان شاخه باشد، جایگزین کنیم، هیچ‌گونه تغییری در مقادیر ولتاژ و جریان شاخه‌ها حاصل نمی‌شود.

مثال ۳ همان مدار مثال ۱ را باردیگر در نظر بگیرید و مقاومت $\frac{۱}{۲}$ اهمی وصل شده میان گره‌های ② و ③ را با منبع ولتاژ نابستهٔ ۲ ولتی مطابق شکل (*-۱-۳) جایگزین کنید. ولتاژ گره‌های این مدار را به دست آورید.



شکل *-۱-۳ مثال ۳.

البته چون ولتاژ شاخهٔ وصل شده میان گره‌های ② و ③ در مثال ۱ برابر ۲ ولت بود، مطابق قضیهٔ جانشینی انتظار داریم ولتاژ گره‌های مدار تغییر نکرده، همان مقادیر به دست آیند. اکنون این مدار را با روش تحلیل گره حل می‌کنیم و نتایج مورد انتظار را به دست می‌آوریم.

در این مدار سه ولتاژ گره مجهول داریم؛ لیکن میان $e_۲$ و $e_۳$ رابطهٔ $e_۳ - e_۲ = ۲$ برقرار است. با توجه به تبصرهٔ ۱ مثال ۲، اعمال KCL به تنهایی در گره ② یا گره ③ چندان سودمند نخواهد بود؛ زیرا جریان گذرنده از منبع ۲ ولتی به عنوان یک متغیر اضافی در معادلات ظاهر خواهد شد. لیکن با اعمال KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های ② و ③ که شاخهٔ منبع ولتاژ در درون آن قرار می‌گیرد، نیازی در به کارگیری جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۲ ولتی نخواهد بود. بنابراین، با نوشتن KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های

Sabrali.Rozblog.com

② و ③ به دست می‌آوریم:

$$۲(e_۲ - e_۱) + ۲e_۲ + ۳(e_۳ - e_۱) + e_۳ = ۰$$

که پس از ساده کردن به صورت $-۵e_۱ + ۴e_۲ + ۴e_۳ = ۰$ درمی‌آید. با توجه به اینکه KCL در گره ① تغییر نکرده است، پس سه معادلهٔ سه مجهولی برحسب ولتاژهای گره $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$۶e_۱ - ۲e_۲ - ۳e_۳ = ۴۵$$

$$-۵e_۱ + ۴e_۲ + ۴e_۳ = ۰$$

$$e_۳ - e_۲ = ۲$$

از حل این سه معادله ولتاژهای گره $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ به ترتیب $e_۱ = ۱۶\,V$، $e_۲ = ۹\,V$ و $e_۳ = ۱۱\,V$ به دست می‌آیند، که همان مقادیر به دست آمده در مثال ۱ است.

تبصرهٔ ۱ در اعمال روش تحلیل گره اگر منبع ولتاژی به دو گره زمین نشده، وصل شده باشد؛ راحت‌تر است که KCL را در گره مرکب متشکل از این دو گره بنویسیم تا نیازی به معرفی متغیر اضافی دیگری به عنوان جریان منبع ولتاژ نباشد.

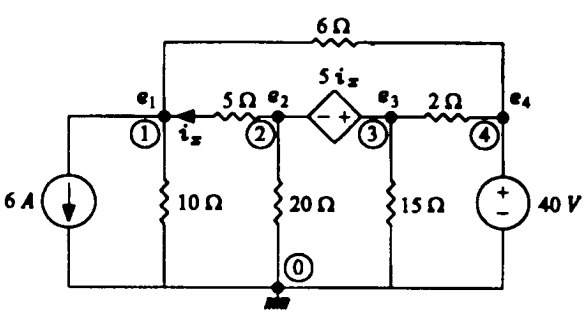
تبصرهٔ ۲ در اعمال روش تحلیل گره تفاوت چندانی میان منابع وابسته و منابع نابسته وجود ندارد. می‌توان مراحل گفته شده در روش تحلیل گره را عیناً در مورد آنها نیز اجرا کرد و هرجا که لازم باشد به جای متغیر کنترل کنندهٔ منبع وابسته، مقدار آن را برحسب ولتاژهای گره‌ها قرار داد و نهایتاً معادلات گره را به دست آورد.

مثال ٤ مدار داده شده در شکل (۱۰-۴) را با روش تحلیل گره حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید.

این مدار دارای چهار گره و یک گره مبنا است و چون منبع ولتاژ ۴۰ ولتی به گره ④ وصل شده است پس $e_۴ = ۴۰$. همچنین چون میان گره‌های ② و ③ منبع ولتاژ وابستهٔ $۵i_x$ وصل شده است پس داریم:

$$e_۳ - e_۲ = ۵i_x = ۵\frac{(e_۲ - e_۱)}{۵} = e_۲ - e_۱$$

که در این‌جا، به جای جریان کنترل کنندهٔ i_x مقدار آن را برحسب ولتاژ گره‌ها یعنی $\frac{e_۲ - e_۱}{۵}$ قرار دادیم. با ساده کردن معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم $e_۳ = ۲e_۲ - e_۱$. یعنی ولتاژ $e_۳$ را می‌توان برحسب ولتاژ گره‌های $e_۱$ و $e_۲$ نوشت و درحقیقت دو متغیر مجهول $e_۱$ و $e_۲$ داریم. با نوشتن



شکل ۱۰-۴ مثال ۴.

Sabrali.Rozblog.com

KCL در گره ① و گره مرکب متشکل از گره‌های ② و ③ به دست می‌آوریم:

$$\frac{e_1}{10} + \frac{1}{5}(e_1 - e_2) + \frac{1}{6}(e_1 - 40) = -6$$

$$\frac{1}{5}(e_2 - e_1) + \frac{1}{20}e_2 + \frac{1}{15}(2e_2 - e_1) + \frac{1}{3}(2e_2 - e_1 - 40) = 0$$

این معادلات پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آیند:

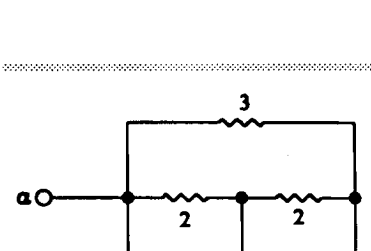
$$\frac{7}{15}e_1 - \frac{1}{5}e_2 = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{23}{30}e_1 + \frac{83}{60}e_2 = 20$$

از حل این دو معادله برحسب e_1 و e_2 به دست می‌آوریم: $e_1 = 10\,V$ و $e_2 = 20\,V$. با در نظر گرفتن $e_3 = 2e_2 - e_1$ داریم: $e_3 = 30\,V$.

تمرین ۱ منبع ولتاژ کنترل شده با جریان i_x را با منبع جریان نابستهٔ ۳ آمپری با جهت از راست به چپ جایگزین کرده، بار دیگر مسأله را حل کنید. آیا می‌توانید با استفاده از قضیهٔ جانشینی راه ساده‌تری برای حل این مسأله پیشنهاد کنید؟ (جواب: ۳ آمپر)

مثال ۵ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (*۱-۵) را تعیین کنید. رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.



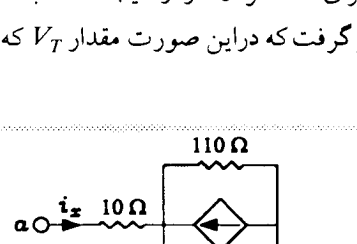
شکل *۱-۵ مثال ۵.

می‌توان منبع جریان آزمایشی دلخواه I_T را در سرهای a و b وصل کرد و ولتاژ V_T میان این دوسر را محاسبه نمود. مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b از رابطهٔ:

$$R_{in} = \frac{V_T}{I_T}$$

به دست خواهد آمد. از آنجایی که مقدار I_T دلخواه است، می‌توان برای ساده کردن کار از نتیجهٔ محاسبات مثالهای قبلی استفاده کرد و مانند مثال ۱ مقدار I_T را برابر ۴۵ در نظر گرفت که دراین صورت مقدار V_T که همان e_1 است برابر ۱۶ ولت خواهد بود؛ پس $R_{in} = \frac{16}{45}\,\Omega$.

تمرین ۲ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (*۱-۶) را به دست آورید. (جواب: ۲۰ اهم)



شکل *۱-۶