Sabrali.Rozblog.com

۳-۲ روش تحلیل مش

مش ساده‌ترین حلقه‌ای است که شاخه‌ای در درون آن نباشد. از این‌رو مش فقط در مدارهایی تعریف می‌شود که به آنها مدارهای مسطح گویند. یعنی مدارهایی که بتوان شکل آنها را روی یک صفحهٔ کاغذ چنان رسم کرد که هیچ دو شاخه‌ای همدیگر را به‌جز در گره‌ها قطع نکنند. با این تعریف مش، روشن است که هر شاخهٔ یک مدار یا در یک مش تنها قرار می‌گیرد (شاخه‌های بیرونی) و یا در دو مش مشترک است (شاخه‌های درونی). در روش تحلیل مش متغیرهای مورد نظر را جریانهای فرضی در نظر می‌گیرند که در مش‌ها در گردش هستند و از این‌رو اگر شاخه‌ای در دو مش مشترک باشد جریان هر دو مش از آن شاخه می‌گذرد. انتخاب جهتی برای نشان دادن جریان فرضی یک مش اختیاری است، ولی معمول بر آن است که جهت همهٔ مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیرند. بنابراین اگر جهت همهٔ مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم، جریان گذرنده از شاخه‌های مشترک میان دو مش برابر تفاضل جریان آن دو مش خواهد بود. در فصل ۱۰ نشان داده خواهد شد که تعداد مش‌های یک مدار، برابر تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به علاوه یک، یعنی $l = b - n_t + ۱$ است، که در آن b تعداد شاخه‌ها، n_t تعداد گره‌ها و l تعداد مش‌ها است. همان‌طوری که از قبل می‌دانیم l در واقع همان تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه، در یک مدار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جریانهای مش‌ها، متغیرهای مستقل از هم می‌باشند. اساس روش تحلیل مش، نوشتن معادلات KVL در تمام مش‌ها است که از حل این معادلات جریانهای مش‌ها به دست می‌آیند. با معلوم بودن جریان مش‌ها، می‌توان جریان شاخه‌ها و در نتیجه ولتاژ شاخه‌ها را به دست آورد. بنابراین مراحل مختلف روش تحلیل مش را می‌توان به شرح زیر توصیف نمود:

۱ـ ابتدا منابع جریان موازی با مقاومتها را به منابع ولتاژ سری با آنها تبدیل کنید.

۲ـ مش‌ها را شماره‌گذاری کرده و جریانهای آنها را در جهت عقربه‌های ساعت به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.

۳ـ جریان شاخه‌ای که فقط در یک مش قرار دارد برابر جریان آن مش و جریان شاخه‌ای که در دو مش مشترک است برابر تفاضل جریانهای آن دو مش است.

۴ـ قانون KVL را در کلیهٔ مش‌های مدار بنویسید و سعی کنید معادلات حاصل، منحصراً برحسب جریان مش‌ها نوشته شوند؛ یعنی متغیرهای دیگر را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.

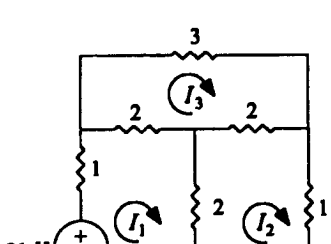
۵ـ منابع وابسته را مانند منابع نابسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KVL در مش‌ها سعی کنید کلیهٔ متغیرها را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.

۶ـ در حالت کلی، اعمال مراحل فوق در هر مدار مقاومتی به یک دستگاه l معادلهٔ l مجهولی برحسب جریانهای مش‌ها منجر می‌شود که از حل این معادلات جریان مش‌ها به دست می‌آیند.

۷ـ جریان شاخه‌ها از روی جریان مش‌ها و ولتاژ شاخه‌ها از روی جریان شاخه‌ها به دست می‌آیند.

Sabrali.Rozblog.com

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکل (*۲-۱) را با روش تحلیل مش تحلیل کنید و جریانهای مش‌ها را به دست آورید. مقادیر مقاومتها برحسب اهم داده شده‌اند.



شکل *۲-۱ مثال ۱.

ابتدا جریانهای مش‌ها را به صورت I_1، I_2 و I_3 در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب کنید. دراین مدار شش مقاومت وجود دارد. سه تا از این مقاومتها شاخه‌های بیرونی بوده و فقط در یک مش قرار دارند و سه تای دیگر مقاومتها شاخه‌های درونی بوده و در دو مش مشترک هستند. اعمال KVL دراین مش‌ها معادلات زیر را به دست می‌دهد:

$$I_1 + ۲(I_1 - I_3) + ۲(I_1 - I_2) = ۹۱$$

$$۲(I_2 - I_1) + ۲(I_2 - I_3) + I_2 = ۰$$

$$۳I_3 + ۲(I_3 - I_2) + ۲(I_3 - I_1) = ۰$$

پس از ساده کردن، سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$۵I_1 - ۲I_2 - ۲I_3 = ۹۱$$

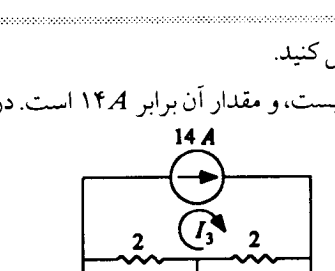
$$-۲I_1 + ۵I_2 - ۲I_3 = ۰$$

$$-۲I_1 - ۲I_2 + ۷I_3 = ۰$$

از حل این معادلات داریم: $I_1 = ۳۱\,A$ ، $I_2 = ۱۸\,A$ و $I_3 = ۱۴\,A$. با معلوم بودن جریان مش‌ها، جریان شاخه‌ها و ولتاژ شاخه‌ها به راحتی به دست می‌آیند.

مثال ۲ مدار نشان داده شده در شکل (*۲-۲) را با روش مش تحلیل کنید.

گرچه مدار دارای سه مش است، لیکن جریان مش ۳ مجهول نیست، و مقدار آن برابر $۱۴A$ است. در حقیقت دو مجهول I_1 و I_2 داریم که با نوشتن KVL در مش‌های ۱ و ۲ دو معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم:



شکل *۲-۲ مثال ۲.

$$I_1 + ۲(I_1 - ۱۴) + ۲(I_1 - I_2) = ۹۱$$

$$۲(I_2 - I_1) + ۲(I_2 - ۱۴) + I_2 = ۰$$

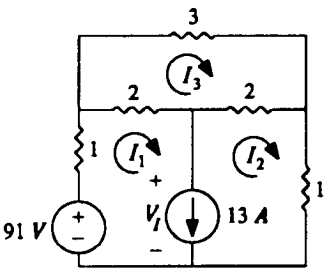
از حل این دو معادله مقادیر جریانهای مش‌ها به صورت $I_1 = ۳۱\,A$ و $I_2 = ۱۸\,A$ به دست می‌آیند.

تبصرهٔ ۱ گرچه جریان مش ۳ مجهول نیست، لیکن اعمال KVL دراین مش مستلزم به کار بردن متغیر مجهول V_I نشان دهندهٔ ولتاژ دوسر این منبع جریان است. بنابراین نوشتن KVL در مش ۳ که متغیر اضافی V_I را معرفی می‌کند، کمک چندانی در حل این مدار نمی‌کند.

Sabrali.Rozblog.com

تبصرهٔ ۲ جریان گذرنده از منبع جریان همان جریان مش ۳ در مثال ۱، در نظر گرفته شده است تا یک‌بار دیگر کاربرد قضیهٔ جانشینی مورد توجه قرار گیرد.

مثال ۳ مدار نشان داده شده در شکل (۲-۳*) را با روش مش تحلیل کنید.



شکل ۲-۳* مثال ۳.

توجه کنید شاخه‌ای که شامل منبع جریان ۱۳ آمپری است در دو مش مشترک است و بنابراین رابطهٔ $I_1 - I_2 = 13$ برقرار است. ولتاژ دوسر منبع جریان را با V_I نشان دهید. اعمال KVL در مش‌های ۱ و ۲ معادلات زیر را به دست می‌دهد:

$$I_1 + 2(I_1 - I_3) + V_I = 91$$

$$2(I_2 - I_3) + I_2 - V_I = 0$$

متغیر V_I در معادلهٔ اول با علامت + و در معادلهٔ دوم با علامت − ظاهر می‌شود. اگر این دو معادله را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$I_1 + 2(I_1 - I_3) + 2(I_2 - I_3) + I_2 = 91 \quad \Rightarrow \quad 3I_1 + 3I_2 - 4I_3 = 91$$

این معادله نشان دهندهٔ معادلهٔ KVL در حلقهٔ مرکب متشکل از مش‌های ۱ و ۲ می‌باشد (مش حالت خاصی از حلقه است). بنابراین می‌توانستیم از اول معادلهٔ KVL را دراین حلقه بنویسیم که هیچ متغیر اضافی در آن ظاهر نمی‌شد. مش ۳ هیچ تغییری نکرده و معادلهٔ KVL درآن، همان معادلهٔ نوشته شده در مثال ۱ است. از این‌رو سه معادلهٔ به دست آمده برحسب جریانهای مش این مدار به صورت زیر است:

$$3I_1 + 3I_2 - 4I_3 = 91$$

$$I_1 - I_2 = 13$$

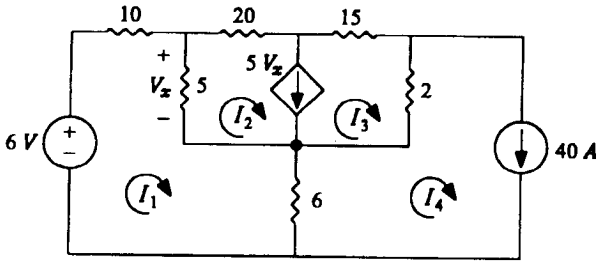
$$-2I_1 - 2I_2 + 7I_3 = 0$$

از حل این معادلات به دست می‌آوریم: $I_1 = 31A$ ، $I_2 = 18A$ و $I_3 = 14A$.

تبصره در اعمال روش تحلیل مش، اگر شاخه‌ای تنها از یک منبع جریان تشکیل شود و این شاخه فقط در یک مش قرار داشته باشد، جریان آن مش معلوم است و نیازی به نوشتن KVL در آن مش نمی‌باشد. لیکن اگر این منبع در دو مش مشترک باشد تفاضل جریان آن دو مش معلوم است و به جای نوشتن KVL در هر یک از آن دو مش، راحت‌تر است که KVL را در حلقهٔ متشکل از آن دو مش بنویسیم.

مثال ٤ مدار نشان داده شده در شکل (۲-۴*) را با روش مش تحلیل کنید. مقادیر رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.

Sabrali.Rozblog.com



شکل *۲-۴ مثال ۴.

این مدار چهار مش دارد که جریان مش چهارم آن معلوم است، یعنی $I_۴ = ۴۰$. همچنین تفاضل جریانهای مش‌های دوم و سوم برحسب V_x بیان می‌شود که خود V_x برحسب تفاضل جریانهای $I_۱$ و $I_۲$ قابل بیان است، یعنی:

$$I_۲ - I_۳ = ۵V_x = ۵\left(\frac{۱}{۵}(I_۱ - I_۲)\right) = I_۱ - I_۲$$

بنابراین $I_۳$ را می‌توان برحسب $I_۱$ و $I_۲$ بیان کرد. یعنی: $I_۳ = ۲I_۲ - I_۱$

برای حل این مدار به دو معادله نیاز داریم که می‌توان با نوشتن KVL در مش ۱ و مش مرکب متشکل از مش‌های ۲ و ۳ آنها را به دست آورد. یعنی:

$$-۶ + \frac{۱}{۱۰}I_۱ + \frac{۱}{۵}(I_۱ - I_۲) + \frac{۱}{۶}(I_۱ - ۴۰) = ۰$$

$$\frac{۱}{۲۰}I_۲ + \frac{۱}{۱۵}(۲I_۲ - I_۱) + \frac{۱}{۲}(۲I_۲ - I_۱ - ۴۰) + \frac{۱}{۵}(I_۲ - I_۱) = ۰$$

با ساده کردن این معادلات به دست می‌آوریم:

$$\frac{۷}{۱۵}I_۱ - \frac{۱}{۵}I_۲ = \frac{۲}{۳}$$

$$-\frac{۲۳}{۳۰}I_۱ + \frac{۸۳}{۶۰}I_۲ = ۲۰$$

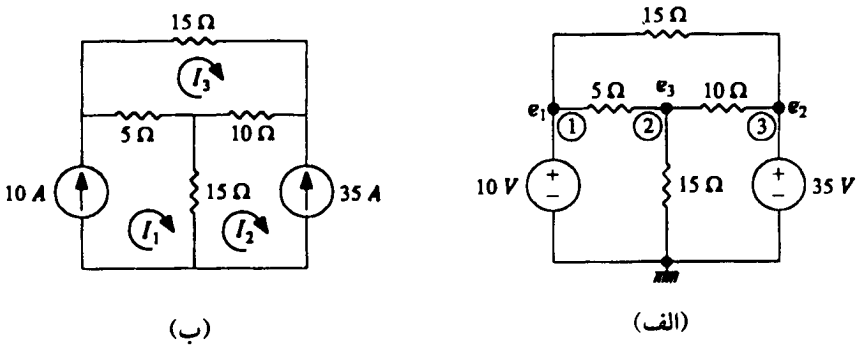
از حل این دو معادله به دست می‌آوریم: $I_۱ = ۱۰A$ و $I_۲ = ۲۰A$ و بنابراین $I_۳ = ۲I_۲ - I_۱ = ۳۰A$ و $I_۴ = ۴۰A$.

*-۳ انتخاب روش تحلیل مناسب

سوال مهمی که اغلب مطرح می‌شود این است که برای تحلیل یک مدار داده شده کدام یک از دو روش تحلیل گره یا روش تحلیل مش مناسب‌تر است. بدیهی است روش تحلیل مناسب بستگی به شکل مدار و منابع موجود در آن دارد. به‌طور کلی برای تحلیل یک مدار داده شده **روشی مناسب است که به معادلاتی با تعداد متغیرهای کمتر منجر شود.** بنابراین قبل از آنکه روش تحلیل را انتخاب کنید به دقت به شکل مدار داده شده توجه کنید و مشخص کنید که با انتخاب روشهای تحلیل گره و مش چند متغیر مجهول در نظر گرفته می‌شود. روشی را انتخاب کنید که به تعداد متغیرهای مجهول کمتر منجر شود.

Sabrali.Rozblog.com

مثال مدارهای داده شده در شکلهای (*۳-۱ الف و ب) را با روش مناسب تحلیل کنید.



شکل *۳-۱ مثال.

مدار شکل (الف) دارای سه گره و یک گره مبنا است و ولتاژ دو گره آن معلوم هستند، یعنی $e_1 = ۱۰\,V$ و $e_2 = ۳۵\,V$. پس این مدار یک متغیر مجهول e_3 دارد که با نوشتن KCL در گره ③ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$\frac{e_3 - ۱۰}{۵} + \frac{e_3}{۱۵} + \frac{e_3 - ۳۵}{۱۰} = ۰$$

از حل این معادله به دست می‌آوریم: $e_3 = ۱۵\,V$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (الف) را با روش تحلیل مش حل کنیم، سه متغیر مجهول جریان مش باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌آوردیم. بنابراین برای مدار شکل (الف) روش تحلیل گره مناسب‌تر است.

در مدار شکل (ب) سه مش داریم که جریان دوتا از آنها معلوم است، یعنی $I_1 = ۱۰\,A$ و $I_2 = -۳۵A$. پس این مدار یک متغیر مجهول I_3 دارد که با نوشتن KVL در مش ۳ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$۱۵I_3 + ۱۰(I_3 + ۳۵) + ۵(I_3 - ۱۰) = ۰$$

که از آن به دست می‌آوریم: $I_3 = -۱۰\,A$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (ب) را با روش تحلیل گره حل کنیم، سه متغیر مجهول ولتاژ گره باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌آوریم. بنابراین برای مدار شکل (ب) روش تحلیل مش مناسب‌تر است.

*۴-۴ تقسیم کنندهٔ ولتاژ و تقسیم کنندهٔ جریان

مدار سادهٔ نشان داده شده در شکل (*۴-۱) را در نظر بگیرید که در آن ولتاژ E میان دو مقاومت R_1 و R_2

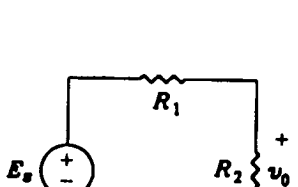
Sabrali.Rozblog.com

تقسیم می‌شود. این مدار را **تقسیم کنندهٔ ولتاژ** گویند. واضح است که اگر بخواهیم ولتاژ خروجی v_o را در دوسر مقاومت R_2 حساب کنیم، به راحتی از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

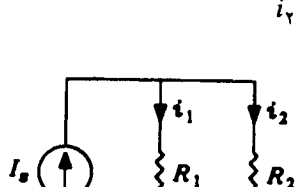
$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_s$$

اکنون مدار نشان داده شده در شکل (۴۰-۲) را در نظر بگیرید که در آن جریان I_s میان دو مقاومت R_1 و R_2 تقسیم می‌شود. این مدار را **تقسیم کنندهٔ جریان** گویند. واضح است که اگر بخواهیم جریان i_2 گذرنده از مقاومت R_2 را حساب کنیم، به راحتی از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$



شکل ۴۰-۱

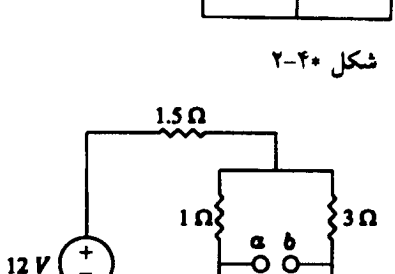


شکل ۴۰-۲

تمرین در مدار مقاومتی داده شده در شکل (۴۰-۳)

الف ـ با استفاده از ایدهٔ تقسیم کنندهٔ ولتاژ، ولتاژ دوسر a و b یعنی v_{ab} را تعیین کنید.

ب ـ اکنون شاخهٔ ab را اتصال کوتاه کنید. با استفاده از ایدهٔ تقسیم‌کنندهٔ جریان، جریان گذرنده از شاخهٔ اتصال کوتاه را تعیین کنید.



شکل ۴۰-۳

۵-۴ مشخص‌سازی یک مدار خطی در دوسر آن

گاهی اوقات ما فقط به رفتار یک مدار خطی در دوسر دلخواه آن علاقه‌مندیم. این مدار خطی ممکن است از ترکیب هر تعداد مقاومت خطی، منابع وابسته و منابع نابسته تشکیل شده باشد، اما تنها رفتار این مدار در سرهای مشخص شدهٔ آن مورد توجه می‌باشد. در چنین مواردی این مدار را می‌توان به صورت اتصال سری یک منبع ولتاژ با یک مقاومت (**مدار معادل تونن**) و یا اتصال موازی یک منبع جریان با یک مقاومت (**مدار معادل نرتن**) نمایش داد. گرچه قضایا و مفاهیم مربوط به مدارهای معادل تونن و نرتن در فصل ۱۶ به تفصیل ارائه خواهد شد، لیکن نظر به اهمیت، سادگی و گسترهٔ کاربردهای این قضیه و اعمال راحت آنها در مدارهای مقاومتی، مناسب دیدیم که موضوع مدارهای معادل تونن و نرتن را در قالب مدارهای مقاومتی، هر چه