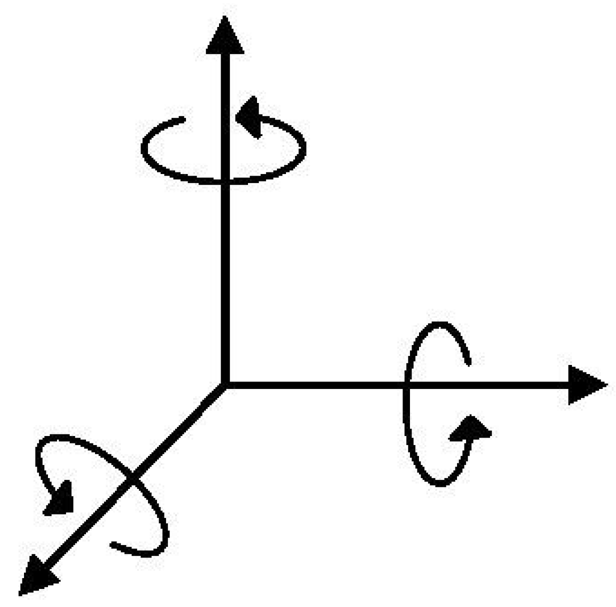
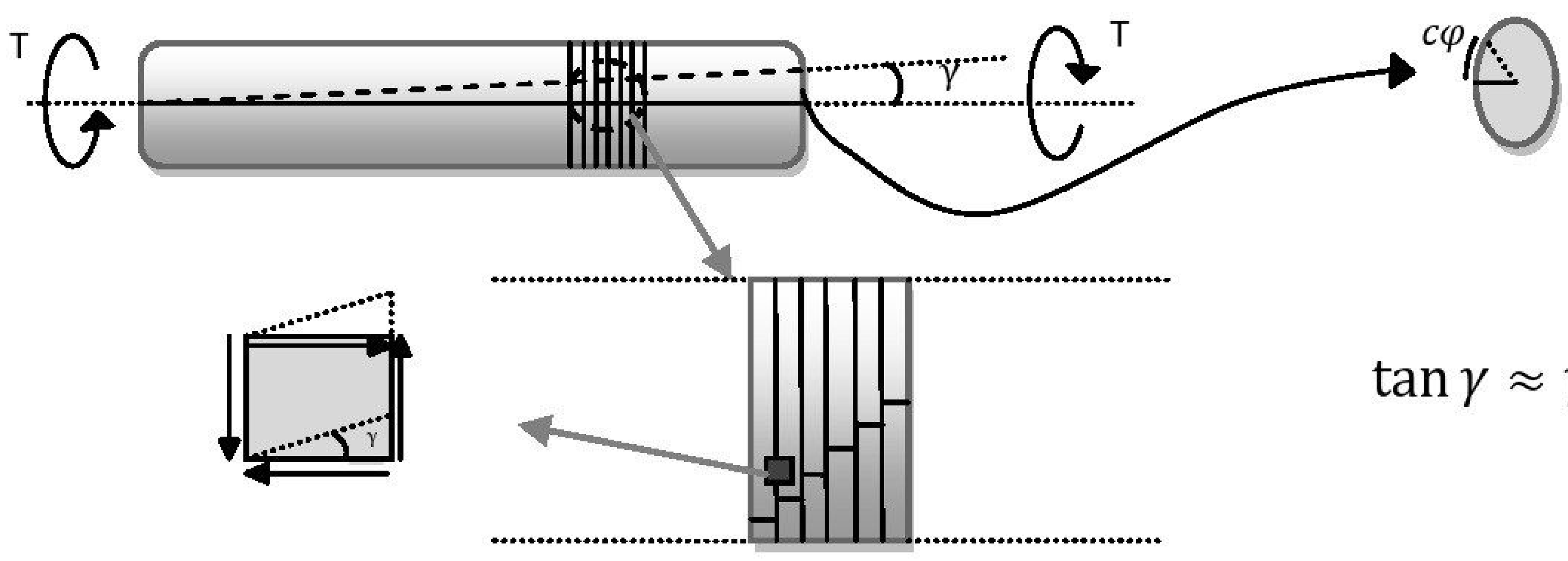
پیچش:

چنانچه میله‌ای در راستای محور x داشته باشیم، گشتاور حول محورهای y و z باعث خمیدگی و گشتاور حول محور x باعث **پیچش** می‌شود.



در پدیده‌ی پیچش طول‌ها و سطح مقطع‌ها تغییری <u>نمی‌کنند</u>، هر سطح نسبت به سطح مجاور می‌چرخد.



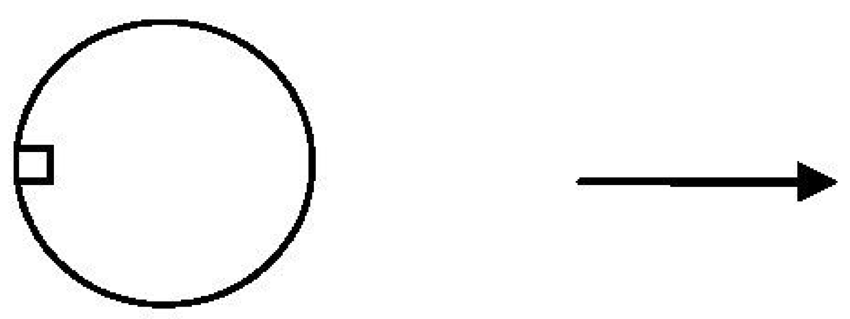
$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{c\varphi}{l}$$

زاویه دوران سطوح انتخابی نسبت به هم

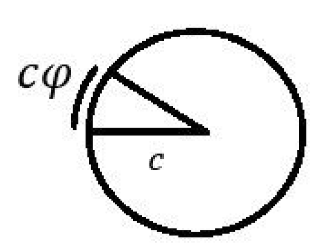
فاصله سطوح انتخابی

در المان مورد نظر تغییر زاویه مشاهده می‌شود پس کرنش برشی داریم که نشان از تنش برشی است.

هر المان دیگری را در نظر بگیریم به این میزان دوران دارد :

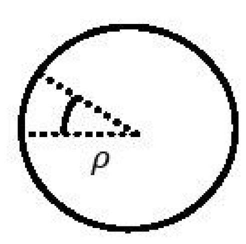


۱. برای حالتی که المان روی سطح قرار دارد



$$\gamma = \frac{c\varphi}{l}$$

۲. برای حالتی که المان به مرکز نزدیک‌تر باشد

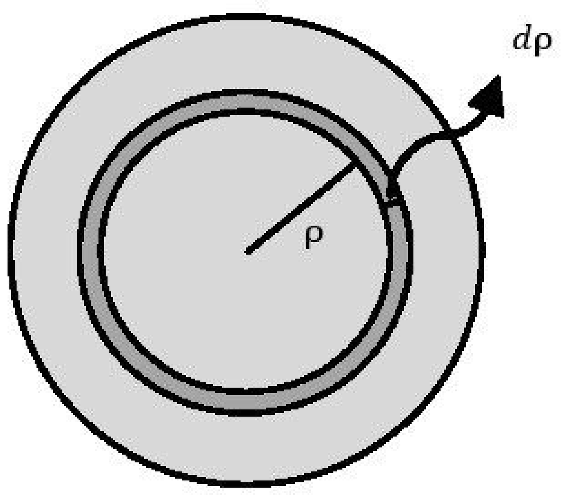


$$\gamma = \frac{\rho\varphi}{l}$$

تنش برشی در هر نقطه عمود بر شعاع است، در همه جا وجود دارد و با شعاع رابطه ی خطی دارد (از مرکز به سمت بیرون افزایش می‌یابد).

$$\downarrow\tau = G\gamma\downarrow \qquad \downarrow\gamma = \frac{\downarrow\rho\varphi}{l}$$

برآیند این نیروهای برشی، گشتاور T حول محور میله را نتیجه می‌دهد. برای یافتن T از انتگرال استفاده می‌کنیم.



$$\int \underbrace{(\tau dA)}_{\text{نیروی داخلی جزیی}} \underbrace{\rho}_{\text{بازوی گشتاور}} = T$$

$$\int \underbrace{\left(\frac{G\varphi}{l}\rho\right)}_{\tau} . \rho . dA = \int \frac{G\varphi}{l}\rho^2 . \underbrace{(2\pi\rho) d\rho}_{dA}$$

$$T = \frac{G\varphi . 2\pi}{l}\int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{G\varphi}{l}\cdot \frac{\pi c^4}{2} \longrightarrow$$ ممان اینرسی قطبی دایره (J)

$$\boxed{T = \frac{G\varphi}{l}\cdot J}$$

- اگر استوانه توخالی باشد، حدود انتگرال را حدود شعاع‌ها در نظر می‌گیریم.

عامل مولد

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

عامل مقاوم

$\Downarrow$

برای طولی از ***l*** که ***N*** و ***A*** ثابت باشند

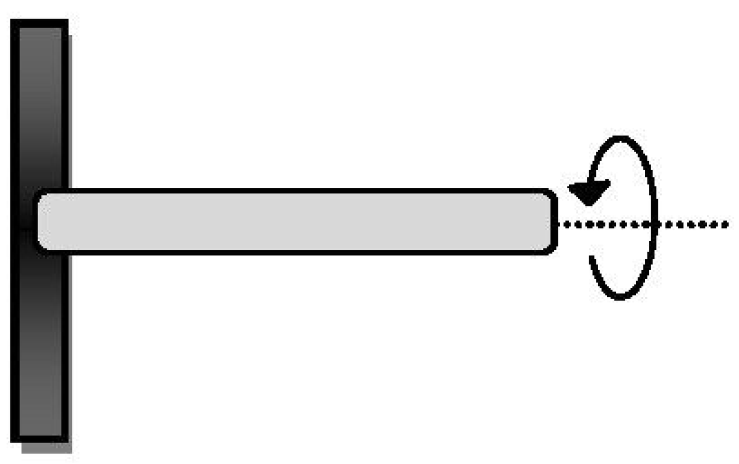
عامل مولد

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ}$$

عامل مقاوم

$\Downarrow$

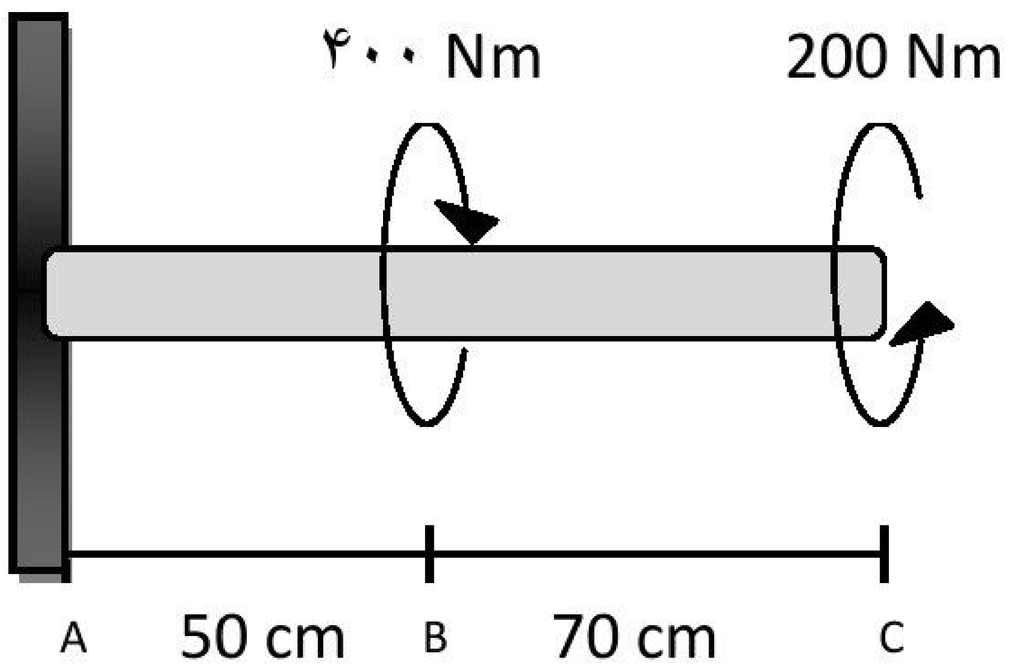
برای طولی از ***l*** که ***T*** و ***J*** ثابت باشند



مثال. *در شکل مقابل زاویه پیچش میله را بیابید. τ_{max} را نیز محاسبه کنید.*

$$\begin{cases} \boldsymbol{T = 300\ k\,Nm,\quad E = 200\ GPa,\quad J = 0.25\ kg.m^2} \\ \boldsymbol{c = 2\ cm,\quad l = 120\ cm} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ} = 0.018\ rad\ ,\qquad \tau_{max} = G\gamma_{max} = G\frac{c\varphi}{l} = G\frac{c}{l}\cdot\frac{Tl}{GJ} \Longrightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

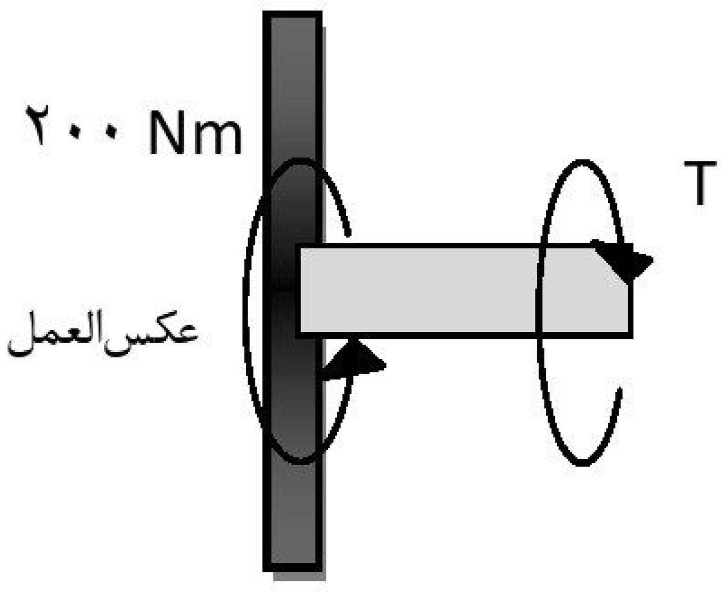


❖ ***مثال.*** *زاویه پیچش سطح C را نسبت به سطح A بدست آورید.*

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{c = 2\ cm} \\ \boldsymbol{G = 80\ GPa} \end{cases}$$

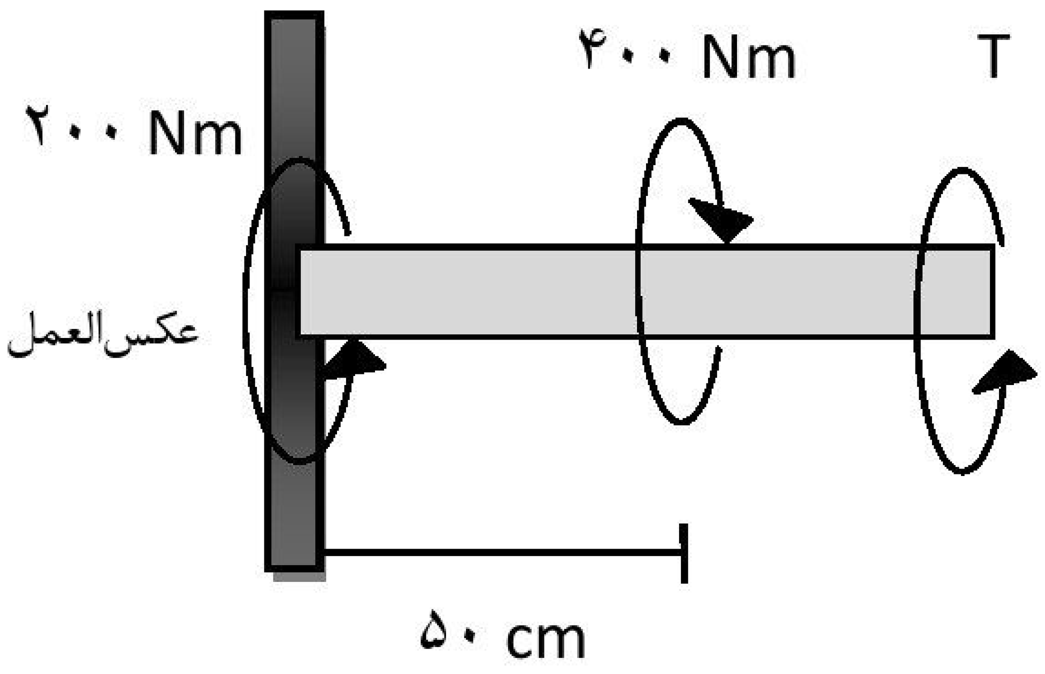
ابتدا زاویه پیچش B نسبت به A را محاسبه می‌کنیم :



$$T + 200 = 0 \;\Rightarrow T = -200\ Nm$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{-200 \times 50 \times 10^{-2}}{80 \times 10^{9} \times 25 \times 10^{-8}} = -0.005\ rad$$

حال زاویه پیچش C نسبت به B را محاسبه می‌کنیم :



$$T + 200 - 400 = 0 \;\Rightarrow T = 200\ Nm$$

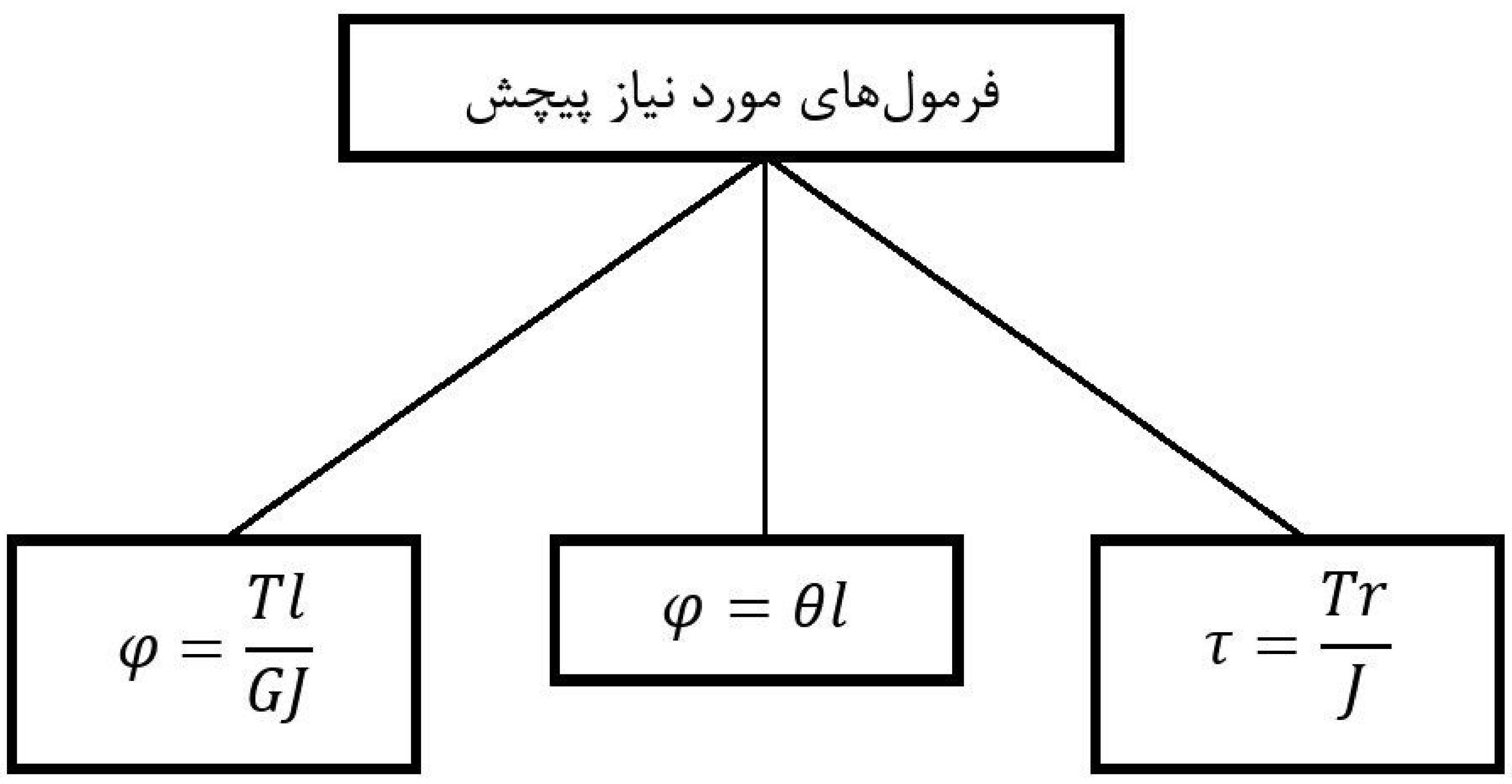
$$\varphi_{C-B} = \frac{200 \times 70 \times 10^{-2}}{80 \times 10^{9} \times 25 \times 10^{-8}} = 0.007\ rad$$

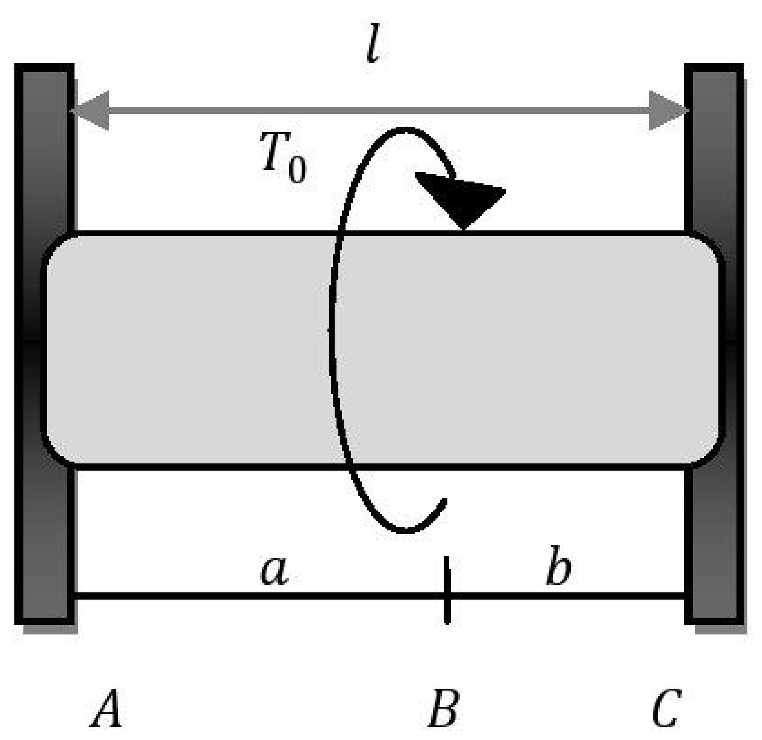
$$\varphi_{C-A} = 0.002\ rad$$

سوال. *در کجا τ_{max} قرار دارد؟* برای تعیین مقدار ماکسیمم جهت برش مهم نیست، مقدار آن مهم است که در همه جا 200 Nm است.

نرخ پیچش : θ **زاویه پیچش نسبی** در واحد طول است که در این واحد کوچک بقیه پارامترها ثابت است . θ را نرخ پیچش نیز می‌نامند.

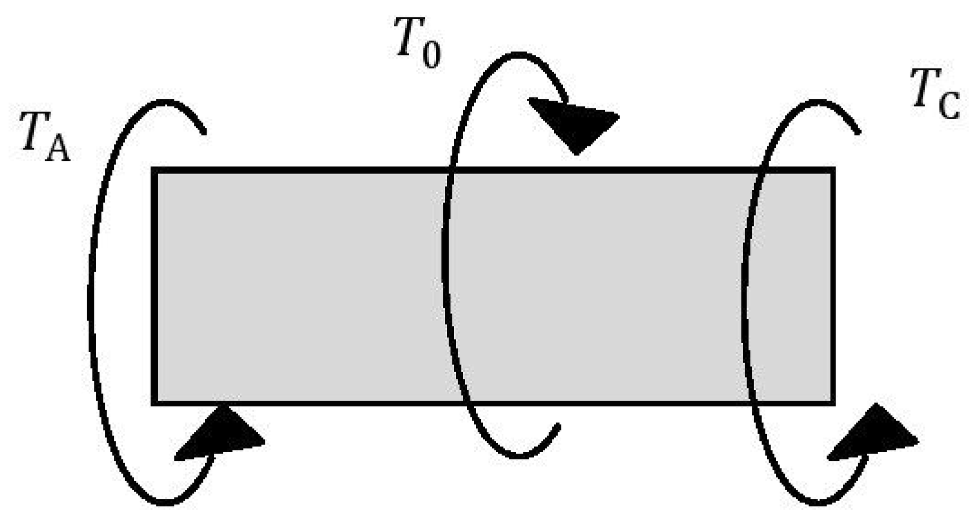
$\theta = \frac{\varphi}{l} \;\rightarrow\; \theta = \frac{T}{GJ}$





❖ ***مثال.*** *میزان پیچش را حساب کنید. درکجا برش ماکسیمم است؟ مقدار آن را محاسبه کنید.*

ابتدا دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم و روابط تعادل را می‌نویسیم.



$$T_C + T_A = T_0$$ یک درجه نامعین

طبق اصل سازگاری چون هر دو طرف میله فیکس است پیچش A نسبت به C صفر است.

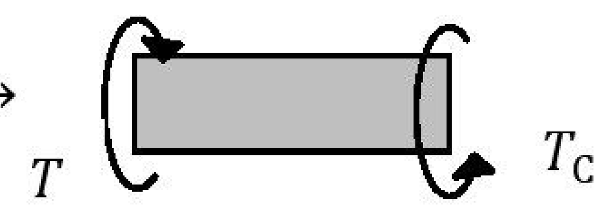
$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} = 0$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{Tl}{GJ} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad T = T_A$$

$$\varphi_{B-A} = -\frac{T_A a}{GJ}$$

$$\varphi_{C-B} = -\frac{Tl}{GJ} \quad \rightarrow$$



$$\rightarrow \quad T = T_C$$

$$\varphi_{C-B} = -\frac{T_C b}{GJ}$$

دقت شود که برای محاسبه φ_{C-B} برش را از چپ زدیم بنابراین با این که T هم‌جهت با T حالت φ_{B-A} است جهت تغییر زاویه‌ها خلاف هم است. از این رو یکی را منفی و دیگری را مثبت در نظر گرفته‌ایم.

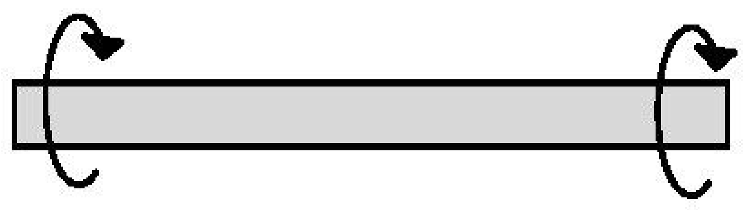
$$\varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} = 0 \implies T_c b - T_A a = 0 \implies T_A = \frac{b}{a} T_C$$

$$\begin{cases} T_A = \dfrac{b}{a} T_C \\ T_C + T_A = T_0 \end{cases} \implies \begin{cases} T_A = \dfrac{bT_0}{l} \\ T_B = \dfrac{aT_0}{l} \end{cases}$$

$$if \quad a > b \quad \rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{T_B c}{l} = \frac{aT_0 c}{l^2}$$

- **نکته** : با جرم یکسان لوله‌ی توخالی شعاع بیشتری نسبت به لوله‌ی توپر دارد، بنابراین J آن بزرگتر است و بر اساس رابطه‌ی موجود، تنش برشی آن کمتر است.همچنین برای داشتن J یکسان با لوله‌ی توخالی جرم کمتری نیاز است. از این رو لوله‌های توخالی برای تحمل پیچش مناسب‌ترند.

- **تذکر:** چنانچه میله تحت گشتاور خالص باشد، در این حالت دوران داریم، نه پیچش . در این حالت میله شتاب زاویه ای خواهد داشت. چنانچه میله تحت گشتاور باشد اما گشتاور خ الص نداشته باشیم، یعنی عامل مقاوم داشته باشیم اما میله تکیه گاه نداشته باشد، در این حالت میله با سرعت ثابت دوران می کند. در این حالت میله شتاب ندارد یعنی در حالت تعادل است اما تعادل استاتیکی نسیت.

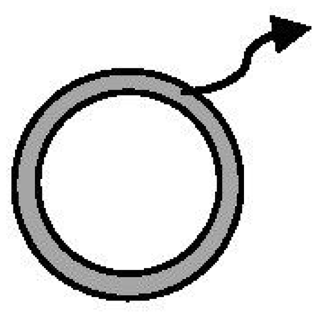


توان   بسامد   گشتاور

$$P = 2\pi f . T$$

سرعت زاویه‌ای در امتداد گشتاور

❖ ***مثال.*** *اگر* $P = 100\ kW$ ، $f = 20\ Hz$ ، قطر خارجی لوله $= 50\ mm$ ، $\tau_w = 60\ MPa$ *ضخامت لوله را طوری بیابید که تنش مجاز ۶۰ MPa شود.*

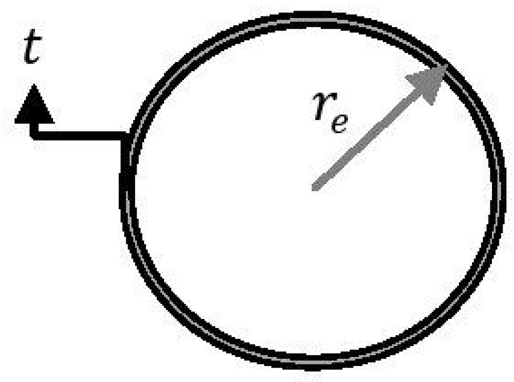


$$P = 2\pi f T \quad \rightarrow \quad T = 796\ Nm$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad \rightarrow \quad 60 \times 10^6 = \frac{796 \times 0.025}{\frac{\pi}{2}((50 \times 10^{-3})^4 - r^4)}$$

$$t = 4.4\ mm$$

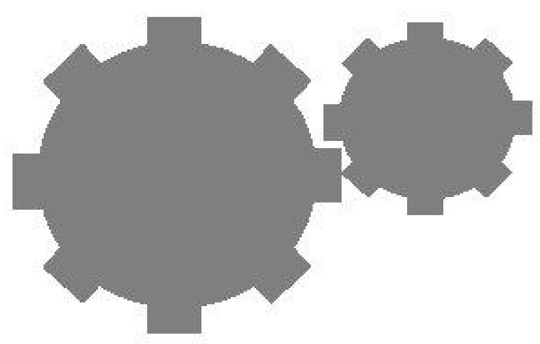
- **نکته :** در میله‌های جدارنازک شعاع را r_e که میانگین شعاع خارجی و داخلی است می‌گیریم.

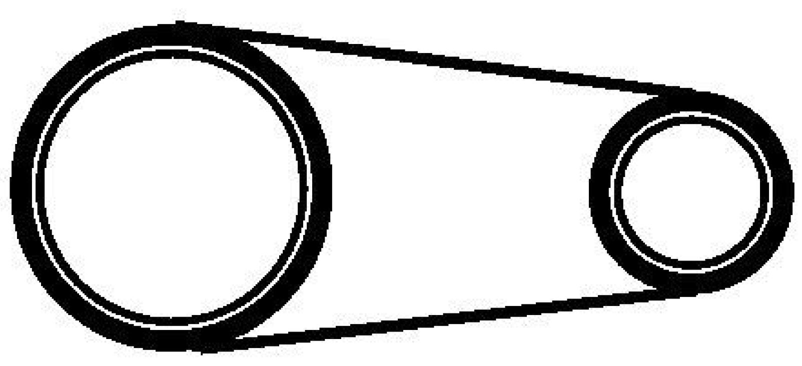


$$J = 2\pi r_e t\ .\ {r_e}^2$$

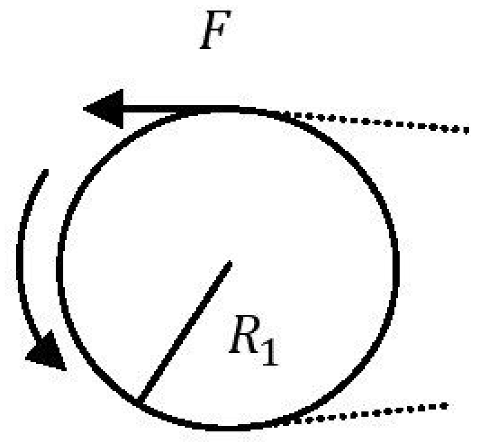
<u>مسائل چرخ‌دنده و زنجیر و تسمه متصل به قرقره:</u>

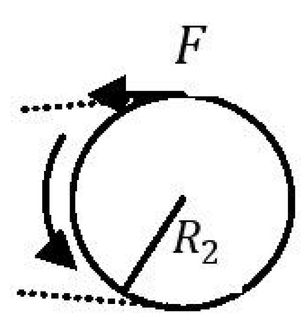
نکته کلیدی در این مسایل این است که نیرویی که از طریق دنده یا زجیر به هرکدام از چرخ‌دنده‌ها یا قرقره‌ها وارد می‌شود بر اساس قانون سوم نیوتن یکسان است.





مثلاً در قرقره و تسمه :





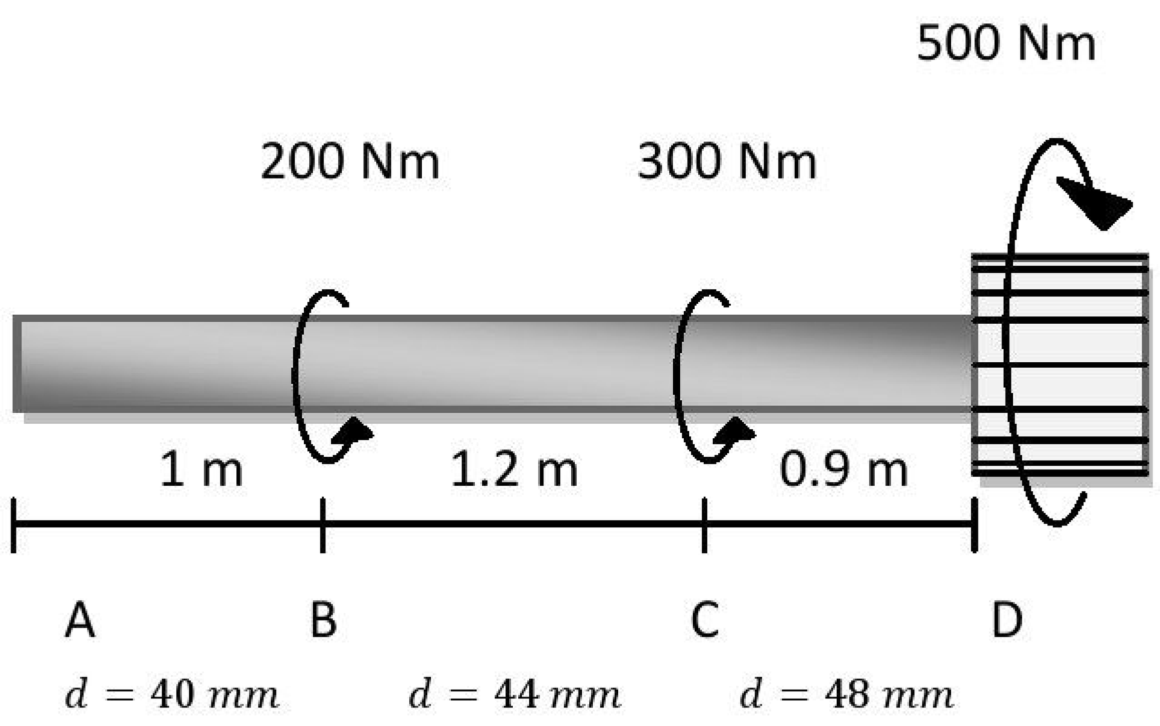
$$T_1 = FR_1$$

$$T_2 = FR_2$$

$$\rightarrow \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

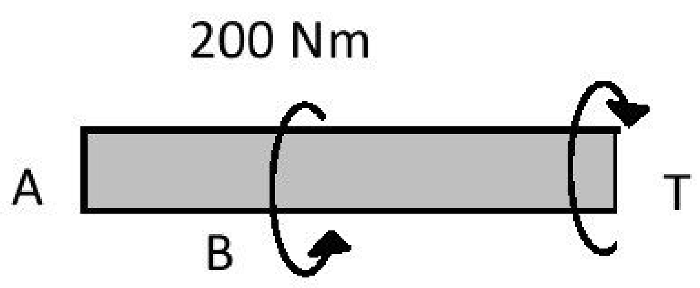
تذکر: در این مسایل چنانچه حرکت داشته باشیم باید توجه کنیم که سرعت و شتاب خطی قرقره‌هایی که به هم متصلند برابر است.

❖ ***مثال.*** *مقدار φ_{C-B} و φ_{D-B} را محاسبه کنید.* (*G = 27 GPa*)



➢ 

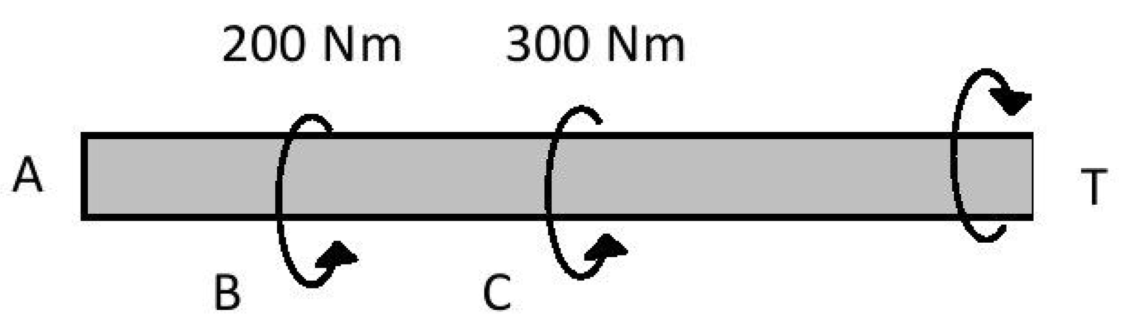
$$T = 0$$

➢ 

$$T - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad T = 200\ Nm$$

$$\varphi_{C-B} = \frac{Tl}{GJ}\,, \qquad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (22)^4 \times 10^{-12}}{2} = 3.68 \times 10^{-7} m^4$$

$$\varphi_{C-B} = \frac{200 \times 1.2}{27 \times 10^9 \times 3.68 \times 10^{-7}} = 0.024\ rad$$

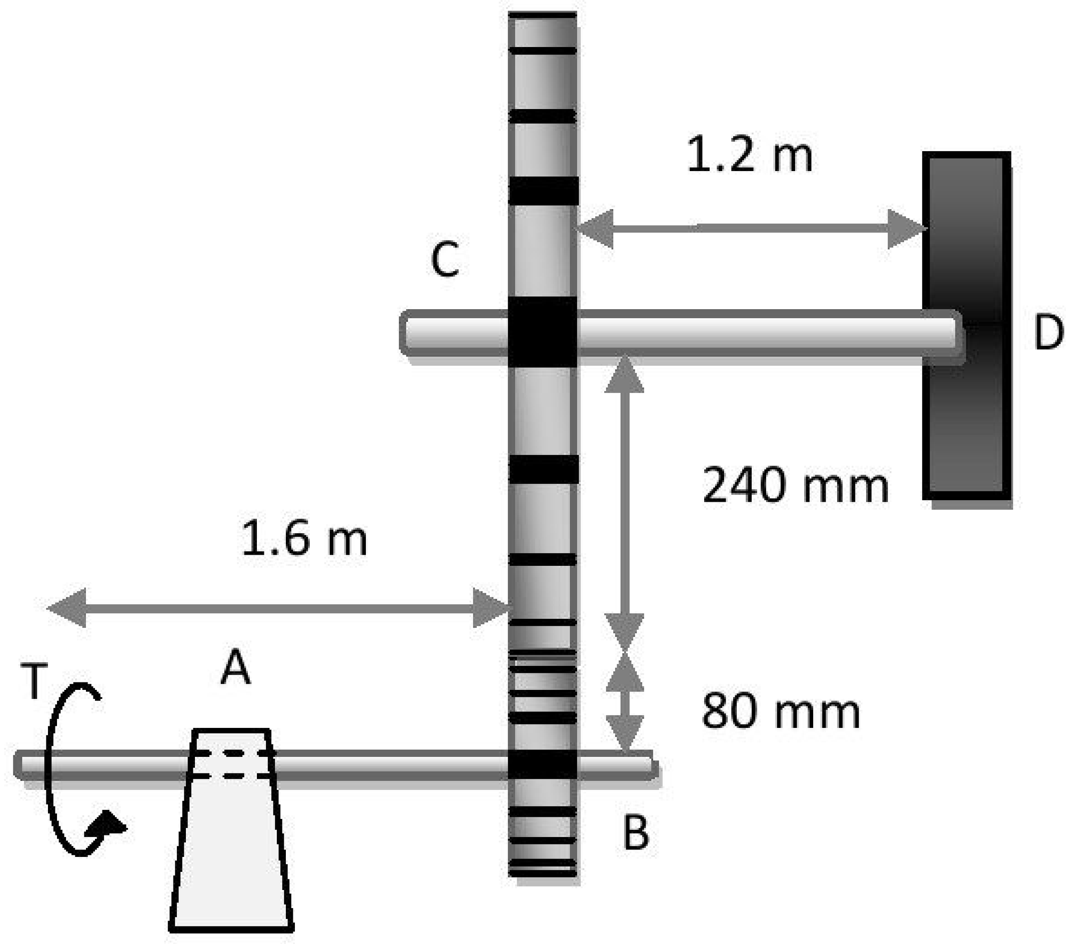
➢ 

$$T - 500 = 0 \quad \rightarrow \quad T = 500\ Nm$$

$$\varphi_{D-C} = \frac{Tl}{GJ}\,, \qquad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (24)^4 \times 10^{-12}}{2} = 5.21 \times 10^{-7}\ m^4$$

$$\varphi_{D-C} = \frac{500 \times 0.9}{27 \times 10^9 \times 5.2 \times 10^{-7}} = 0.032\ rad$$

$$\varphi_{D-B} = \varphi_{D-C} + \varphi_{C-B} = 0.024 + 0.032 = 0.056\ rad$$

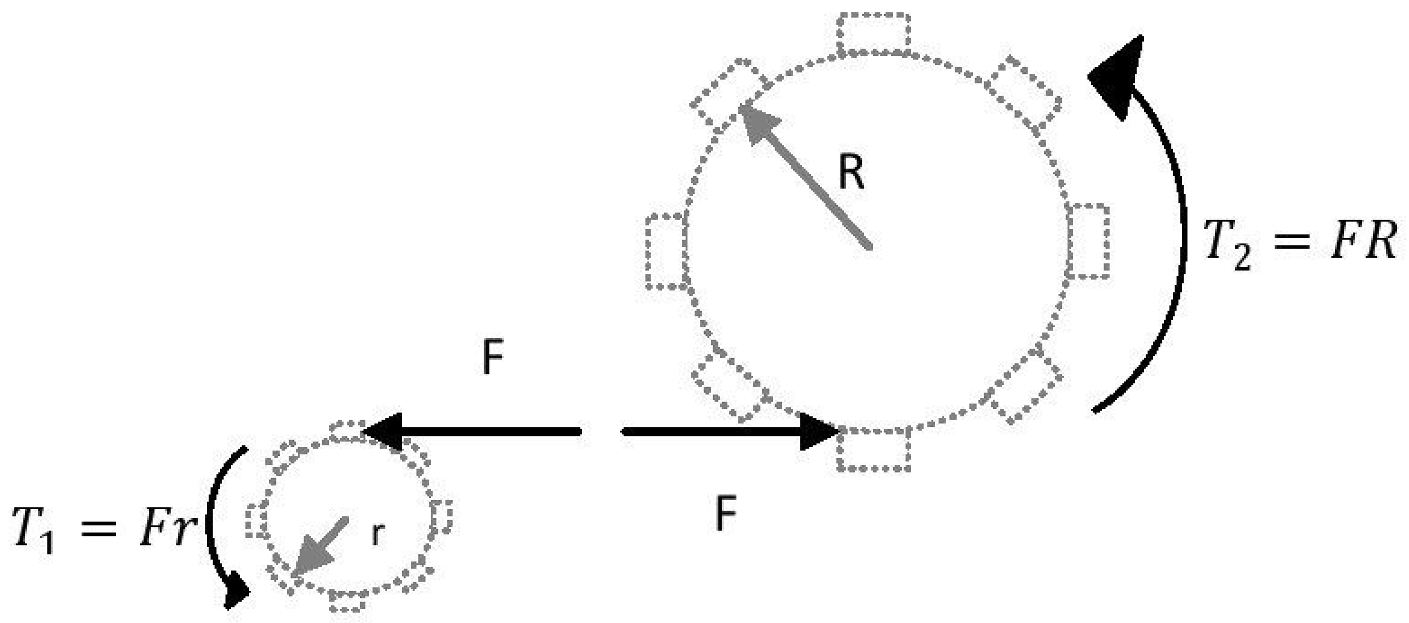


❖ **مثال.** در دستگاه روبرو میله ی پایینی در نقطه A آزاد و در نقطه D گیردار است . قطر میله ی بالایی $60mm$ و قطر میله ی پایینی $42mm$است. اگر $T_A = 1.2\ kNm$ و $G = 77.2\ GPa$ باشد، φ_{A-D} را حساب کنید.

ابتدا φ_{A-B} را حساب می‌کنیم، اگر جهت اعمال گشتاور را مثبت بگیریم :

$$\varphi_{A-B} = \frac{+1200 \times 1.6}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 21^4 \times 10^{-12}} = 0.081 \text{ rad}$$

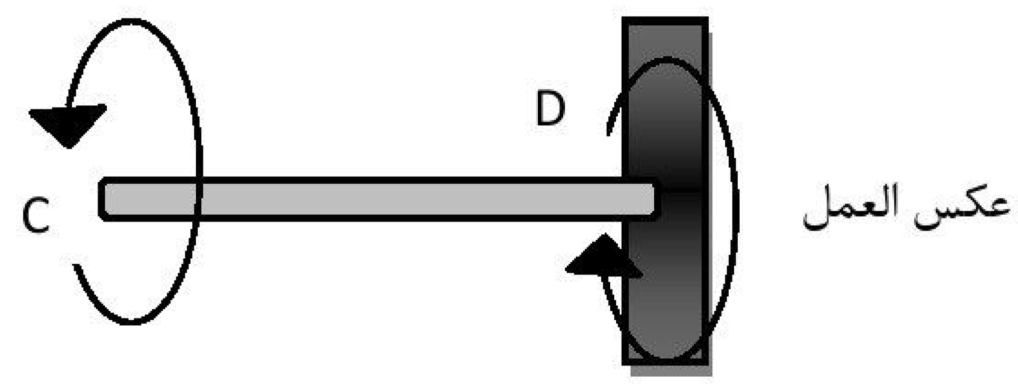
حال φ_{C-D} را حساب می‌کنیم. برای این کار باید گشتاور وارد بر چرخ‌دنده C را بدست آوریم. همان‌طور که پیش تر اشاره کردیم، نیرویی که چرخ‌دنده‌ها در محل تماس به هم وارد می‌کنند بر اساس قانون سوم نیوتن با هم برابرند. از طرفی چون دستگاه در حالت تعادل است گشتاوری که به چرخ‌دنده B از طریق این نیرو وارد می‌شود باید برابر با T باشد. دستگاه را از زاویه A بررسی می‌کنیم:



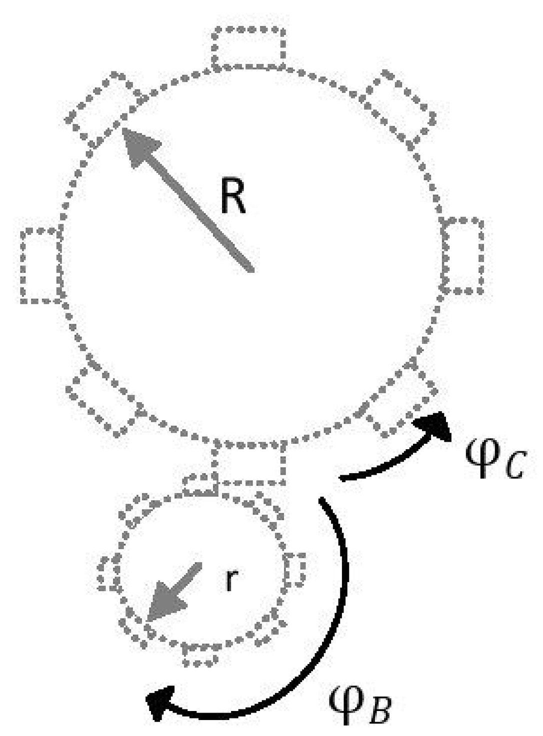
$$T_1 = F \times 0.08 = 1200 \quad \rightarrow \quad F = 15\ kN$$

$$T_2 = 15000 \times 0.24 = 3600\ Nm$$

$$\varphi_{C-D} = \frac{-3600 \times 1.2}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 30^4 \times 10^{-12}} = -0.044 \text{ rad}$$



برای برای محاسبه φ_{A-D} باید به نکته دیگری نیز توجه کنیم که چرخ‌دنده C با چرخیدن، چرخ‌دنده B را نیز می چرخاند . برای محاسبه φ_B میزان چرخش B از روی φ_{C-D} که میزان چرخش C است باید توجه کنیم که بخشی از محیط چرخ‌دنده‌ها که در تماس با هم حرکت می‌کند (s) در هر دو یکسان است. دقت داشته باشید که جهت چرخش چرخ‌دهنده ها مخالف است.

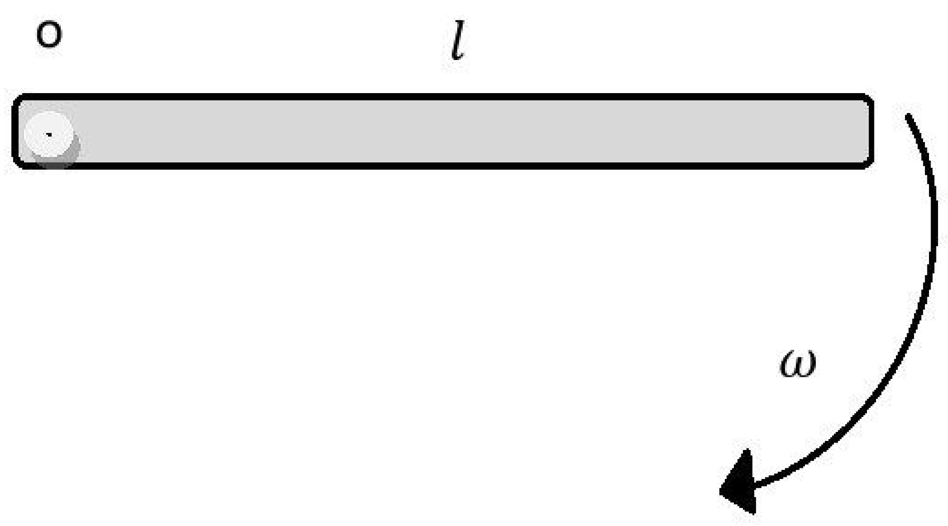


$$s = R\varphi_C = -r\varphi_B \quad \rightarrow \quad 0.24 \times -0.044 = -0.08 \times \varphi_B$$

$$\varphi_B = 0.132 \text{ rad}$$

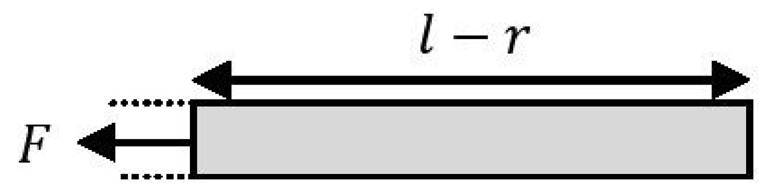
$$\varphi_{A-D} = \varphi_{A-B} + \varphi_B = 0.213\ rad$$

❖ ***مثال.*** *میله‌ای به طول l حول یک سر خود با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. در لحظه نشان‌داده‌شده تغییر طول میله چقدر است؟*



هر جسم برای این که با سرعت زاویه ای ثابت ω حول نقطه‌ای دوران کند باید نیرویی معادل $F = ma$ که $a = r\omega^2$ شتاب مرکزگراست به آن وارد شود . در ایجا این نیرو در طول میله متغیر است چون r متغیر است.

برای محاسبه تغییر طول میله المان بسیار کوچکی در نظر می گیریم به طوری که بتوان نیروی دو طرف آن را برابر در نظر گرفت و به این طریق تنش را محاسبه نمود. با محاسبه تنش، کرنش را بدست می‌آوریم و با انتگرال‌گیری تغییر طول میله را محاسبه می‌کنیم.



ابتدا نیرو را در فاصله r حساب می‌کنیم :

$$dF = dm.x\omega^2 = (\rho A dx).x\omega^2$$

$$F = \int_r^l \rho A\omega^2 x dx = \frac{\rho A\omega^2}{2}(l^2 - r^2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - r^2)$$

حال که تنش را در المان مورد نظر بدست آوردیم، برای هر المان تغییر طول dl را در نظر می‌گیریم:

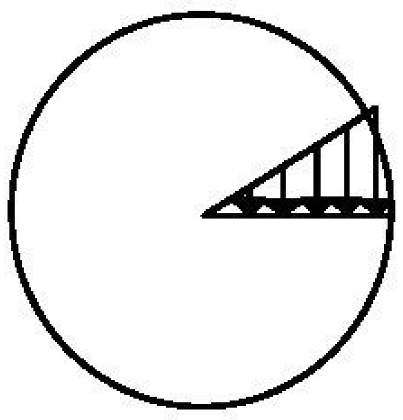
$$dl = \frac{\sigma dr}{E}$$

$$\Delta l = \int dl = \int_0^l \frac{\rho\omega^2}{2E}(l^2 - r^2)dr$$

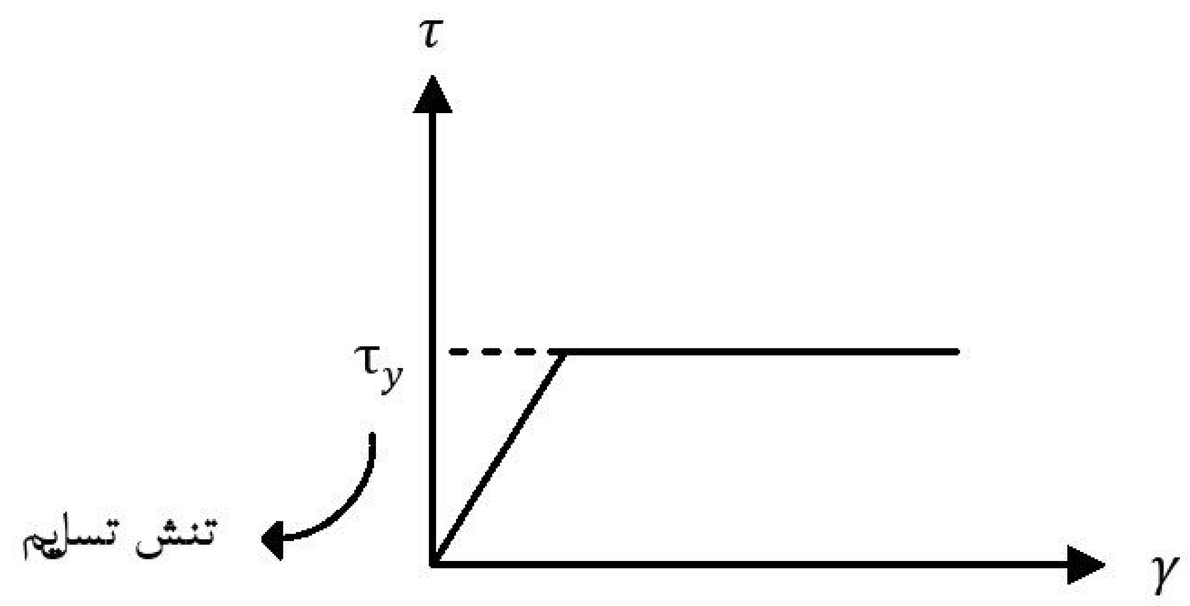
$$\Delta l = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E}$$

در ادامه مبحث پیچش حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که میله بر اثر تنش‌های برشی وارد مرحله پلاستیک می‌شود.

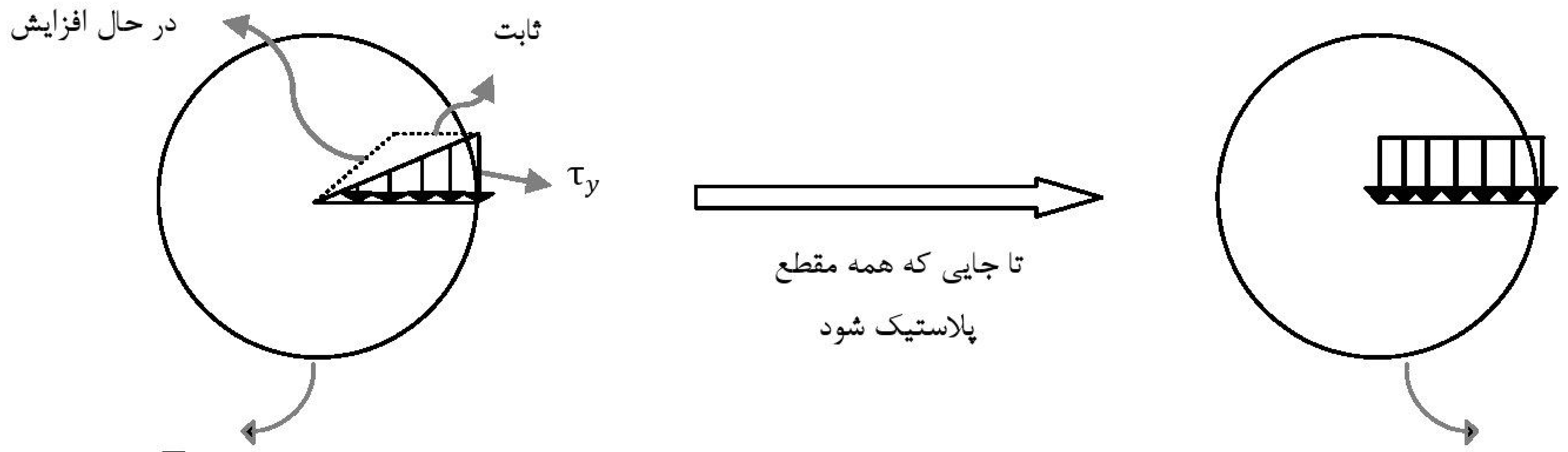
یادآوری: سیستم‌های نامعین تغییر طول های وابسته دارند که می توان ارتباط آن ها را از روی هندسه شکل بدست آورد . اگر این سیستم‌ها وارد مرحله پلاستیک شوند هنگام باربرداری باید قسمت های پلاستیک و الاستیک با هم به تعادل برسند . در این موارد اغلب تنش پسماند داریم.



$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



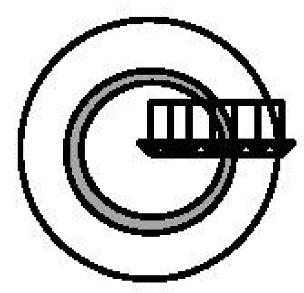
اگر سطحی‌ترین تنش برشی میله به تنش تسلیم برسد، میله از سطح به مرکز شروع به پلاستیک شدن می کند. از آنجا که تنش برشی سطح نمی تواند بیش از این مقدار شود، برای تولید گشتاور اعمال شده تنش های داخلی‌تر به ترتیب به تنش تسلیم می رسند. هنگامی که مرکزی‌ترین تنش به این مقدار رسید میله منهدم خواهد شد.



گشتاوری برابر T_u داریم که حداکثر گشتاور قابل اعمال به میله پیش از گسیختگی است

گشتاوری برابر T_y داریم. گشتاوری که به ازای آن در سطحی‌ترین نقطه تسلیم آغاز می‌شود.

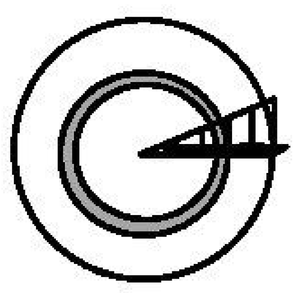
$$dT = \tau_y dA.r = \tau_y(2\pi r dr).r$$



$$T_u = \int_0^c 2\pi\tau_y r^2 dr$$

$$T_u = \frac{2\pi c^3}{3}\tau_y$$

$$dT = \tau dA.r = \tau(2\pi r dr).r$$



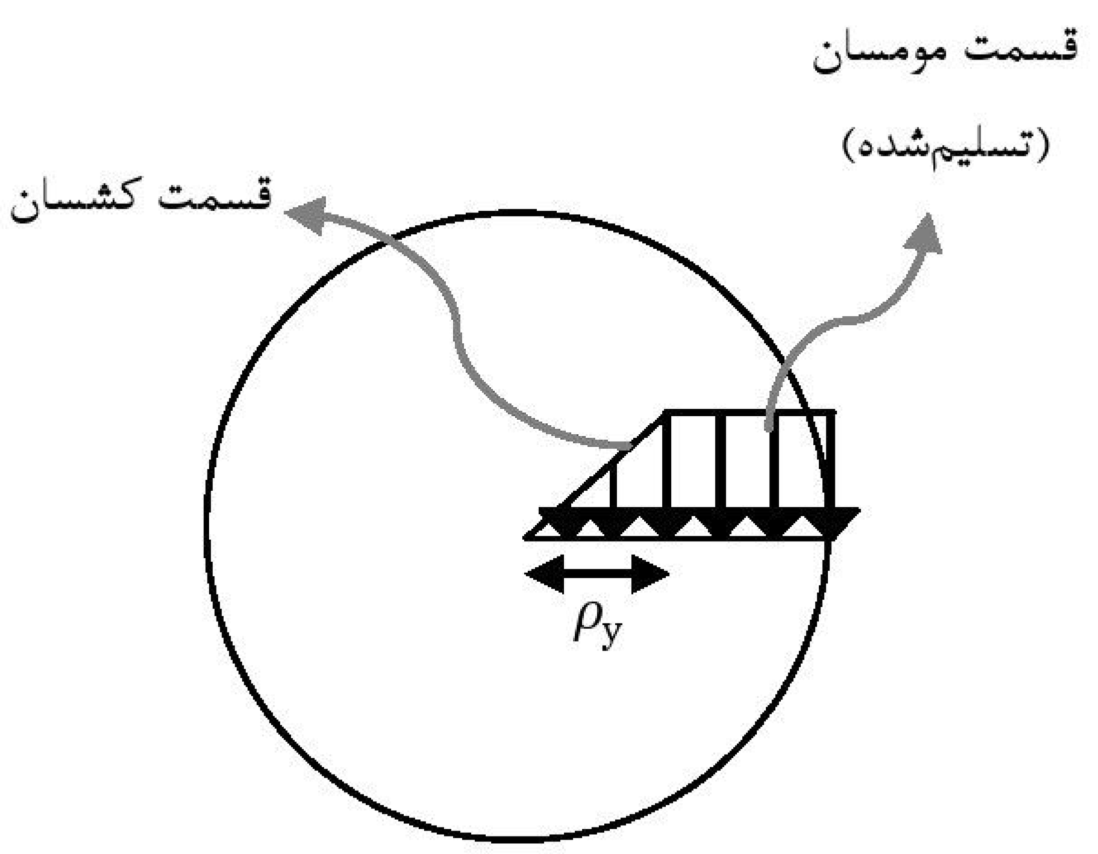
$$\tau = \frac{r}{c}\tau_y$$

$$T_y = \int_0^c 2\pi(\frac{r}{c}\tau_y)r^2 dr$$

$$T_u = \frac{\pi c^3}{2}\tau_y$$

- در حالتی که $T_y < T < T_u$ باشد بخشی از مقطع، الاستیک و بخش دیگر وارد مرحله پلاستیک شده است.

بررسی حالت $T_y < T < T_u$:



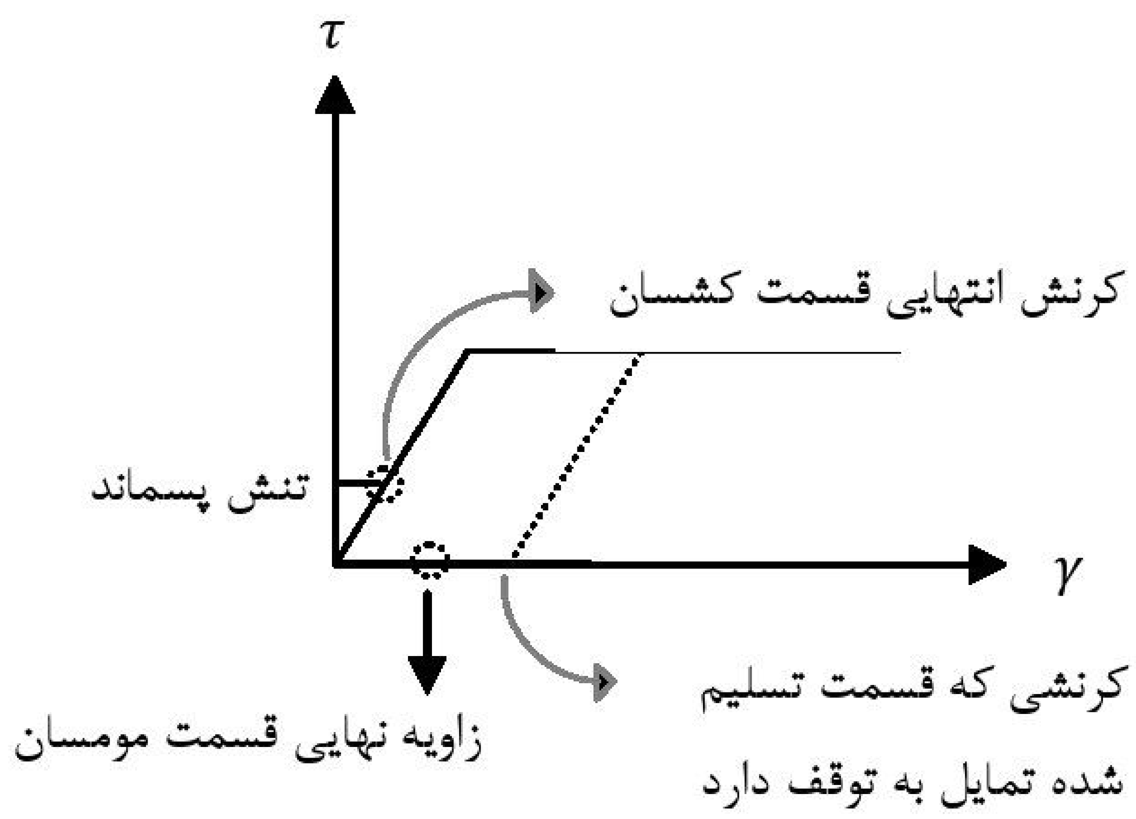
$$T = T_e + T_p$$

$$T_e = \frac{\pi {\rho_y}^3}{2}\tau_y$$

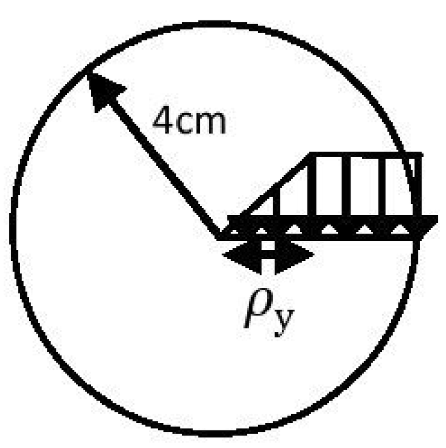
$$T_P = \int_{\rho_y}^{c} (2\pi r dr)\tau_y r = \frac{2\pi}{3}\left(c^3 - {\rho_y}^3\right)\tau_y$$

$$T = \left(\frac{2\pi}{3}c^3 - \frac{\pi}{6}{\rho_y}^3\right)\tau_y$$

حال اگر T را دوباره صفر کنیم بازگشت تغییرشکل‌های وابسته را خواهیم داشت. بخش الاستیک تمایل به جبران کامل تغییر شکل خود را دارد در حالی که بخش الاستیک دچار تغییر شکل دائمی شده است . در این حالت بخش مومسان قسمتی از تغییر شکل دائمی را تحت تنش جبران می کند و بخش کشسان نم ی‌تواند کاملاً به حالت اولیه با زگردد بنابراین تنش آن صفر نمی شود. بنابراین با این که بار نداریم اما تنش داریم که همان **تنش پسماند** است.



❖ ***مثال.*** *اگر $T = 14\ kNm$ و $\tau_y = 120\ MPa$ ، ρ_y شعاعی از میله را که هنوز تسلیم نشده بیابید.*



$$T = \left(\frac{2\pi}{3}c^3 - \frac{\pi}{6}{\rho_y}^3\right)\tau_y$$

$$14 \times 10^3 = \left(\frac{2\pi}{3}(4 \times 10^{-2})^3 - \frac{\pi}{6}{\rho_y}^3\right) \times 120 \times 10^6$$

با حل معادله بالا که بر اساس رابطه‌ای که پیش‌تر بدست آوردیم، بدست آمد، جواب مسئله را خواهیم یافت.