جزوه آموزشی درس

معادلات دیفرانسیل

(رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات)

شرکت مهندسی پتروپالامحور

گردآوری و تنظیم :

فرشاد سرایی

مقدمه :

جزوه حاضر که فرا روی شما خواننده گرامی قرار دارد ، مشتمل بر مباحث و سرفصل های مربوط به درس دانشگاهی « معادلات دیفرانسیل » در رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات می باشد.

مطالب مندرج در این جزوه آموزشی به تبیین فرمول ها و روش های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و بالاتر ، تبدیلات لاپلاس ، سری های توانی و ... می پردازد.

کتاب مرجع دانشگاهی که میبایست به عنوان مکمل در کنار این جزوه مطالعه شده و مورد استناد و ارجاع قرار گیرد عبارت است از :

- معادلات دیفرانسیل ، نوشته : آقای دکتر عبداله شیدفر

مطالب مندرج در این جزوه برگرفته از کلاس های آموزشی ارائه شده در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران در سال ۱۳۷۰ خورشیدی می باشد که به همان صورت دست نویس (برداشت شده توسط اینجانب) تقدیم حضور خوانندگان گرامی می شود ، به این امید که مفید فایده و مقبول نظر واقع گردد. بر خود لازم میدانم از حسن همکاری و زحمات سرکار خانم نیره رضائی که در تنظیم و انتشار این جزوه الکترونیکی اینجانب را یاری نمودند کمال سپاسگزاری را به عمل آورم.

همچنین از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فـرشـاد سـرایـی

دی ماه ۱۳۹۰

« سر درب ورودی دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران »

« پیشنهاد همکاری به مهندسین تازه فارغ التحصیل دانشگاه »

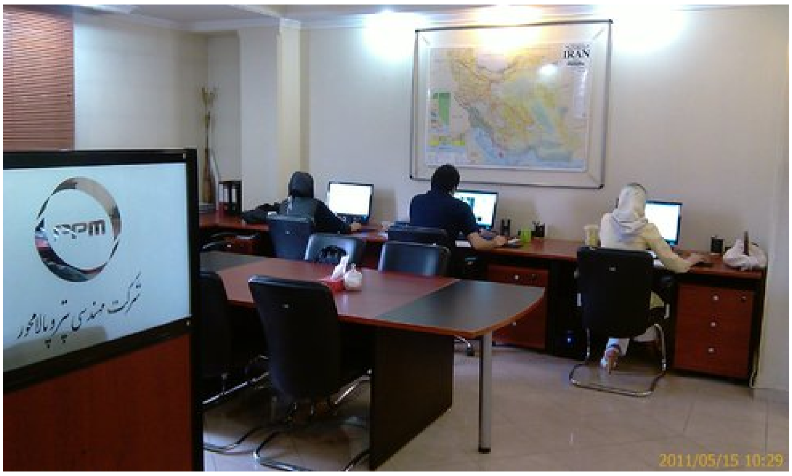
مدیریت شرکت مهندسی «پتروپالامحور» در راستای بسط و توسعه فرهنگ مهندسی دانش بنیان و حمایت از مهندسین جوان و علاقمند ، شرایطی را فراهم آورده که دانش آموختگان بتوانند با مراجعه به کتب ، جزوات و مقالاتی که بصورت رایگان در بخش «کتب و مقالات» وب سایت این شرکت در دسترس عموم قرار گرفته ، اصول و مبانی صحیح طراحی و مدلسازی سه بعدی سیستم های لوله کشی صنعتی (Piping) را به صورت خود آموز فراگرفته و سپس آموخته های خود را در قالب یک پروژه آموزشی پیاده سازی نموده و جهت بررسی مهندسین ارشد و با سابقه این شرکت ارسال نمایند تا پس از بررسی کارشناسی ، توصیه های فنی لازم در جهت بهبود طراحی به صورت رایگان به ایشان ارائه گردد.

مهندسین تازه فارغ التحصیل دانشگاه های معتبر در رشته «مکانیک» میتوانند با مراجعه به این کتابخانه الکترونیکی به آدرس : http://www.petropalamehvar.com/articles_fa.html ضمن دریافت فایل کتب ، جزوات و مقالات آموزشی با فرمت PDF به مطالعه آنها پرداخته و دانش مقدماتی مورد نیاز جهت طراحی و مدلسازی سه بعدی سیستم های لوله کشی صنعتی (Piping) را فرا گیرند.

پس از فراگیری مقدمات فوق ، مهندسین جوان میبایست به پروژه آموزشی ارائه شده در آیتم شماره ۳۲ کتابخانه الکترونیکی مراجعه نموده و بسته فشرده محتوی فایل های این پروژه را دانلود نمایند.
پروژه فوق متشکل از دو نقشه P&ID و Area Plot Plan یک واحد پتروشیمی فرضی می باشد که با ویرایش ۲۰۰۷ نرم افزار نقشه کشی Autocad و با فرمت فایل الکترونیک DWG تهیه شده و به همراه یک فایل PDF محتوی توضیحات مورد نیاز جهت اجرای پروژه ، در قالب یک پکیج رایگان ارائه گشته است.

مهندسین علاقمند میبایست بر اساس توضیحات ضمیمه این پروژه ، گام به گام نسبت به تکمیل طرح و تهیه نقشه ها و مدارک فنی مورد نیاز (که دقیقا مشابه یک پروژه واقعی تنظیم شده) اقدام نمایند.
نقشه ها و مدارک تهیه شده پس از تکمیل میبایست در قالب یک فایل فشرده با ظرفیت حداکثر ۱۰ مگابایت بسته بندی شده و جهت کنترل و بررسی مهندسین ارشد واحد تحقیق و توسعه شرکت مهندسی «پتروپالامحور» به آدرس پست الکترونیک این شرکت : info@petropalamehvar.co ارسال گردد. ذکر عبارت «درخواست بررسی پروژه آموزشی تکمیل شده» در عنوان (Subject) ایمیل و همچنین درج نام ، نام خانوادگی ، رشته تحصیلی ، میزان سابقه کار و شماره تماس مهندس طراح در متن ایمیل ارسالی ضروری بوده و به ایمیل هایی که فاقد مشخصات فوق الذکر باشد ترتیب اثر داده نخواهد شد.

طرح های دریافتی به نوبت توسط تیم بازبینی واحد تحقیق و توسعه شرکت مهندسی «پتروپالامحور» مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نقاط قوت و ضعف موجود در آنها به انضمام توصیه های فنی و تجربی مورد نیاز جهت بهبود طرح ، متعاقبا به آدرس پست الکترونیک شخص فرستنده ارسال خواهد گشت.



علاوه بر خدمات فوق که به صورت رایگان از طرف مدیریت شرکت مهندسی «پتروپالامحور» برنامه ریزی و جهت استفاده عموم علاقمندان ارائه می گردد ، با هدف تشویق هر چه بیشتر دانشجویان و مهندسین جوان به شرکت در این خودآزمایی و توسعه دانش فنی طراحی لوله کشی صنعتی (Piping) در میان دانش آموختگان کشور ، هیئت بازبینی واحد تحقیق و توسعه این شرکت پس از بررسی طرح های دریافتی به آنها امتیازی بین ۰ الی ۱۰۰ خواهد داد.طرح هایی که موفق به کسب امتیاز ۸۰ یا بالاتر از مجموع ۱۰۰ امتیاز گردند به عنوان **طرح برگزیده** انتخاب گشته و مهندس طراح مربوطه پس از دعوت به محل دفتر مرکزی شرکت و انجام مصاحبه حضوری جهت اطمینان از صحت مدارک ارسالی و تهیه آن توسط خود شخص ، جهت **استخدام در شرکت مهندسی «پتروپالامحور»** دعوت به همکاری خواهد شد.

شماره های تماس شرکت مهندسی «پتروپالامحور»
۴۸ الی ۲۲۶۸۵۰۴۶ (کد شهر تهران ۰۲۱)

آدرس وب سایت شرکت مهندسی «پتروپالامحور»
www.petropalamehvar.com

آدرس وبلاگ تخصصی «طراحی تاسیسات مکانیکی و لوله کشی صنعتی»
به مدیریت آقای مهندس «فرشاد سرایی»
www.fsaraei.persianblog.ir

فرشاد سرائی

« معادلات دیفرانسیل »

حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اوّل -

تعریف - هر معادلهٔ مشتمل بر یک یا چند متغیّر مستقل و یک متغیّر وابسته و مشتقات از مراتب مختلف این متغیّر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادلهٔ دیفرانسیل گوییم. هرگاه در این معادله فقط یک متغیر مستقل داشته باشیم معادله دیفرانسیل را معمولی گوییم و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل مشتق جزئی داریم.

مثال -

$$y = y(x)$$

$$\underbrace{y'' + y' + 2xy = \sin x}_{u = u(x, y)}$$ معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ معادله دیفرانسیل مشتق جزئی

* بطور کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ n به صورت زیر است:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

* مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل مرتبه بزرگترین مشتق آن است.

نکته : معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل را می توان به فرم زیر نشان داد :

$$f(x, y, y') = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad * \; \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

* منظور از جواب معادله دیفرانسیل بالا یعنی پیدا کردن تابعی مانند $y(x)$ که در معادلهٔ فوق صدق نماید.

نکته ـ منظور از جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل یعنی پیدا کردن تابع $y(x, c)$ که به ازای هر c در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ صدق کند.

تعریف : یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه بصورت :

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ و $a \leq x \leq b$ و $y(a) = y_0$

را یک مسأله مرزی گوییم.

قضیه یکتائی جواب (پیکار) : هرگاه تابع $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ بر مستطیل D پیوسته باشد آنگاه اگر $x_0 \in [a, b]$ باشد فقط یک تابع مانند $y(x)$ موجود است که در معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ صدق می کند و $y(x_0) = y_0$.

(y_0 عددی دلخواه است)

روشهای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اوّل -

معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر :

هرگاه در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ تابع : $f(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ باشد معادلهٔ دیفرانسیل را تفکیک پذیر گوییم .

روش حلّ -

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

از طرفین انتگرال می گیریم :

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + c$$

* در این روش سعی می شود هر تابع را در کنار مشتق آن بنویسیم .

مثال -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{1-x} = (1+y)\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x} + c$$

جواب عمومی

$$\Rightarrow \quad ** \ \ln|1+y| = -\ln|1-x| + c$$

می توان c را بصورت $\ln c$ نوشته و عبارت را ساده کنیم :

$$\ln|1+y| = \ln\left|\frac{c}{1-x}\right| \Rightarrow$$

$$* \; |1+y| = \left|\frac{c}{1-x}\right| \; *$$

معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اوّل -

تعریف - تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه

$$t^n f(x,y) = f(tx, ty)$$

(اگر t^n را داشته باشیم تابع همگن از مرتبهٔ n است.)

مثال - $f(x,y) = x^2 + y^2$ همگن از مرتبه دو است چون :

$$* \; f(tx, ty) = t^2(x^2+y^2) = t^2 f(x,y)$$

مثال - $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$* \; f(tx, ty) = \sin\left(\frac{tx}{ty}\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) = f(x,y)$$

همگن از مرتبهٔ صفر است.

معادله دیفرانسیل همگن (تعریف اوّل) :

معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه تابع $f(x,y)$ همگن مرتبهٔ صفر باشد یعنی :

* $f(tx, ty) = f(x, y)$

تعریف دوم - معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ را همگن گوییم هرگاه توابع M و N همگن هم مرتبه باشند.

روش حل - $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ «همگن»

تغییر متغیر زیر را می دهیم :

* $y = zx$

(یا) $z = \frac{y}{x}$

$y = zx$ مشتق می گیریم $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

از طرفی : $f(tx, ty) = f(x, y)$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y) \Rightarrow f(1, z) = f(x, y)$

در مجموع $\Rightarrow x\frac{dz}{dx} + z = f(1, z)$

$\Rightarrow x\frac{dz}{dx} = f(1, z) - z \Rightarrow$

$\frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(1,z) - z} = \ln|x| + c$

« و جوابهای عمومی بدست می آید »

مثال -

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

$$y' = \frac{-x^2+y^2}{2xy}$$ (همگن مرتبه صفر)

* تغییر متغیر : $\left(z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx\right)$ *

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{-x^2+z^2x^2}{2x^2z} = \frac{x^2(-1+z^2)}{2x^2z} \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2-1}{2z} - z \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2-1-2z^2}{2z} = -\frac{1+z^2}{2z} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{-\frac{1+z^2}{2z}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-2z\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\ln(1+z^2) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow * \frac{1}{1+z^2} = xc$$

بجای z مقدار قرار می‌دهیم $\Rightarrow$ $$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = xc$$

۱- $$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

این معادله دیفرانسیل با تغییر متغیر $z = ax + by + c$ به یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل می شود.

$$ax + by + c = z \quad \Rightarrow \quad a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{bf(z)+a} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + c$$

مثال- $$\frac{dy}{dx} = \sin^2(x - y - 1)$$

$$x - y - 1 = z \quad \Rightarrow \quad -\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\sin^2 z + 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1 - \sin^2 z} = x + c$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\cos^2 z} = x + c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} z = x + c$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}(x - y - 1) = x + c$$

۲- $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

الف ـ $* \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e}$

کافیست : $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \lambda \Rightarrow \begin{array}{l} a = \lambda d \\ b = \lambda e \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda dx + \lambda ey + c}{dx + ey + f}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(dx+ey) + c}{dx + ey + f}\right)$$

تغییر متغیر : $dx + ey = z \Rightarrow$

$$d + e\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}\left(\frac{dz}{dx} - d\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}\left(\frac{dz}{dx} - d\right) = f\left(\frac{\lambda z + c}{z + f}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = ef\left(\frac{\lambda z + c}{z + f}\right) + d \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{ef\left(\frac{\lambda z + c}{z+f}\right) + d} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{ef\left(\frac{\lambda z + c}{z+f}\right) + d} = x + c$$

ب ـ $* \quad \frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ تغییر متغیر : $\begin{array}{l} x = X + h \\ y = Y + K \end{array}$

(K و h ثابت هستند)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY+(ah+bk+c)}{dX+eY+(dh+ek+f)}\right)$$

* اگر k و h را طوری بدست آوریم که :
$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ dh+ek+f=0 \end{cases}$$

آنگاه معادله دیفرانسیل قابل تحویل به معادله دیفرانسیل همگن می‌شود.
(چون $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ است پس دستگاه حتماً جواب دارد)

مثال - (حالت ب)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x-2}{y-x-4}$$

$x = X+h$ و $y = Y+k$

$$* \begin{cases} h+k-2=0 \\ -h+k-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ h=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y+3+X-1-2}{Y+3-(X-1)-4} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y+X}{Y-X}$$

$$Y = ZX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = X\frac{dZ}{dX} + Z \Rightarrow$$

$$X\frac{dZ}{dX} + Z = \frac{ZX+X}{ZX-X} = \frac{Z+1}{Z-1} \Rightarrow$$

$$X\frac{dZ}{dX} = \frac{Z+1}{Z-1} - Z \Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{2Z+1-Z^2}{Z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{\frac{2Z+1-Z^2}{Z-1}} = \frac{dX}{X} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)\int \frac{(-2)\,dZ}{\frac{2Z+1-Z^2}{Z-1}} = \ln X + c$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(2z+1-z^2) = \ln cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2z+1-z^2}} = cx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\frac{y-3}{x+1}+1-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}}} = (x+1)c$$

مثال - $(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y+2x+4}{4x+6y+5}$$ (قسمت الف)

* ترکیب خطی از x و y، چند برابرش در مخرج پیدا شده (یا بالعکس) که باید کوچکتر را z گرفت.

$$3y+2x = z \quad \Rightarrow \quad 3\frac{dy}{dx}+2 = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) = \frac{z+4}{2z+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3z+12}{2z+5}+2$$

$$= \frac{3z+12+4z+10}{2z+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{7z+22}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{\frac{7z+22}{2z+5}} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{(2z+5)\,dz}{7z+22} = x+c$$

$$2z+5 \;\Big|\; 7z+22 \quad \Rightarrow \quad R = -\frac{9}{7}, \quad Q = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{2}{7} - \frac{\frac{9}{7}}{7z+22} \right) dz = x + c \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7} z - \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{7} \ln(7z - 22) = x + c \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{7}(3y+2x) - \frac{9}{49} \ln(21y + 14x + 22) = x + c$$

معادلات دیفرانسیل کامل -

تعریف - معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را کامل گوییم هرگاه تابعی مانند $u(x,y)$ موجود باشد بطوریکه: $du = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$. در این صورت جواب معادله بالا به صورت: $u(x,y) = c$ می باشد.

آزمون کامل بودن: (قضیه)

معادله دیفرانسیل $M dx + N dy = 0$ کامل است اگر و فقط اگر:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

مثال - $\underbrace{(1 - 2xy - y^2)}_{M}\,dx - \underbrace{(x+y)^2}_{N}\,dy = 0$

$$* \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2y - 2x$$

معادله دیفرانسیل کامل است

روش حل : $u(x,y)$ موجود است

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N \right)$$

از اولی یا دومی بنابه مصلحت استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - 2xy - y^2 \quad \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \int (1 - 2xy - y^2)\, dx + h(y) \quad \Rightarrow$$

$$u(x,y) = x - x^2 y + h(y)$$

اما : $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - 2xy + h'(y) = -(x+y)^2$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow \quad h(y) = -\frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = x - x^2 y - x y^2 - \frac{y^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \quad x - x^2 y - x y^2 - \frac{y^3}{3} + c = C$$

$$\Rightarrow \quad x - x^2 y - x y^2 - \frac{y^3}{3} = C$$

عامل انتگرال ساز :

برخی اوقات معادله دیفرانسیل کامل نیست ولی با ضرب تابعی مانند μ در طرفین، معادله دیفرانسیل کامل می شود.

$$M\,dx + N\,dy = 0$$ (به فرض کامل نیست)

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \quad \text{کامل} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

الف - μ تابعی فقط از x باشد:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{d\mu}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}$$

باید تابعی از x باشد

$$\Rightarrow \quad \int g(x)\,dx = \ln\mu$$

$$\Rightarrow \quad * \; \mu = e^{\int g(x)\,dx}$$

ب - μ تابعی فقط از y باشد:

$$M\frac{d\mu}{dy} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{d\mu}{dy}$$

$$g(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}$$

بايد تابعی از y باشد

$$\int g(y)\,dy = \ln \mu$$

$$\Rightarrow \quad * \; \mu = e^{\int g(y)\,dy}$$

مثال -
$$\underbrace{(1-xy)}_{M}\,dx + \underbrace{(xy - x^2)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$
(کامل نیست)

① $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x - y + 2x}{xy - x^2} = \frac{x-y}{-x(x-y)}$$

$$= -\frac{1}{x} = g(x)$$
(پس قابل حل است)

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow{\times \mu} \frac{1}{x}(1-xy)\,dx + \frac{1}{x}(xy - x^2)\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0$$
(کامل است)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - y \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \ln x - yx + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + h'(y) = y - x \quad \Rightarrow \quad h'(y) = y$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \frac{y^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \ln x - yx + \frac{y^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$* \quad \ln x - yx + \frac{y^2}{2} = C$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اوّل -

تعریف - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت زیر است :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

روش حلّ -

$$\xrightarrow{\times dx} \quad dy + P(x)y\,dx = Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad dy + P(x)y\,dx - Q(x)\,dx = 0$$

$$\underbrace{d}_{N}y + (\underbrace{P(x)y - Q(x)}_{M})\,dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \qquad \text{(کامل نیست)}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x) \qquad \text{تابعی از } x$$

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)\,dx}\,dy + e^{\int P(x)\,dx}\,y\,P(x)\,dx = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow d\,e^{\int P(x)\,dx}\cdot y = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)\,dx}\cdot y = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

* از فرمول : $d\,uv = u\,dv + v\,du$

مثال -

$$\begin{cases} y' + y\tan x = \sin 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$P(x) = \tan x \quad \Rightarrow$

$$y\,e^{\int \tan x\,dx} = \int e^{\int \tan x\,dx}\sin 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{-\ln\cos x} = \int e^{-\ln\cos x}\sin 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow y\cdot\frac{1}{\cos x} = \int \frac{1}{\cancel{\cos x}}\cdot 2\sin x\,\cancel{\cos x}\,dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\cos x} = -2\cos x + C \quad \Rightarrow$$

$$y = -2\cos^2 x + C\cos x \xrightarrow{y(0)=1} 1 = -2 + C \Rightarrow$$

$$C = 3 \quad \Rightarrow \quad * \; y = -2\cos^2 x + 3\cos x \; *$$

معادله دیفرانسیل برنولی - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل برنولی - بصورت زیر است :

$$* \quad \frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$ (n یک عدد صحیح است)

روش حل - تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ را می دهیم .

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n-1}\,y^n\,\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1}\,y^n\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \xrightarrow{\times (1-n)\,y^{-n}}$$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\,y^{1-n}\,(1-n) = (1-n)\,Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\,(1-n)\,z = (1-n)\,Q(x)$$

* که معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است (با متغیر وابسته جدید z) که می توان آنرا حل کرد .

مثال -

$$y' + \frac{y}{x} = x\,y^6$$

$$n = 6 \quad , \quad P(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = x$$

$$z = y^{1-6} = y^{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -5\,y^{-6}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}\,y^6\,\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}y^6\frac{dz}{dx}+\frac{y}{x}=xy^6 \xrightarrow{(\div)\,-\frac{1}{5}y^6}$$ (یا) $\times\, -5y^{-6}$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}y^{-5}=-5x \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{5z}{x}=-5x \Rightarrow$$

$$z\cdot e^{\int -\frac{5}{x}dx}=\int -5x\cdot e^{-\int 5x\,dx}\,dx+c$$

$$\Rightarrow z\cdot e^{-5\ln x}=\int -5x\cdot e^{-5\ln x}\,dx+c$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x^5}=-5\int x\cdot\frac{1}{x^5}\,dx+c=-5\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-3}+c$$

نکته: برخی از معادلات دیفرانسیل در صورت ظاهر خطی نیستند اما با تعویض جایگاه x و y معادله دیفرانسیل تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به متغیر وابسته x و متغیر مستقل y می شود.

مثال - $y'=\dfrac{y}{2x+y^3e^y}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x+y^3e^y}$ (به ظاهر خطی نیست)

(اما) : $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x+y^3e^y}{y} \Rightarrow$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{y}+y^2e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2e^y$$

$$x \cdot e^{\int -\frac{2}{y} dy} = \int y^2 e^y \cdot e^{\int -\frac{2}{y} dy} dy + c$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot e^{-2\ln y} = \int y^2 e^y \cdot e^{-2\ln y} dy + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y^2} = \int y^2 e^y \cdot \frac{1}{y^2} dy + c \Rightarrow \frac{x}{y^2} = e^y + c$$

معادله دیفرانسیل ریکاتی -

تعریف - هر معادله دیفرانسیل به فرم $y' + f(x)\, y = y^2 r(x) + g(x)$ را یک معادله ریکاتی گوییم.

هرگاه یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل فوق را بدانیم آنگاه برای معادله دیفرانسیل ریکاتی می توان جواب عمومی بدست آورد.

روش حل - فرض می کنیم y_1 یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل است؛ تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ را انجام می دهیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{-\frac{du}{dx}}{u^2} \Rightarrow$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + f(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) = \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 r(x) + g(x)$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + f(x)\, y_1 + f(x)\frac{1}{u} = y_1^2 r(x) + \frac{1}{u^2} r(x)$$

$$+ \frac{2y_1}{u} r(x) + g(x)$$

$$y_1' + f(x)\, y_1 - y_1^2\, r(x) - g(x) - \frac{u'}{u^2} + \frac{f(x)}{u} =$$

$$\frac{1}{u^2}\, r(x) + \frac{2y_1}{u}\, r(x)$$

صفر است چون y_1 جواب معادله ریکاتی است

$$\Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} + \frac{f(x)}{u} = \frac{r(x)}{u^2} + \frac{2y_1\, r(x)}{u} \xrightarrow{\times u^2}$$

$$u' - f(x)\, u = -r(x) - 2y_1\, u\, r(x)$$

$$\Rightarrow * \; u' + \left(-f(x) + 2y_1\, r(x)\right) u = -r(x)$$

که معادله دیفرانسیل خطی با متغیر مستقل x و وابسته u می باشد.

مثال- $2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$

$$\xrightarrow{\div 2x^2} \quad y' = \frac{(x-1)(y^2 - x^2)}{2x^2} + \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{x-1}{2x^2} y^2 - \frac{(x-1)}{2}$$

مثلاً یک جواب خصوصی : $y = x$

تغییر متغیر : $y = x + \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{u'}{u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{u}\right)=\frac{x-1}{2x^2}\left(x+\frac{1}{u}\right)^2-\frac{x-1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{xu}=\cancel{\frac{x-1}{2}}+\frac{x-1}{2u^2x^2}+\frac{x-1}{xu}-\cancel{\frac{x-1}{2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2}=\frac{x-1}{2u^2x^2}+\frac{1}{u} \Rightarrow u'=-\frac{x-1}{2x^2}-u$$

$$\Rightarrow u'+u=-\frac{x-1}{2x^2} \quad (\text{خطی})$$

$$\Rightarrow ue^{\int dx}=\int -e^x\frac{x-1}{2x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\int -\frac{1}{2x}e^x\,dx+\int\frac{1}{2x^2}e^x\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\underbrace{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,de^x}_{\text{جزء به جزء}}+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}e^x-\int e^x\,d\frac{1}{x}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=\frac{-1}{2x}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{x^2}\,dx+c$$

$$\Rightarrow ue^x=-\frac{1}{2x}e^x+c \quad \text{و} \quad u=\frac{1}{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x}e^x=-\frac{1}{2}x\,e^x+c$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجات بالاتر :

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل از درجه n بصورت زیر است :

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 P + a_0 = 0 \quad (*)$$

که در آن a_0 و .... و a_n اعداد ثابت و $P = \frac{dy}{dx}$ می باشد.

حالت ۱ - معادله (*) قابل تجزیه به عوامل اوّل برحسب P است.

$$[P - f_1(x,y)][P - f_2(x,y)] \cdots\cdots [P - f_n(x,y)] = 0$$

* با صفر قرار دادن هر یک از عوامل :

$$\begin{cases} P = f_1(x,y) \\ P = f_2(x,y) \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

* و از حل آن بدست می آوریم :

$F_1(x,y,c) = 0$ و $F_2(x,y,c) = 0$ و ..... و $F_n(x,y,c) = 0$

آنگاه جواب کلی به صورت :

$F_1(x,y,c) \cdot F_2(x,y,c) \cdots\cdots F_n(x,y,c) = 0$ می باشد.

مثال - $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} \Rightarrow$$

$$P - \frac{1}{P} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$P^2 - P\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(P - \frac{x}{y}\right)\left(P + \frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$P - \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow P = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$P + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow P = -\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln y = -\ln x + \ln c \Rightarrow yx = c$$

$$\Rightarrow (yx - c)\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - c\right) = 0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوّم قابل تحویل به مرتبهٔ اوّل :

الف - معادله مرتبه دوّم فاقد x :

* $F(y, y', y'') = 0$

* با تغییر متغیر $p = y'$:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

که معادله به صورت ذیل در می آید :

* $G\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0$

که معادله مرتبهٔ اوّل است.

ب - معادلات مرتبه دوّم فاقد y : $F(x, y', y'') = 0$

* با تغییر متغیر $p = y'$ معادله به فرم $G\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$ در می آید.

مثال ۱ - $2xy'' = 3y'$ $\qquad y' = p$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad 2x\,\frac{dp}{dx} = 3p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{3p} = \frac{dx}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ln p = \frac{1}{2}\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \quad p^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot c \quad \Rightarrow \quad p = x^{\frac{3}{2}} \cdot c^3 \; c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}} \cdot c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \int c_1 \cdot x^{\frac{3}{2}}\,dx + c_2$$

$$y = c_1 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c_2$$

مثال ۲ـ $yy'' + (y')^2 = 0$ $\qquad y' = P$

$$y'' = P\frac{dP}{dy} \Rightarrow y \cdot P\frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad ① \quad P = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$$

$$② \cdot P \neq 0 \Rightarrow y\frac{dP}{dy} + P = 0 \Rightarrow$$

$$y\frac{dP}{dy} = -P \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln P = -\ln y + \ln c_1 \Rightarrow P = \frac{c_1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int c_1\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow * \ \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوّم خطّی :

تعریف ـ فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوّم بصورت زیر است :

$$* \ y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

* که اگر $r(x) = 0$ باشد معادله دیفرانسیل را همگن و در غیر اینصورت معادله دیفرانسیل را غیر همگن گوییم .

تضمیم - فرض کنید: y_g جواب عمومی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
باشد و نیز y_p یک جواب خصوصی برای معادله غیرهمگن خطی
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ باشد. آنگاه $y = y_g + y_p$
جواب عمومی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ می باشد.
لذا بحث ما به دو حالت تقسیم می شود:

۱- پیدا کردن جواب عمومی معادله همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
۲- پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیرهمگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن:

تضمیم: فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند. آنگاه هر ترکیب
خطی از دو جواب فوق $(c_1y_1 + c_2y_2)$ نیز یک
جواب است.

تعریف - توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وابسته خطی هستند هرگاه
نسبت $\frac{y_1}{y_2}$ یک عدد ثابت باشد. در غیراین صورت
توابع فوق مستقل خطی می باشند.

تعریف - رونسکین دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به صورت ذیل تعریف
می شود:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' + y_2y_1'$$

قضیه: فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ توابع جواب معادلهٔ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند. آنگاه $W(y_1, y_2)$ در فاصله $[a, b]$ همواره صفر است و یا همواره مخالف صفر است. ($[a, b]$ فاصلهٔ جوابها می باشد یعنی $y_1(x), y_2(x) \in [a, b]$)

لم: فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد. آنگاه y_1 و y_2 مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $W(y_1, y_2) \neq 0$ باشد (در فاصله تعریف y_1 و y_2)

نتیجهٔ اصلی

قضیه: فرض کنید توابع y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله خطی همگن مرتبه دوم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند. آنگاه: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی معادله فوق می باشد.

تعریف - معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده را یک مسئله اولیه یا یک مسئله با شرایط مرزی گوییم:

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x) \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y'_0 \qquad \text{(شیب خط مماس)} \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

قضیه وجود و یکتائی جواب :

فرض کنید توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $r(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و نیز $x_0 \in [a,b]$ باشد. آنگاه به ازای هر دو عدد دلخواه y_0 و y'_0 فقط یک تابع مانند $y(x)$ موجود است که در معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ صدق کند و :

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_0$$

روشهای حل :

الف - دانستن یک جواب (کاهش مرتبه) :

* فرض کنید y_1 یک جواب معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ است. برای پیدا کردن جواب دوم مستقل خطی به شکل زیر عمل می کنیم :

$$\frac{y_2}{y_1} = V \quad (\text{تابعی از } x \;\; V)$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = V y_1 \quad \Leftarrow$$ (y_2 باید در معادله صدق کند)

$$y'_2 = V' y_1 + y'_1 V$$
$$y''_2 = V'' y_1 + V' y'_1 + y''_1 V + V' y'_1 \quad \Rightarrow$$
$$\quad\;\; = V'' y_1 + 2V' y'_1 + y''_1 V$$

$$V'' y_1 + 2V' y'_1 + y''_1 V + P(x)(V' y_1 + y'_1 V) + Q(x) y = 0$$

$$\Rightarrow \quad V\underbrace{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)}_{0} + 2V'y_1' + P(x)y_1V' + V''y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V''y_1 + 2V'y_1' + P(x)y_1V' = 0$$

$$\Rightarrow \quad V''y_1 = -2V'y_1' - P(x)y_1V'$$

$\Rightarrow$ (طرفین $\div$ $V'y_1$) $\quad \dfrac{V''}{V'} = -2\dfrac{y_1'}{y_1} - P(x)$

$\Rightarrow$ (انتگرال می‌گیریم) $\quad \displaystyle\int \frac{V''}{V'} = -2\int \frac{y_1'}{y_1} - \int P(x)\,dx$

$$\Rightarrow \quad \ln V' = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln V' = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad V' = e^{-2\ln y_1 - \int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad V' = e^{-2\ln y_1}\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad V' = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

$\Rightarrow \quad V = \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P(x)\,dx}\,dx$ (فرمول مستند)

مثال - $\quad x^2y'' + xy' - y = 0$

$(y_1 = x) \quad y_1' = 1 \quad y_1'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + x - x = 0$

* $y_2 = v\, y_1$ و $v = \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{1}{x} dx}\, dx$

$\Rightarrow \quad v = \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\ln x}\, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$= \int x^{-3} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{2x^2} \cdot x = -\frac{1}{2x}$

(جواب عمومی) : $y = c_1 x - c_2 \frac{1}{2x}$

ب- روش ضرایب ثابت : $y'' + Py' + Qy = 0$
$(P, q = cte)$

* معلوم شده که جوابهای مستقل خطی چنین معادله ای به شکل $y = e^{mx}$ می باشد.

$$\begin{cases} y = e^{mx} \\ y' = m e^{mx} \\ y'' = m^2 e^{mx} \end{cases} \Rightarrow$$

$m^2 e^{mx} + P m e^{mx} + q e^{mx} = 0$

$e^{mx} (m^2 + P m + q) = 0$

$e^{mx} \neq 0 \Rightarrow m^2 + Pm + Q = 0$ (معادله شاخص)

۱- اگر معادله فوق دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد :

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{m_1 x} \\ y_2 = e^{m_2 x} \end{cases}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(m_1 - m_2)x} \Rightarrow$$ (y_1 و y_2 مستقل خطی هستند)

$$\Rightarrow \quad * \; y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

۲- ریشه مضاعف داشته باشیم : $m_1 = m_2$

$$y_1 = e^{-\frac{P}{2}x} \qquad y_2 = V y_1$$

$$V = \int \frac{1}{(e^{-\frac{P}{2}x})^2} e^{-\int P dx} dx = \int \frac{1}{e^{-Px}} e^{-Px} dx = x$$

$$\Rightarrow y_2 = x e^{-\frac{P}{2}x} \Rightarrow$$

$$* \; y = C_1 e^{-\frac{P}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{P}{2}x}$$

۳- ریشه مختلط داریم :

$$m_1 = a + bi$$
$$m_2 = a - bi$$

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bxi} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$و \quad y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} e^{-bxi} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

$$** \quad e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\text{Demoar قانون}) \quad **$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax}\cos bx \\ Y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

* Y_1 و Y_2 جوابند چون ترکیب خطی از y_1 و y_2 هستند.
(درضمن به این وسیله به جواب حقیقی و غیر مختلط دست می یابیم)

$$* \quad y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx$$

مثال - ابتدا معادلهٔ شاخص را تشکیل می دهیم.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

* یعنی معادله شاخص ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y_1 = e^{mx} = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases} \Longrightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

بسط مطالب فوق به درجهٔ (n) :

تعریف - فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n همگن خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر است :

$$* \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

* برای حل معادله دیفرانسیل فوق معادلهٔ شاخص را تشکیل می‌دهیم :

$$* \quad a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

* برای یک معادلهٔ مرتبهٔ n باید n جواب مستقل خطی بدست آوریم .

الف - (معادلهٔ شاخص n ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد) :

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

* که دراینصورت جواب عمومی بصورت زیر است :

$$* \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

ب - (یک یا چند ریشهٔ مکرر با مرتبهٔ تکرار S داشته باشیم) :

* یعنی مثلاً عبارت ما دارای پرانتزی بشکل زیر باشد :

$$* \quad (x - \lambda_1)^S \left[(x - \dots)(x - \dots) \dots\dots \right] = 0$$

که تک تک پرانتزها را مساوی صفر قرار می دهیم :

$y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$ و $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$ و .... و
$y_s = x^{s-1} e^{\lambda x}$

یعنی s تا جواب بدست آوردیم .

$y_{s+1} = e^{\lambda_{(s+1)} x}$ و $y_{s+2} = e^{\lambda_{(s+2)} x}$ و .... و

$y_n = e^{\lambda_n x}$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $* \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

مثال - فرض کنید معادلهٔ شاخص مقابل را داریم : $\lambda(\lambda - 1)^3 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^4 - \lambda - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$

معادلهٔ مرتب شده $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$

$** \quad y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$

در بالا به جای λ ، y قرار داده و توانها را به عنوان مرتبه در نظر گرفتیم .
یعنی در حقیقت مسئله را ساختیم !!!!

حال با در نظر گرفتن معادلهٔ شاخص آن را حل می کنیم :

$\lambda = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 3 \qquad \lambda = 1$

$y_1 = e^x \qquad y_2 = xe^x \qquad y_3 = x^2 e^x \qquad y_4 = e^{0 \times x} = 1$

که ٤ جواب بدست آمد.

$\Rightarrow \quad * \; y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$

ج - (یک ریشهٔ مختلط داشته باشیم) : $\qquad a \pm bi$

* می دانیم که ریشهٔ مختلط مزدوج است یعنی یکی $a + bi$ و دیگری $a - bi$ است.

$$\begin{cases} y_1 = e^{ax} \cos bx \\ y_2 = e^{ax} \sin bx \\ y_3 = e^{\lambda_3 x} \\ y_4 = e^{\lambda_4 x} \\ y_n = e^{\lambda_n x} \end{cases} \Rightarrow \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

د - (ریشهٔ مختلط مکرر از مرتبهٔ تکرار S داشته باشیم) :

* در این حالت $2S$ جواب می توانیم بدست آوریم، زیرا ریشهٔ مختلط مزدوج است.

$y_1 = e^{ax} \cos bx \qquad y_2 = x e^{ax} \cos bx$ و ...... و

$$y_s = x^{s-1} e^{ax} \cos bx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{s+1} = e^{ax} \sin bx \\ y_{s+2} = x e^{ax} \sin bx \\ \vdots \\ y_{2s} = x^{s-1} e^{ax} \sin bx \\ y_{(2s+1)} = e^{\lambda_{2s+1} x} \\ \vdots \\ y_n = e^{\lambda_n x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$* \; y = c_1 y_1 + \dots\dots + c_n y_n$$

مثال - $(\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 (\lambda - 1)^3 \lambda = 0$

* معادلهٔ شاخص فوق را داریم. ابتدا آنرا مرتب می کنیم.
(باید توجه داشت $i^2 = -1$)

$$\lambda(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^2 = 0$$
$$\lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)(\lambda^4 + 1 + 2\lambda^2) = 0$$
$$(\lambda^3 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda)(\lambda^4 + 1 + 2\lambda^2) = 0$$
$$\lambda^8 - 3\lambda^7 + 5\lambda^6 - 7\lambda^5 + 7\lambda^4 - 5\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$$

* ریشه‌های این معادله شاخص را باید بدست آوریم.

$$\Rightarrow \quad y^{(8)} - 3y^{(7)} + 5y^{(6)} - 7y^{(5)} + 7y^{(4)} - 5y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = 1$ و $S_1 = 3$

$\lambda = \pm i$ و $S_2 = 2$

$y_1 = e^{0 \times x} = 1$

$y_2 = e^x$ و $y_3 = xe^x$ و $y_4 = x^2 e^x$

$y_5 = \cos x$ و $y_6 = x\cos x$ و $y_7 = \sin x$

$y_8 = x\sin x$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x + c_5 \cos x + c_6 x \cos x + c_7 \sin x + c_8 x \sin x$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیر همگن خطی مرتبهٔ دوم :

روش اول - روش تغییر پارامتر :

فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل - $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد آنگاه با دانستن y_1 و y_2 می توان یک جواب خصوصی برای معادله غیرهمگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ بدست آورد. (روش لاگرانژ)

* $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ که v_1 و v_2 توابعی از x هستند.

$$y'_p = v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 y_2 + v_2 y'_2$$

(شرط اول) : $v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad y'_p = y'_1 v_1 + y'_2 v_2$$

$$y''_p = y''_1 v_1 + y'_1 v'_1 + y''_2 v_2 + y'_2 v'_2$$

(داخل معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow$

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

$$y''_1 v_1 + y'_1 v'_1 + y''_2 v_2 + y'_2 v'_2 + P(x)\left(y'_1 v_1 + y'_2 v_2\right) +$$

$$Q(x)\left(y_1 v_1 + y_2 v_2\right) = R(x)$$

$$\Rightarrow v_1\big(\underbrace{y''_1 + P(x) y'_1 + Q(x) y_1}_{\text{صفر}}\big) + v_2\big(\underbrace{y''_2 + P(x) y'_2 + Q(x) y_2}_{\text{صفر}}\big) \Leftarrow$$

$$+ y'_1 v'_1 + y'_2 v'_2 = R(x) \quad \Rightarrow$$

(شرط دوم) : $v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x)$

$$* \begin{cases} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \Rightarrow$$

$$* \; V_1 = \int \frac{-y_2 \, R(x)}{W(y_1, y_2)} \; *$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 \, R(x)}{W(y_1, y_2)} \Rightarrow$$

$$* \; V_2 = \int \frac{y_1 \, R(x)}{W(y_1, y_2)} \; *$$

مثال - جواب عمومی معادله غیر همگن زیر را بدست آورید :

$$* \; y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$m = \pm i$$

$$\Rightarrow \; * \; y_1 = \cos x$$
$$y_2 = \sin x$$
$$\Rightarrow \; y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(اما) $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 \Rightarrow$

$$V_1 = \int \frac{-\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}}{W(y_1, y_2)} \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = \ln \cos x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$V_2 = \int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}}{1} dx = x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = (\ln \cos x)\cos x + x \sin x$$

* لذا ج عمومی بصورت ذیل می باشد :

* $$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (\ln \cos x)\cos x + x \sin x$$ *

معادلهٔ کُشی اویلر :

تعریف ـ معادله کشی اویلر بصورت زیر معرفی می شود :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

* در حالت $n=2$ معادله فوق بصورت زیر تبدیل می شود :

$$x^2 y'' + a x y' + b y = f(x)$$

* در حالتی که $f(x)=0$ است معادله کشی اویلر همگن است .

روش حل معادله کشی اویلر همگن مرتبهٔ دوّم :

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

فرض کنید x^m یک جواب معادله فوق باشد :

* $y' = m x^{m-1}$

$y'' = m(m-1)\, x^{m-2}$

(در معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow$

$$m(m-1)\, x^{m} + a m x^{m} + b x^{m} = 0$$

$x \neq 0$ بافرض $\Rightarrow$ $m(m-1) + am + b = 0$

« معادلهٔ شاخص »

(یا)

* $m^{2} + m(a-1) + b = 0$ *

الف - دو ریشه حقیقی m_1 و m_2 داریم :

* $y_1 = x^{m_1}$ $\qquad$ $y_2 = x^{m_2}$

ب - یک ریشه مضاعف m داریم :

* $y_1 = x^{m}$ $\qquad$ $y_2 = V\, y_1$

$$V = \int \frac{1}{x^{2m}}\, e^{-\int \frac{a}{x} dx}\, dx = \int \frac{e^{-a \ln x}}{x^{2m}}\, dx$$

$$= \int x^{-2m} \cdot x^{-a}\, dx = \int x^{-2m-a}\, dx \Rightarrow$$

* $V = \dfrac{1}{1-2m-a}\, x^{1-2m-a}$

$$\Rightarrow \quad * \; y_2 = x^{m} \cdot \frac{1}{1-2m-\alpha} x^{1-2m-\alpha} = \frac{1}{1-2m-\alpha} x^{1-m-\alpha}$$

(محاسبات صحیح :)

$$m_1 = m_2 = -\frac{\alpha-1}{2}$$

$x^{-\frac{\alpha-1}{2}}$ ریشه $\Rightarrow$

$$V = \int \frac{1}{\left(x^{-\frac{\alpha-1}{2}}\right)^2} e^{-\int \frac{\alpha}{x} dx} dx \quad \Rightarrow$$

$$V = \int \frac{1}{x^{-(\alpha-1)}} e^{-\alpha \ln x} dx = \int \frac{1}{x^{-\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

$$V = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\Rightarrow \quad * \; y_2 = x^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln x \; *$$

ج - (اگر معادله شاخص دارای ریشه مختلط باشد) :

$\alpha \pm i\beta$ ریشه مختلط

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{i\beta} = x^{\alpha} e^{i\beta \ln x} = x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)\right)$$

$$y_2 = x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{-i\beta} = x^{\alpha} \cdot e^{-i\beta \ln x} = x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad * \; Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$$

$$* \; Y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality

راه حل دوم برای حل معادلهٔ کشی اویلر :

$$* \quad x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

(تغییر متغیر) : $x = e^u \iff u = \ln x$

* با تغییر متغیر فوق معادله کشی اویلر به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می شود .

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{du}$$

2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{du} + \frac{1}{x} \frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{du} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{du^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{dy}{du} + \frac{d^2y}{du^2}\right)$$

* در معادله قرار می دهیم :

$$x^2 \frac{1}{x^2} \left(-\frac{dy}{du} + \frac{d^2y}{du^2}\right) + a x \cdot \frac{1}{x} \frac{dy}{du} + b y = 0$$

$$\underbrace{\frac{d^2y}{du^2} + (a-1) \frac{dy}{du} + b y = 0}$$

«یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت»

مثال - $x^2 y'' + 2 x y' - 6 y = 0$

راه حل اوّل -

$$m^2 + (2-1)m - 6 = 0$$

$$m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3, \quad m = 2$$

$$\Rightarrow y_1 = x^{-3}, \quad y_2 = x^2 \Rightarrow$$

$$* \; y = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

راه حل دوّم -

$$u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{du^2} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + (2-1)m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3, \quad m = 2$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{-3u} = x^{-3}$$

$$y_2 = e^{2u} = e^{2\ln x} = x^2$$

$$\Rightarrow * \; y = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

تذکّر - اگر معادلهٔ اویلر غیر همگن به فرم زیر باشد :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = x^{\alpha} P_m(\ln x)$$

۲ـ نکته: برای پیدا کردن یک جواب خصوصی برای معادلهٔ فوق جوابی به صورت $y_p = x^{\alpha} \tilde{P}_m(\ln x)$ در نظر می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل قرار داده و ضرایب چند جمله‌ای $\tilde{P}_m(\ln x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال ـ $x^2y'' + (-xy') + 2y = x\ln x$

$x^2y'' - xy' + 2y = 0$

$m^2 + (-1-1)m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 2m + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = 1 \pm i$

$\Rightarrow \quad y_1 = x\cos(\ln x)$

$y_2 = x\sin(\ln x)$

* $y_g = C_1 x\cos(\ln x) + C_2 x\sin(\ln x)$

$y_p = x(A_1 \ln x + A_0)$ ← جواب خصوصی

$y'_p = A_1 \ln x + A_0 + A_1$

$y''_p = \dfrac{A_1}{x}$

* در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2 \cdot \frac{A_1}{x} - x(A_1 \ln x + A_1 + A_0) + 2x(A_1 \ln x + A_0) = x \ln x$$

$$A_1 - A_1 \ln x - A_1 - A_0 + 2A_1 \ln x + 2A_0 = \ln x$$

$$A_1 \ln x + A_0 = \ln x$$ (مقدّ قرار می دهیم) $\Rightarrow$

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = x \ln x$$

$$\Rightarrow \; * \; y = y_g + y_p = xC_1 \cos(\ln x) + xC_2 \sin(\ln x) + x \ln x$$

* برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل باید نخست جواب عمومی همگن و سپس یک جواب خصوصی ناهمگن را یافته و باهم جمع کنید.

فرم کلی تر معادله دیفرانسیل اویلر :

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + \cdots\cdots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$$

راه حل اوّل - جواب را به صورت $y = (ax+b)^m$ در نظر گرفته و در داخل معادله قرار می دهیم و مطابق قبل عمل می کنیم تا m بدست آید.

راه حل دوّم - با تغییر متغیر $u = \ln(ax+b) \Leftrightarrow ax+b = e^u$ معادله دیفرانسیل به یک معادله همگن مرتبه - دوّم خطی تبدیل می شود.

پیدا کردن جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n با ضرایب ثابت در برخی از حالات :

* فرض کنید :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

۱- $f(x) = P_m(x)$

الف- ۰ ریشه معادله شاخص نباشد، که در این صورت جواب خصوصی را به صورت $y_p = \tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و در معادله قرار می‌دهیم و با متحد قرار دادن طرفین معادله ضرایب چند جمله‌ای $\tilde{P}_m(x)$ را می‌یابیم.

ب- ۰ ریشه معادله شاخص از مرتبهٔ تکرار s باشد که در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = x^s \tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و مانند قسمت (الف) عمل می‌کنیم.

مثال- $y'' - 2y' + y = x^2 + 2x$

(y'') $m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$

* $y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *

$$y'_p = 2a_2 x + a_1$$
$$y''_p = 2a_2$$

* در معادله قرار می دهیم :

$$2a_2 - 4a_2 x - 2a_1 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ -4a_2 + a_1 = 2 \\ 2a_2 - 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_1 = 6 \\ a_0 = 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_p = x^2 + 6x + 10$$

مثال - $y''' - y'' = 2x + 1$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$* \begin{cases} \lambda = 0 \quad s = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$* \; y_p = x^2(a_1 x + a_0) = a_1 x^3 + a_0 x^2$$
$$y'_p = 3a_1 x^2 + 2a_0 x$$
$$y''_p = 6a_1 x + 2a_0$$
$$y'''_p = 6a_1$$

$$6a_1 - 6a_1 x - 2a_0 = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_0 = -\frac{3}{2}$$

$$* \quad y_p = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

۲ - $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$

الف - α ریشه معادله شاخص نباشد، در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم و با متحد قرار دادن طرفین - ضرایب چند جمله ای $\tilde{P}_m(x)$ را می یابیم.

ب - α ریشه معادله شاخص باشد، که در اینصورت:
(از مرتبه تکرار s)

جواب خصوصی را به صورت: $y_p = x^s e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$
در نظر گرفته و به فرم قبل عمل می کنیم.

مثال - $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$

($\alpha = 1$ و $P_0(x) = 4$)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda = 1 \quad s = 2$$

* $y_p = x^2 \cdot A \cdot e^x$

$y'_p = 2Axe^x + Ax^2e^x$

$y''_p = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x$

* در معادله قرار می دهیم :

$$2Ae^x + 4e^xAx + Ax^2e^x - 4Axe^x - 2Ax^2e^x + Ax^2e^x = 4e^x$$

$\Rightarrow \quad A = 2$

$\Rightarrow$ * $y_p = 2x^2e^x$

مثال - $y''' - y'' = xe^{2x}$

$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad S = 0$

$\lambda = 1$

* حالت (ب)

* $y_p = (a_1x + a_0)e^{2x}$

$y'_p = a_1e^{2x} + 2(a_1x + a_0)e^{2x}$

$y''_p = 4a_1e^{2x} + 2a_1e^{2x} + 4(a_1x + a_0)e^{2x}$

$y'''_p = 8a_1e^{2x} + 4a_1e^{2x} + 8(a_1x + a_0)e^{2x}$

(در معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{4}$ و $a_0 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad y_p = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}\right) e^{3x}$$

۳- $f(x) = P_m(x) \cos\beta x + Q_n(x) \sin\beta x$

الف- اگر $\pm i\beta$ ریشه معادلهٔ شاخص نباشد. در این صورت جواب خصوصی را به فرم $y_p = \tilde{P}_k(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin\beta x$ در نظر می گیریم که در آن $k = Max(m, n)$ می باشد. این جواب را در معادله قرار داده و ضرایب $\tilde{P}_k(x)$ و $\tilde{Q}_k(x)$ را می یابیم.

ب- اگر $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از مرتبه تکرار s باشد. آنگاه جواب خصوصی را به فرم $y_p = x^s\left(\tilde{P}_k(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin\beta x\right)$ در نظر گرفته و مطابق قسمت (الف) عمل می کنیم.

۴- $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x) \cos\beta x + Q_n(x) \sin\beta x\right]$

* این حالت کامل بوده و شامل ۳ بخش قبلی نیز می شود.

الف- اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد. در اینصورت جواب خصوصی را به فرم ذیل در نظر می گیریم:

$$y_p = e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin\beta x\right]$$

$$k = Max(m, n)$$

سپس با قرار دادن آن در معادله ضرایب $\tilde{P}_k(x)$ و $\tilde{Q}_k(x)$

را بدست می آوریم .

ب - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخصی از مرتبهٔ تکرار S باشد که
در این صورت جواب خصوصی را به فرم :

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$$

$$k = \max(m, n)$$

درنظر گرفته و به فرم (الف) عمل می کنیم .

مثال - $y'' - 2y' = x\cos x + \sin x$

$(\tilde{P}_1(x) \quad \beta = 1)$ $\qquad$ $(\tilde{Q}_0(x) \quad \beta = 1)$

$m^2 - 2m = 0$ $\qquad$ $(\pm i\beta = \pm i \Leftarrow \beta = 1)$

$m = 0 \qquad m = 2$

$$* \; y_p = (A_1 x + A_0)\cos x + (B_1 + B_0)\sin x$$

$$y'_p = A_1\cos x - (A_1 x + A_0)\sin x + B_1\sin x + (B_1 x + B_0)\cos x$$

$$y''_p = -A_1\sin x - A_1\sin x - (A_1 + A_0)\cos x + B_1\cos x + B_1\cos x - (B_1 x + B_0)\sin x$$

(در معادله قرار می دهیم) $\Rightarrow$ $\qquad B_1 = -\frac{2}{5} \qquad B_0 = -\frac{3}{25}$

$$A_1 = -\frac{1}{5} \qquad A_0 = -\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \left(-\frac{1}{۵}x - \frac{٤}{۲۵}\right)\cos x + \left(-\frac{۲}{۵}x - \frac{۳}{۲۵}\right)\sin x$$

مثال - $y'' + y = \cos x + \sin x$

$$P_0(x) \qquad Q_0(x) \qquad \beta = 1$$

$$m^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm i \qquad S = 1$$

$$y_p = x\left[A\cos x + B\sin x\right]$$

$$y'_p = x(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x)$$

$$y''_p = x(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) + (-A\sin x + B\cos x)$$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}$

$$* \quad y_p = \left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)x$$

نکته - هرگاه معادله دیفرانسیل به فرم :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y =$$

$$R_1(x) + R_2(x) + \dots + R_N(x)$$

۲- نگاه برای یافتن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل فوق یک جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را یافته با هم جمع می کنیم :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x)$$
$$\quad'' \qquad\qquad '' \qquad = R_2(x)$$
$$\vdots$$
$$\quad'' \qquad\qquad '' \qquad = R_N(x)$$

مثال - $y'' - 2y' = \cos x + e^x + x$

① $y'' - 2y' = \cos x$ $\qquad m^2 - 2m = 0$

$m = 0 \ , \ m = 2$

$$y_{p_1} = A\cos x + B\sin x$$
$$y_{p_1}' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_{p_1}'' = -A\cos x - B\sin x$$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad B = -\frac{2}{5} \qquad A = -\frac{1}{5}$

$$* \ y_{p_1} = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$$

② $y'' - 2y' = e^x$ $\qquad m = 0 \qquad m = 2$

$\alpha = 1$ ریشه معادله مشخصه نیست.

$$y_{p_2} = Ae^{x}$$
$$y'_{p_2} = Ae^{x}$$
$$y''_{p_2} = Ae^{x}$$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A = -1$

$$* \; y_{p_2} = e^{x}$$

(۳) $y'' - 2y' = x \qquad m = 0$ و $m = 2$

$$y_{p_3} = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$
$$y'_{p_3} = 2A_1 x + A_0$$
$$y''_{p_3} = 2A_1$$

(در معادله قرار می‌دهیم) $\Rightarrow \quad A_1 = -\frac{1}{4} \qquad A_0 = -\frac{1}{4}$

$$* \; y_{p_3} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$\Longrightarrow \; * \; y_p = -\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x - e^{x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \; *$$

تبدیلات لاپلاس :

تعریف - تبدیل، یک تابع است که بردو دامنهٔ آن توابع می‌باشد.
مثل اپراتور (عملگر) مشتق : $Df(x) = f'(x)$

تعریف - تبدیل T را خطی گوییم هرگاه به ازای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ و اعداد ثابت α و β داشته باشیم:

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)]$$

مثال - تبدیل مشتق یک تبدیل خطی است:

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

تعریف - تبدیل لاپلاس یک تابع مانند $f(x)$ به $L[f(x)]$ نشان داده می شود و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$L[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = F(s)$$

قضیه - تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است.

قضیه وجود تبدیل لاپلاس -

فرض کنید تابع $f(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد و نیز اعداد α و M موجود باشد بطوریکه $|f(x)| < Me^{\alpha x}$ ($f(x)$ از رتبهٔ نمائی می باشد) آنگاه تابع لاپلاس $f(x)$ موجود است.
(این قضیه فقط شرط لازم است و معکوس آن همیشه صادق نیست).

مثال ۱ـ $f(x) = 1 \qquad L[1] = ?$

$$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot 1\, dx = \left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

(اگر $s>0$) $*$ تبدیل لاپلاس 1 فقط به ازای $s>0$ موجود است.

مثال ۲ـ $f(x) = x$

$$L[x] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot x\, dx$$

$$\begin{cases} e^{-sx}\, dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-sx} \\ u = x \Rightarrow du = dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[x] = \left(-\frac{1}{s} x e^{-sx}\right)_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dx$$

$$\Rightarrow * \; L[x] = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

مثال ۳ـ $f(x) = x^n$

$$L[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot x^n\, dx$$

$$\begin{cases} e^{-sx}\,dx = dV \Rightarrow -\dfrac{1}{s}e^{-sx} = V \\ u = x^n \Rightarrow du = n x^{n-1}\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \underbrace{\left(-\frac{x^n}{s}e^{-sx}\right)_0^{+\infty}}_{0} + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^{n-1}\,dx}_{L[x^{n-1}]}$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}L[x^{n-1}]$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}L[x^{n-2}]$$

$$\Rightarrow L[x^n] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{L[1]}_{\frac{1}{s}}$$

x^0

$$\Rightarrow * \; L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \; *$$

مثال ٤ -

$$f(x) = e^{ax}$$

$$L[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\cdot e^{ax}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}\right)_0^{+\infty} \xrightarrow{s>a} * \; L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$$

مثلاً :

$$*\ L[\cosh ax] = L\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{۲}\right]$$

$$= \frac{1}{۲}L[e^{ax}] + \frac{1}{۲}L[e^{-ax}] =$$

$$\frac{1}{۲}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{۲}\frac{1}{s+a} = \frac{\frac{1}{۲}(s+a)+\frac{1}{۲}(s-a)}{s^{۲}-a^{۲}}$$

$s>a$ $\qquad$ $s>-a$

$$= \frac{s}{s^{۲}-a^{۲}}$$

توجه :

$$\begin{cases} s>a \\ -s<a \end{cases} \Rightarrow -s<a<s$$

$$\Rightarrow (s>|a|)$$

** بطور مشابه می توان نشان داد :

$$*\ L[\sinh ax] = \frac{a}{s^{۲}-a^{۲}} \quad (s>|a|)$$

مثال ۵ـ $f(x) = \cos ax$

$$L[\cos ax] = \int_0^{+\infty} \cos ax\, e^{-sx}\,dx$$

$$*\begin{cases} e^{-sx}dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-sx} \\ u = \cos ax \Rightarrow du = -a\sin ax\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[\cos ax] = \left(-\frac{\cos ax}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty} - \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} \sin ax \, e^{-sx} \, dx$$

$$* \begin{cases} e^{-sx} dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-sx} \\ u = \sin ax \Rightarrow du = a \cos ax \, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow L[\cos ax] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \underbrace{\left[-\frac{\sin ax}{s} e^{-sx}\right)_0^{+\infty}}_{0}$$

$$+ \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2} L[\cos ax] \Rightarrow$$

$$L[\cos ax]\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$L[\cos ax] = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{a^2+s^2}{s^2}} \Rightarrow$$

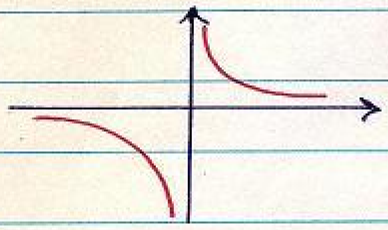
$$* \ L[\cos ax] = \frac{s}{a^2+s^2} \ *$$

$$* \ L[\sin ax] = \frac{a}{a^2+s^2} \ *$$

بطریق مشابه

مثال ۶ـ $f(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ قطعه قطعه پیوسته نیست :



(امّا لاپلاس آن موجود است)

$$L\left[\frac{1}{x}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-sx}\, dx$$

تعریف ـ تبدیل معکوس لاپلاس را به (L^{-1}) نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$L[f(x)] = f(s) \iff L^{-1}[F(s)] = f(x)$$

* $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

* $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$

* $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2!} L\left[\frac{2!}{s^3}\right] = \frac{1}{2} x^2$

* $L^{-1}\left[\frac{s^2-4s+2}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right]$

$= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = 1 - 4x + x^2$

تذکر - اگر $L[f(x)]$ موجود و برابر $f(s)$ باشد $\Rightarrow \lim\limits_{s \to \infty} f(s) = 0$

* مثلاً : $L^{-1}[s^2]$ موجود نمی‌باشد .

قضیه - اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه وجود لاپلاس صدق کند آنگاه :

$$L[f'(x)] = s L[f(x)] - f(0)$$

اثبات - $\int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} \, dx$

$$\begin{cases} f'(x)\,dx = dv \Rightarrow v = f(x) \\ e^{-sx} = u \Rightarrow du = -s\,e^{-sx}\,dx \end{cases}$$

$$= \left(f(x)\,e^{-sx}\right)_0^{+\infty} + s\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-sx}\,dx}_{L[f(x)]}$$

$$= -f(0) + s\,L[f(x)]$$

$$L[f''(x)] = L[(f'(x))'] =$$

$$s\,L[f'(x)] - f'(0) =$$

$$s\,[s\,L[f(x)] - f(0)] - f'(0) \Rightarrow$$

$$* \; L[f''(x)] = s^2 L[f(x)] - s\,f(0) - f'(0) \; *$$

مثال ـ $g(t) = t e^t \qquad g(0) = 0$

$$g'(t) = e^t + te^t = e^t + g(t)$$

$$L[g'(t)] = sL[g(t)] - g(0) \Rightarrow$$

$$L[g'(t)] = L[e^t] + L[g(t)] = sL[g(t)] - 0$$

$$\Rightarrow L[g(t)](-1+s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$* \; L[g(t)] = \frac{1}{(s-1)^2} \; *$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \Rightarrow 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

* نکته :

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

قضیه - هرگاه $f(t)$ در شرایط قضیه وجود لاپلاس صدق کند آنگاه :

$$L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{L[f(u)]}{s} \quad f(s)$$

* و یا بالعکس :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t f(u)\,du$$

اثبات - به فرض : $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$

$$g'(t) = 1 \times f(t) - 0 \times f(0) = f(t) \Rightarrow$$

$$L[g'(t)] = L[f(t)] = s\,L[g(t)] - g(0)$$

$$\Rightarrow F(s) = s\,L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] \Rightarrow$$

$$* \quad L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

مثال - $L^{-1}\left[\dfrac{2}{s(s^2+4)}\right]$

$$= L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{s^2+4}}{s}\right] = \int_0^t \sin 2x\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$$

مثال - $L^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{\frac{2}{s(s^2+4)}}{s}\right]$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)_0^t$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - 0$$

صفحه ۱۴۹ _ ۱۹ _

$y'' - 2y' - 3y = 0$

$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 7$

$L[y''] - 2L[y'] - 3L[y] = L[0] = 0$

* باید تمام مسئله را به صورت $L[y]$ درآوریم :

$s^2 L[y] - s\,y(0) - y'(0) - 2\,[s\,L[y] - y(0)]$

$- 3L[y] = 0 \Rightarrow$

$L[y]\,(s^2 - 2s - 3) = s + 7 - 2 = s + 5 \Rightarrow$

* $L[y] = \dfrac{s+5}{s^2 - 2s - 3}$ * باید اینگونه کسرها را تفکیک نماییم :

$\Rightarrow L[y] = \dfrac{s+5}{(s+1)(s-3)} = \left[\dfrac{2}{s-3} - \dfrac{1}{s+1}\right]$

* از طرفین لاپلاس معکوس می گیریم :

* $y(t) = L^{-1}\left[\dfrac{2}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] = 2e^{3t} - e^{-t}$

قضیه اوّل انتقال (انتقال بر محور s) :

فرض کنید : $L[f(t)] = F(s)$ آنگاه :

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$ « مهم »

اثبات - $L[e^{at}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} \cdot dt = F(s-a)$$

قضیه دوّم انتقال (انتقال بر محور t) :

فرض کنید : $L[f(t)] = F(s)$

آنگاه :

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)] = \tilde{f}(t)$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$ « مهم »

اثبات - $L^{-1}[e^{-as}F(s)] = ?$

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(a+t)s}\cdot dt$$

(تغییر متغیر) : $a+t=u \Rightarrow dt=du$

$$\Rightarrow e^{-as}F(s) = \int_a^{+\infty} f(u-a)\,e^{-su}\,du = L[\tilde{f}(u)]$$

مثال ـ $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}e^{-3s}\right] = ?$

$e^{-as} = e^{-3s} \Rightarrow a=3$

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2}t^2 = f(t) \Rightarrow$

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t<3 \\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & t>3 \end{cases}$$

تابع پله‌ای : $H(t)$ یا $u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

تابع پله‌ای (هویساید) $= u(t-a) = H(t-a) = \begin{cases} 0 & t-a<0 \\ 1 & t-a>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow H(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as} F(s)\right] = H(t-a)\, f(t-a)$$

نکته ـ فرض می کنیم :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & 0 < t < a_1 \\ g_2(t) & a_1 < t < a_2 \\ g_3(t) & a_2 < t < a_3 \\ g_4(t) & a_3 < t \end{cases}$$

* این نوع توابع پله‌ای را می توان با استفاده از هیوسایدِ بصورت زیر نوشت :

$$g(t) = g_1(t) + \left[g_2(t) - g_1(t)\right] H(t-a_1) + \left[g_3(t) - g_2(t)\right] H(t-a_2)$$

$$+ \left[g_4(t) - g_3(t)\right] H(t-a_3)$$

* در اغلب لاپلاس گیری ها با توابع پله‌ای زیاد برخورد می کنیم ، لذا اگر بتوانیم توابع پله‌ای را به فرم دوم درآوریم در حل مسائل بسیار مفید خواهد بود .

مثال ـ $\mathcal{L}\left[H(t-a)\right] = ?$

$$= \int_0^a \cancel{0 \cdot e^{-st}}\, dt + \int_a^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)_a^{+\infty}$$

$= \frac{1}{s} e^{-as}$

$\boxed{\text{فرمول مستقر} \quad : \quad \mathcal{L}[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}}$

مثال - لاپلاس تابع زیر را بدست آورید .

$$h(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<1 \\ -1 & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

$* \quad h(t) = 0 + [-1-0]\,H(t-1) + [0-(-1)]\,H(t-2)$

$h(t) = -H(t-1) + H(t-2)$

$\mathcal{L}[h(t)] = -\mathcal{L}[H(t-1)] + \mathcal{L}[H(t-2)]$

$\mathcal{L}[h(t)] = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$

مثال - $y'' + 2y' + 5y = h(t) \qquad y(0) = 2$

$y'(0) = -4$

($h(t)$ همان تابع مثال قبل است)

$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(t)]$

$s^2\mathcal{L}[y] - s\,y(0) - y'(0) + 2s\,\mathcal{L}[y] - 2y(0) + 5\mathcal{L}[y]$

$= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$

$$\Rightarrow L[y]\,(s^2+2s+5) = 2s - 4 + 4 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{2s}{s^2+2s+5} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+5)}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right]}_{①} - \underbrace{L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right]}_{②} + \underbrace{L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+5)}\right]}_{③}$$

①: $L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right]$

$$= 2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right] - L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right]$$

* این همان $\cos 2t$ است که s آن
به اندازهٔ ۱+ انتقال پیدا کرده.

$$= 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t$$

②: $L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right] = L^{-1}\left[\underbrace{e^{-s}}_{e^{-as}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}}_{F(s)}\right]$

$$= H(t-1)\cdot f(t-1)$$

(اما) $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{(s+1)^2+4}}{s}\right]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt \qquad \begin{cases} e^{-t}dt = dv \Rightarrow v = -e^{-t} \\ u = \sin 2t \Rightarrow du = 2\cos 2t\,dt \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left((-e^{-t}) \cdot \sin 2t \right)_0^t + \underbrace{2\int_0^t e^{-t} \cos 2t \, dt}\, \right]$$

$$e^{-t} dt = dv \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-t}$$

$$u = \cos 2t \quad \Rightarrow \quad du = -\sin 2t \, dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t - \left(\cos 2t \cdot e^{-t} \right)_0^t - 2\int_0^t e^{-t} \sin 2t \, dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}\int_0^t e^{-t} \sin 2t \, dt = -\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t - \left(\cos 2t \cdot e^{-t} \right) + 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t e^{-t} \sin 2t \, dt = -\frac{1}{5} e^{-t} \sin 2t - \frac{2}{5} \cos 2t \, e^{-t} + \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)} \right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} e^{-t} \sin 2t - \frac{2}{5} \cos 2t \, e^{-t} + \frac{2}{5} \right) = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad * \quad L^{-1}\left[e^{-s} \frac{1}{s(s^2+2s+5)} \right] = H(t-1) \; f(t-1)$$

$$= H(t-1)\left(-\frac{1}{10} e^{-(t-1)} \sin(2t-2) - \frac{1}{5} \cos(2t-2) \, e^{-(t-1)} + \frac{1}{5} \right)$$

$$(3): \quad L^{-1}\left[e^{-2s} \cdot \frac{1}{s(s^2+2s+5)} \right] = H(t-2) \; f(t-2)$$

$$= H(t-2)\left(-\frac{1}{10} e^{-(t-2)} \sin(2t-4) - \frac{1}{5} \cos(2t-4) \, e^{-(t-2)} + \frac{1}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \quad *** \quad y = 2 \times (1) + (2) + (3)$$

* $H(t-1)$ تابعی شناخته شده است لذا خودش را قرار می‌دهیم.

مثال - لاپلاس تابع زیر را بدست آورید .

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \\ \sin t & t>2\pi \end{cases}$$

* اول تابع را به فرم پله ای در می آوریم :

$$1+[0-1]\,H(t-\pi)+[\sin t-0]\,H(t-2\pi)=$$
$$1-H(t-\pi)+\sin t\,H(t-2\pi)\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}\right)+L\left[\sin(t-2\pi)\,H(t-2\pi)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}\right)+\left(e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\boxed{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=H(t-a)f(t-a)}$$

قضیه مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس :

فرض کنید : $L[f(t)]=F(s)$ باشد . یعنی :

$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$. حال نسبت به s مشتق می گیریم :

$$F'(s)=\int_0^{+\infty}-e^{-st}\cdot t\,f(t)\,dt\Rightarrow$$

$$F'(s)=-L[t\,f(t)]$$

و بطور کلی :

$$F^{(n)}_{(s)} = (-1)^n \mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]$$

قضیه انتگرال گیری تبدیل لاپلاس :

فرض کنید : $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_{s}^{\infty} F(s)\, ds$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot e^{-st}\, dt = \int_{s}^{\infty} F(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to 0} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st}\, dt = \lim_{s \to 0} \int_{s}^{\infty} F(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^{\infty} F(s)\, ds}$$ (مهم)

* $\mathcal{S}$ با s فرق دارد.

(مثال در صفحه ۸۲)

قضیه پیچش : (Convolution)

فرض کنید :

$$* \quad L[f(t)] = F(s)$$

$$* \quad L[g(t)] = G(s)$$

آنگاه :

$$L\left[\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\right] = F(s) \cdot G(s) \quad **$$

$$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)\, du \quad **$$

مثال- $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right]$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow f(t) = t$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow g(t) = \sin t$$

$$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t u \sin(t-u)\, du$$

$$\begin{cases} \sin(t-u)\, du = dv \Rightarrow v = C(t-u) \\ u = w \Rightarrow du = dw \end{cases}$$

$$= -\int_0^t C(t-u)\, du + \Big(u\, C(t-u)\Big)_0^t =$$

$$t + \Big(\sin(t-u)\Big)_0^t = t - \sin t$$

کاربردهای تبدیلات لاپلاس :

الف) در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل :

تعریف - دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم زیر تعریف می شود :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = a_1 y(t) + b_1 x(t) + f_1(t) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = a_2 y(t) + b_2 x(t) + f_2(t) \end{cases}$$

* اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ صفر باشند دستگاه معادلات را همگن مرتبه اول گوئیم و در غیر این صورت آنرا غیر همگن گوییم . و نیز هر گاه شرایط :

$$y(t_0) = y_0$$
$$x(t_0) = x_0$$

را داشته باشیم مسئله را یک مسئله اولیه گوییم و آنگاه با استفاده از تبدیلات لاپلاس می توان یک جواب به صورت زیر برای آن بدست آوریم :

$$\begin{cases} y(t) \\ x(t) \end{cases}$$

تذکر - دستگاه معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر هم به شیوهٔ بالا تعریف می شود.

مثال -
$$\begin{cases} y' + x = 0 \\ x' + (-y) = 0 \end{cases} \qquad y(0) = 1 \quad x(0) = 0$$

* از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$* \begin{cases} sL[y] - y(0) + L[x] = 0 \\ sL[x] - x(0) - L[y] = 0 \end{cases}$$

$$-s \begin{cases} sL[y] + L[x] = 1 \\ sL[x] - L[y] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$* \quad -L[y](s^2+1) = -s \Rightarrow L(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \Rightarrow y = \cos t$$

اگر: (معادله پایین $\times s$) $\Rightarrow L[x](s^2+1) = 1$

$$\Rightarrow L[x] = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow x(t) = \sin t$$

مثال -

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + 3y_2 \\ y_2'' = 4y_1 - 4e^t \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 3 \\ y_2'(0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} s^2L[y_1] - s\,y_1(0) - y_1'(0) = L[y_1] + 3L[y_2] \\ s^2L[y_2] - s\,y_2(0) - y_2'(0) = 4L[y_1] - \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} s^2 \quad (s^2-1)\,L[y_1] - 3L[y_2] = 2s+3 \\ 3 \quad s^2 L[y_2] - 4L[y_1] = s+2-\dfrac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(s^4-s^2-12)}\,L[y_1] = 2s^3+3s^2+3s+6-\frac{12}{s-1}$$

: (باید تجزیه شود) :

$$\Rightarrow (s^2-4)(s^2+3)\,L[y_1] = \frac{2s^4+3s^3+3s^2+6s-2s^3-3s^2-3s-6-12}{s-1}$$

$$\Rightarrow (s^2-4)(s^2+3)\,L[y_1] = \frac{2s^4+s^3+3s-18}{s-1}$$

$$\Rightarrow L[y_1] = \frac{2(s^4-9)+s(s^2+3)}{(s^2-4)(s^2+3)(s-1)}$$

$$\Rightarrow L[y_1] = \frac{(s^2+3)\,[2s^2-6+s]}{(s^2-4)(s^2+3)(s-1)}$$

$$\Rightarrow L[y_1] = \frac{(s+2)(s-\frac{3}{2})}{(s-2)(s+2)(s-1)} = 2\,\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-2)(s-1)}$$

$$\Rightarrow L[y_1] = 2\left(\frac{1/2}{s-2}+\frac{1/2}{s-1}\right) \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{2}{2}e^{+2t} + \frac{2}{2}e^{+t}$$

* وقتی معادله $2s^2-6+s$ را حل می کنیم، باید ضریب a ضرب شود (یعنی ضریب s^2)

$$\Rightarrow y_1 = e^{2t}+e^{t}$$

y_1 را در معادله ① قرار می‌دهیم. $\Rightarrow (s^2-1)\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-1}\right) - 3L[y_2] = 2s + 3$

$$\Rightarrow \frac{(s+1)(2s-3)}{s-2} - 2s - 3 = 3L[y_2]$$

$$\frac{\cancel{2s^2}-\cancel{3s}+\cancel{2s}-3-\cancel{2s^2}-\cancel{3s}+\cancel{4s}+6}{s-2} = 3L[y_2]$$

$$\frac{3}{s-2} = 3L[y_2] \quad \Rightarrow \quad L[y_2] = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = e^{2t}$$

(ب) -

حل معادلات انتگرالی بکمک تبدیلات لاپلاس :

مثال -

$$* \quad \left\{ y(t) = t + \int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du \right.$$

* باید معادله را به شکلی درآوریم که :

۱- بتوانیم از طرفین لاپلاس بگیریم.

۲- « « از قضیه پیچش استفاده کنیم.

$$* \quad L[y(t)] = L[t] + L\left[\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du\right]$$

* $L[g(t)] = \frac{1}{s^2} + L[g(t)]\; L[\sin t]$

$L[g(t)]\left(1 + \frac{-1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$

$L[g(t)] = \dfrac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$

$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = t + \frac{1}{3!}t^3$

$\Rightarrow$ « $y(t) = t + \frac{1}{6}t^3$ »

مثال - $(\text{فهم})^{n+1}$

$n \longrightarrow \infty$

$f(t)$ تابع متناوب .

دورهٔ تناوب = t .

تابع قطعه قطعه پیوسته است .

« $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$ »

اثبات - * $f(t) = f(t + np) \quad n \in Z$

$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\, dt$

(تغییر متغیر) $\rightarrow$ $t = u$ $t = u + p$

$$+\int_{2P}^{3P} e^{-St} f(t)\, dt + \ldots\ldots$$

$t = u + 2P$

$$= \int_0^P e^{-S(u)} f(u)\, du + \int_0^P e^{-S(u+P)} f(u+P)\, du +$$

$$\int_0^P e^{-S(u+2P)} f(u+2P)\, du + \ldots\ldots$$

** چون تابع متناوب است : $f(u+P) = f(u+2P) = \cdots = f(u)$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du + e^{-SP}\int_0^P e^{-Su} f(u)\, du +$$

$$e^{-2PS}\int_0^P e^{-Su} f(u)\, du$$

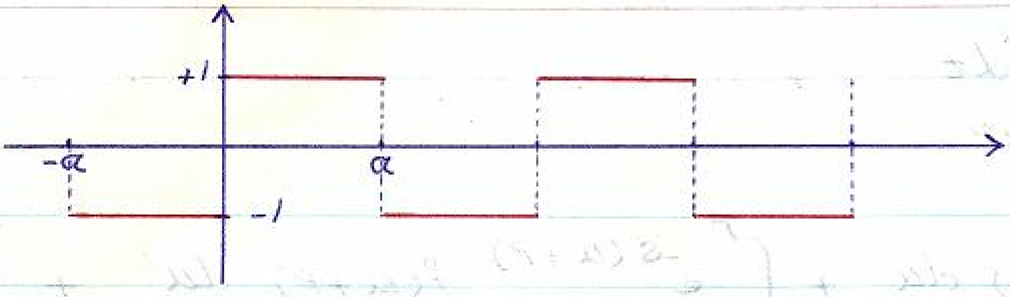
$$= \int_0^P e^{-Su} f(u)\, du \times \left(1 + e^{-SP} + e^{-2SP} + \cdots\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 + e^{-SP} + (e^{-SP})^2 + (e^{-SP})^3 + \cdots\right)}_{\frac{1}{1-e^{-SP}}} \int_0^P e^{-St} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-SP}} \int_0^P e^{-St} f(t)\, dt$$

مثال- موج مربع متناوب :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ -1 & -a < x < 0 \end{cases} \qquad P = 2a$$



$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\int_0^a e^{-st}\,dt - \int_a^{2a} e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)_0^a + \left(\frac{1}{s}e^{-st}\right)_a^{2a}\right] =$$

$$\frac{1}{1-e^{-2as}}\left[-\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{2as} - \frac{1}{s}e^{-as}\right]$$

$$= \frac{-\frac{2}{s}e^{-as} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-2as}}{1-e^{2as}}$$

مثال از صفحهٔ ۷۴ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

این انتگرال با روشهای قبلی غیرقابل حل است.

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+1}\,ds = Arc\,tg\,s\Big)_0^{\infty} =$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری های توانی :

یادآوری - تعریف - سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ یا بطور گسترده : $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$ را که در آن x_0 یک مقدار ثابت می باشد را سری توانی گوئیم .

همگرائی سری توانی - اگر $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$ مجموع جزئی Nاُم باشد :

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ به ازای همان مقادیر x همگرا می باشد. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{N\to\infty} S_N$ به ازای مقادیری از x موجود باشد

* برای سهولت x_0 را مساوی صفر در نظر می گیریم .

انواع سری های توانی :

۱- سری توانی که به ازای همه مقادیر x همگرا است . (شعاع همگرائی ∞ است)

مثال : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

۲- سری توانی که در همه نقاط به جز صفر واگرا است . (شعاع همگرائی ۰ است)

مثال : $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + \ldots$

۳- سری توانی که در یک بازه همگراست (به شعاع R) و در خارج از آن بازه واگرا است . (شعاع همگرائی R است)

سری هندسی $1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$: مثال

$$|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$-1 \; (\quad 0 \quad) \; +1$$

یک روش برای پیدا کردن شعاع همگرائی : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

«آزمون نسبت»

$$\lim \frac{|a_{n+1} (x-x_0)^{n+1}|}{|a_n (x-x_0)^n|} < 1$$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$|x - x_0| < \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

$$a_n = n$$
$$a_{n+1} = n+1$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$a_n = 1$$
$$a_{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

خواص سری های توانی (چکیده):

۱- هرگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ به تابع $f(x)$ و سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ به تابع $g(x)$ همگرا باشد؛ آنگاه مجموع آندو یعنی:

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ به تابع $f(x) + g(x)$ همگرا می باشد.

۲- اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به تابع $f(x)$ همگرا باشد آنگاه می‌توان از جملات سری تک تک مشتق گرفت یعنی:

$$\left(f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right)$$

۳- تعریف- تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی است هرگاه بازه‌ای به شعاع R موجود باشد به گونه‌ای که به ازای x هائی که داخل این بازه است $f(x)$ را بصورت سری توانی:
$|x - x_0| < R$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ بتوان نوشت که در این بازه همگرا باشد.

قضیه- اگر در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$ توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشد آنگاه معادله فوق دارای یک سری توانی است که در همان فاصله همگرایی توابع $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ برقرار است.

مثال- $x_0 = 0$ $\qquad y'' + x y' + y = 0$

$a_n = \frac{a_0}{n!}$

* چند جمله‌ای ها همواره تحلیلی هستند و ($\sin x, \cos x, e^x$).

* با قرار دادن y در داخل معادله ـ ضرایب a_n را بدست می‌آوریم. ** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

* $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ * $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Rightarrow$ 1 : $n_{\text{جدید}} = n_{\text{قدیم}} - 2$ $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n \right] x^n + 2a_2 + a_0 = 0$

$\Rightarrow$ * $2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$

* $(n+2)\cancel{(n+1)} a_{n+2} + \cancel{(n+1)} a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

معادله بازگشتی (ریور سیبل)

* $(n+2) a_{n+2} = -a_n \Rightarrow$

$$* \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+2}$$ (معادله ریور سیبل)

$$n=0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4} = +\frac{a_0}{2\times 4}$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\times 4\times 6}$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$$

حال برای جملات فرد باید عمل کنیم :

$$n=1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5} = +\frac{a_1}{3\times 5}$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\times 5\times 7}$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}$$

حال جواب کلی را می یابیم :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(a_0 - \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_0}{2\times 4}x^4 - \cdots\right) +$$

$$\left(a_1 x - \frac{a_1}{3}x^3 + \frac{a_1}{3\times 5}x^5 - \cdots\right)$$

$$= a_0\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \cdots\right)}_{y_1} + a_1\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \cdots\right)}_{y_2}$$

$$* \ y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

مثال - $x_0 = 0$: $(1-x^2)y'' - 2xy' + P(P+1)y = 0$

(معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبه P)

$$* \ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$* \ y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \Rightarrow$$

$$* \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + P(P+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\underset{①}{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$+ P(P+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

① : $n_{\text{قدیم}} - 2 = n_{\text{جدید}}$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + P(P+1) a_n \right] x^n$$

$$+ 2a_2 + 6a_3 x - 2a_1 x + P(P+1) a_0 + P(P+1) a_1 x = 0$$

$$2a_2 + p(p+1)\,a_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_2 = -\frac{p(p+1)}{2}\,a_0$$

$$6a_3 + [p(p+1) - 2]\,a_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad a_3 = -\frac{p(p+1)-2}{6}\,a_1$$

$$\forall n \geq 2 : \quad (n+2)(n+1)\,a_{n+2} + a_n \underbrace{\left[-n^2 + n - 2n + p(p+1)\right]}_{-n^2 - n + p(p+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{-n^2 - n + p(p+1)}{(n+2)(n+1)}\,a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-(p-n)(p+n+1)\,a_n}{(n+2)(n+1)}$$ (معادله بازگشتی)

الف- جملات زوج :

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2}\,a_0$$

$$a_4 = \frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}\,a_2 = +\frac{(p-2)(p)(p+1)(p+3)}{2\times 3\times 4}\,a_0$$

$$a_6 = \frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}\,a_4 = -\frac{(p-4)(p-2)\,p\,(p+1)(p+3)(p+5)}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}\,a_0$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{(p-2n+2)\cdots(p-2)\;p\;(p+1)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}\,a_0$$

ب - جملات فرد :

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2\times 3}\, a_1$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}\, a_3 = +\frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{2\times 3\times 4\times 5}\, a_1$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}\, a_5 = -\frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}\, a_1$$

$$\Rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{(p-2n+1)\cdots(p-3)(p-1)(p+4)\cdots(p+2n)\; a_1}{(2n+1)!}$$

جواب کلی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2}x^2 + \frac{(p-2)(p)(p+1)(p+3)}{2\times 3\times 4}x^4 - \cdots\right) +$$

$$a_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{2\times 3}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{2\times 3\times 4\times 5}x^5 - \cdots\right)$$

$$= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-2n+1)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} +$$

$$a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-2n+2)\cdots(p-4)(p-2)\,p\,(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}\, x^{2n}$$

یک فرمول مهم :

$$\begin{cases} L[f(t)] = F(s) \\ (-1)^n L\left[t^n f(t)\right] = \dfrac{d^n F(s)}{ds^n} \end{cases}$$

مثال -

$$\mathcal{L}[xy'] = ?$$

$$\mathcal{L}[y'] = s\,\mathcal{L}[y] - y(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[xy'] = \frac{-d\left[s\mathcal{L}[y] - y(0)\right]}{ds}$$

خدمات فنی قابل ارائه از طرف شرکت مهندسی **پتروپالامحور** :

- طراحی سیستم های لوله کشی (**Piping**)
- طراحی سیستم های مکانیکی ثابت (**Fixed Equipment**)
- طراحی سیستم های مکانیکی دوار (**Rotary Equipment**)
- طراحی سیستم های تاسیسات مکانیکی و تهویه مطبوع (**Plumbing & HVAC**)
- طراحی تاسیسات مکانیکی زیربنائی
- طراحی سیویل و سازه در پروژه های عمرانی و صنعتی

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

کیفیت تعهد ماست