۴-۴قدر مطلق

اگرx عدد حقیقی باشد قدر مطلق x را با نماد $|x|$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -\mathrm{x} & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$

مثال ۱:

$|-5| = 5$ $\quad$ $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ $\quad$ $|\sqrt{-2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

خواص قدر مطلق

1) $|x| = |-x|$
2) $|xy| = |x||y|$
3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
4) $|x+y| \leq |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$ (نامساوی مثلث)
5) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$ $\quad (a \geq 0)$
6) $|x| = |y| \Rightarrow \mathrm{x} = \pm \mathrm{y}$
7) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$ $\quad (a > 0)$
8) $|x| > a \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$ $\quad (a > 0)$
9) $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال ۲: معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید.

1) $|2x-5| = 3$ $\quad$ 2) $|x+1| = |2x-4|$
3) $\big||x|-2\big| = 5$ $\quad$ 4) $|x+2| = 3x-5$

حل :

1) $|2x-5| = 3 \Rightarrow 2\mathrm{x}-5 = \pm 3$
$2x-5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
$2\mathrm{x}-5 = -3 \Rightarrow 2\mathrm{x} = 2 \Rightarrow \mathrm{x} = 1$

2) $|x+1| = |2x-4| \Rightarrow x+1 = \pm(2x-4)$
$x+1 = 2x-4 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$
$x+1 = -2x+4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

3) $\big||x|-2\big| = 5 \Rightarrow |x|-2 = \pm 5$
$|x|-2 = 5 \Rightarrow |x| = 7 \Rightarrow \mathrm{x} = 7 \quad , \quad \mathrm{x} = -7$
$|x|-2 = -5 \Rightarrow |x| = -3$ معادله جواب ندارد

4) $|x+2| = 3x-5 \Rightarrow x+2 = \pm(3x-5)$
$x+2 = 3x-5 \Rightarrow -2x = -7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$
$x+2 = -3x+5 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ غیر قابل قبول

مثال ۳:عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

1) $A = |x-2|$ 2)$B = x|x-1|$

3) $C = |x| + |x-3|$

حل :

1) $A = |x-2| \Rightarrow A = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -x+2 & x < 2 \end{cases}$

2) $B = x|x-1| \Rightarrow \mathrm{B} = \begin{cases} \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} & \mathrm{x} \geq 1 \\ -\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} & \mathrm{x} < 1 \end{cases}$

3) $C = |x| + |x-3| \Rightarrow C = \begin{cases} x + x - 3 & x > 3 \\ x - x + 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ -x - x + 3 & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow C = \begin{cases} 2x-3 & x > 3 \\ 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ -2x+3 & x < 0 \end{cases}$

مثال ۴ : نامعادلات زیر را حل کنید.

1)$|2x-7| \leq 3$ 2) $|3x+1| > 2$

3) $|x+1| \leq |2x+3|$ 4) $\frac{1}{|x|} > 2$

حل :

1) $|2x-7| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2\mathrm{x} - 7 \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2\mathrm{x} \leq 10$

$\Rightarrow 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow$ جواب مجموعه $= [2,5]$

2) $|3x+1| > 2 \Rightarrow 3x+1 < -2$ یا $3x+1 > 2 \Rightarrow$

$3x < -3$ یا $3x > 1 \Rightarrow x < -1$ یا $x > \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ جواب مجموعه $= (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

3) $|x+1| \leq |2x+3| \Rightarrow (x+1)^2 \leq (2x+3)^2$

$\Rightarrow (x+1)^2 - (2x+3)^2 \leq 0 \Rightarrow (x+1+2x+3)(x+1-2x-3) \leq 0$

$\Rightarrow (3x+4)(-x-2) \leq 0$

$3x+4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ $\qquad -x-2 = 0 \Rightarrow x = -2$

X	- ∞		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		+∞
p		-	۰	+	۰	-	

مجموعه جواب $=(-\infty, -2] \cup [-\frac{4}{3}, +\infty)$

4) $\frac{1}{|x|} > 2 \Rightarrow 1 > 2|x| \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

مجموعه جواب $= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

تمرین ۴-۲

۱) حاصل عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

1) $|2-\sqrt{5}|$ 2) $|\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}|$

3) $|\pi-3|$ 4) $|a^2+1|$

۲) هر یک از عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

1) $|x-3|$ 2) $|2x-5|$

3) $|x+1|-|x+3|$ 4) $(x-2)|x+2|$

5) $|x^2-2x|$ 6) $|x^2+2|$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

1) $|2x-7|-3=0$ 2) $|x-5|=2x$

3) $|3x+1|=|2x+5|$ 4) $\left|\frac{x}{x-1}\right|=4$

5) $\left||x|+3\right|=1$ 6) $\left|\frac{x+1}{x+2}\right|=2$

7) $|x-5|+2=0$ 8) $\left|3x+|x|\right|=2x$

۴) نامعادلات زیر را حل کنید.

1) $|5x+2| \leq 2$ 2) $|x+1|>3$

3) $2|x+3|<1$ 4) $\frac{1}{|x-2|} \leq \frac{1}{2}$

5) $|x-1| \leq |2x+3|$ 6) $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{|2x-1|}$

لگاریتم

اگر a عددی مثبت و مخالف یک و x عدد مثبتی باشد لگاریتم x در پایه a را با نماد $\log_a^{\mathrm{x}}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\log_a^{\mathrm{x}} = b \Leftrightarrow a^b = x$$

مثال ۱:

1) $2^3 = 8 \Rightarrow \log_2^8 = 3$

2) $5^2 = 25 \Rightarrow \log_5^{25} = 2$

3) $2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{2}} = -1$

4) $3^{\circ} = 1 \Rightarrow \log_3^1 = 0$

خواص لگاریتم

1) $\log_a^1 = 0$

2) $\log_a^a = 1$

3) $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

4) $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

5) $\log_a^{x^n} = \mathrm{n}\log_a^x$

6) $\log_{a^n}^x = \frac{1}{n}\log_a^x$

7) $\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$

لگاریتم اعشاری وطبیعی

اگر پایه لگاریتم عدد ۱۰ باشد آن را لگاریتم اعشاری می نامیم و معمولاً پایه را نمی گذاریم یعنی : $\log^x = \log_{10}^{\mathrm{x}}$

اگر پایه لگاریتم عدد e (عدد نپر) باشد آن را لگاریتم طبیعی می نامیم و به جای $\log$ از نماد Ln استفاده می کنیم یعنی : $\mathrm{Ln}^{\mathrm{x}} = \log_e^x$

طبق خاصیت ۷ لگاریتم می توان رابطه $\log_a^x = \frac{\mathrm{Lnx}}{\mathrm{Lna}}$ را بدست آورد.

مثال ۲: با استفاده از خواص لگاریتم حاصل لگاریتم های زیر را بیابید.

1) $\log_2^8$

2) $\log_{\sqrt{3}}^9$

3) $\log_{\frac{1}{5}}^{5\sqrt{5}}$

4) $\log_{a^3}^{\sqrt{a}}$

حل :

1) $\log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3\log_2^2 = 3 \times 1 = 3$

2) $\log_{\sqrt{3}}^{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^2} = \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_{3}^{3} = 4 \times 1 = 4$

3) $\log_{\frac{1}{5}}^{5\sqrt{5}} = \log_{5^{-1}}^{5\times 5^{\frac{1}{2}}} = \log_{5^{-1}}^{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-1}\log_{5}^{5} = -\frac{3}{2}$

4) $\log_{a^3}^{\sqrt{a}} = \log_{2^3}^{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{3}\log_{a}^{a} = \frac{1}{6}$

مثال ۳: هر گاه $\log^2 = a$, $\log^3 = b$ باشد حاصل لگاریتم های زیر را برحسب b, a بنویسید.

1) $\log^6$ 2) $\log^{\frac{9}{2}}$

3) $\log^{81\sqrt{2}}$ 4) $\log^5$

حل:

1) $\log^6 = \log^{2\times 3} = \log^2 + \log^3 = a + b$

2) $\log^{\frac{9}{2}} = \log^9 - \log^2 = \log^{3^2} - \log^2 = 2\log^3 - \log^2 = 2b - a$

3) $\log^{81\sqrt{2}} = \log^3 + \log^{2^{\frac{1}{2}}} = 4\log^3 + \frac{1}{2}\log^2 = 4b + \frac{1}{2}a$

4) $\log^5 = \log^{\frac{10}{2}} = \log^{10} - \log^2 = 1 - a$

مثال ۴: حاصل لگاریتمهای طبیعی زیر را بیابید.

1) Ln^{e^2} 2) $Ln^{\sqrt{e}}$

3) $Ln^{\frac{1}{e}}$ 4) $Ln^{e\sqrt[3]{e}}$

حل :

1) $Ln^{e^2} = 2Ln^e = 2 \times 1 = 2$

2) $Ln^{\sqrt{e}} = Ln^{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}Ln^e = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

3) $Ln^{\frac{1}{e}} = Ln^{e^{-1}} = -Ln^e = -1$

4) $Ln^{e\sqrt[3]{e}} = Ln^{e\times e^{\frac{1}{2}}} = Ln^{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3}Ln^e = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$

حل معادله لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$\log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$

مثال ۵: معادلات زیر را حل کنید.

1) $\log_3^{(2x-5)} = 2$ 2) $\log_5^{(x+3)} = \log_5^{(2x^2+2x)}$

3) $\log_2^x + \log_2^{(x+2)} = 3$ 4) $\log_3^{(2x-1)} = \log_3^{(x-2)} + 1$

حل :

1) $\log_3^{(2x-5)} = 2 \Rightarrow 2x-5 = 3^2 \Rightarrow 2x-5 = 9 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

2) $\log_5^{(x+3)} = \log_5^{(2x^2+2x)} \Rightarrow x+3 = 2x^2+2x \Rightarrow 2x^2+2x-x-3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2+x-3 = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -\frac{3}{2}$

جواب $x = -\frac{3}{2}$ غیر قابل قبول است زیرا $2x^2+2x$ به ازای $x = -\frac{3}{2}$ عدد منفی می شود واعداد منفی لگاریتم ندارند.

3) $\log_2^x + \log_2^{(x+2)} = 3 \Rightarrow \log_2^{x(x+2)} = 3 \Rightarrow x(x+2) = 2^3$

$\Rightarrow x^2+2x = 8 \Rightarrow x^2-2x-8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ یا $x = -2$

جواب $x = -2$ غیر قابل قبول است.

4) $\log_3^{(2x-1)} = \log_3^{(x-2)} + 1 \Rightarrow \log_3^{(2x-1)} = \log_3^{(x-2)} + \log_3^3$

$\Rightarrow \log_3^{2x-1} = \log_3^{3(x-2)} \Rightarrow 2x-1 = 3(x-2)$

$\Rightarrow 2x-1 = 3x-6 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$

تمرین ۶-۱

۱- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

1) $\log_2^{32} - \log_5^{25}$ 2) $\log_{\frac{1}{3}}^{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{2}}^{8}$

3) $\log_{27}^{\sqrt[3]{9}} \times \log_{100}^{0/1}$ 4) $\log^{\sqrt{10}} + Ln^{\sqrt[3]{e}}$

۲- اگر $\log^2 = a$, $\log^3 = b$, $\log^c = 7$ باشد مقادیر زیر را بر حسب c, b, a بیابید.

1) $\log g^{48}$

2) $\log g^{\frac{\sqrt{7}}{12}}$

3) $\log g^{\frac{\sqrt{5}}{49}}$

4) $\log g^{\frac{2\sqrt[3]{3}}{21}}$

5) $\log g^{0/25}$

6) $\log g^{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}}$

7) $\log g_{3}^{4}$

8) $\log g_{72}^{7\sqrt{3}}$

۳ـ معادلات زیر را حل کنید.

1) $\log g_{2}^{4x-1} = 5$

2) $\log g^{x^2+5x} = \log g^{2x+4}$

3) $\log g_{3}^{(2x-1)} - \log g_{3}^{(x+2)} = 2$

4) $\log g_{2}^{\sqrt{x+1}} = 3$

5) $\log g_{2}^{(x-1)} + \log g_{2}^{(x+1)} = 4$

6) $2\log g_{2}^{x} = \log g_{2}^{(3x-2)}$

7) $Ln^{(x-3)} + Ln^{(x+3)} = Ln^{7}$

8) $Ln^{\sqrt{x-1}}$

فصل هفتم

مثلثات

۱-۷ واحدهای اندازه گیری زاویه

برای اندازه گیری زاویه از ۳ واحد مهم درجه، رادیان و گراد استفاده می کنیم.

اگر درجه را با D ، رادیان را باR و گراد را با G نمایش دهیم برای تبدیل این واحدها به یکدیگر از رابطه زیر استفاده می کنیم:

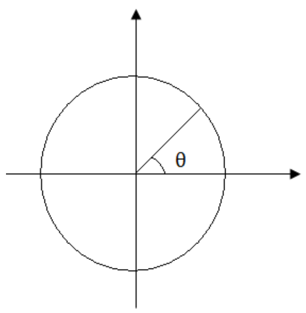
$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200}$$

مثال ۱:زاویه 30° چند رادیان و چند گراد است؟

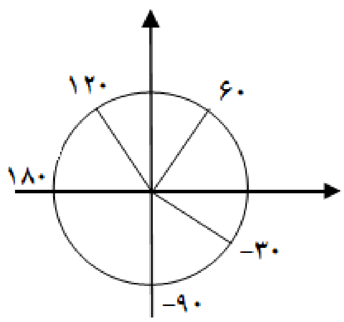
$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{30}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}\Rightarrow\frac{30}{180}=\frac{G}{200}\Rightarrow G=\frac{100}{3}$$

دایره مثلثاتی

ایره ای به شعاع واحد که مرکز آن مبدا مختصات وجهت مثبت آن خلاف عقربه های ساعت می باشد. و هر نقطه روی دایره را که به مرکز دایره وصل کنیم با جهت مثبت محور x ها زاویه ای مانند θ می سازد.

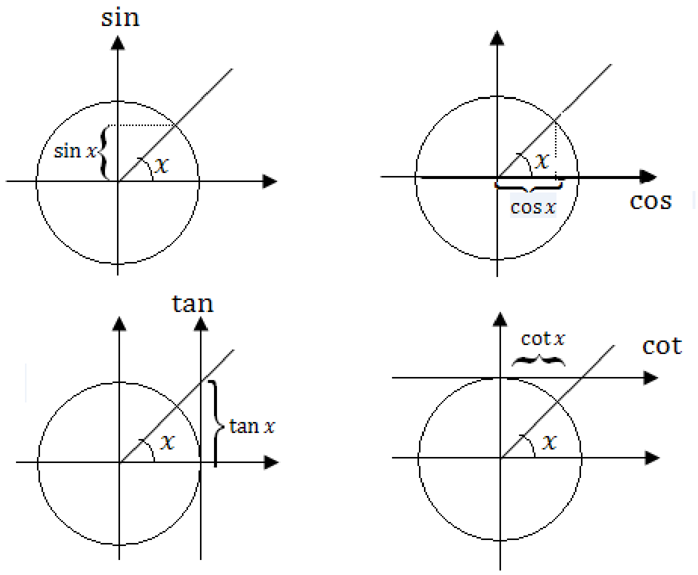


مثال ۲: زاویه های $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, -30^\circ, -90^\circ$ را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید.



۲-7- نسبت های مثلثاتی

برای هر زاویه θ روی دایره مثلثاتی می توان چهار نسبت $sin\theta, cos\theta, tan\theta, cot\theta$ را تعریف کرد که این نسبت ها را می توان با محورهای آن ها که در شکل های زیر نمایش داده شده است پیدا کرد.



با توجه به شکل های فوق می توان ۲ رابطه زیر رانتیجه گرفت:

$-1 \le sin\theta \le 1$ $\qquad$ $-1 \le cos\theta \le 1$

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

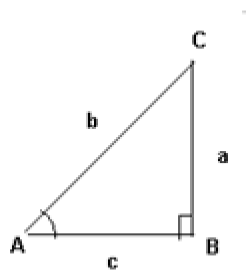
با استفاده از دایره مثلثاتی و تشابه مثلث ها میتوان روابط زیر را بدست آورد.

$$sinA = \frac{a}{b} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$tan\,A = \frac{a}{c} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\cot A = \frac{c}{a} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$



مثال ۱: مثلث ABC در راس B قائمه است اگر $C = 3, a = 2$ باشد نسبت های مثلثاتی زاویه A را بیابید.

حل :

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 13 \Rightarrow b = \sqrt{13}$$

$$sin\ A = \frac{a}{b} \Rightarrow sinA = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad cosA = \frac{c}{b} \Rightarrow cosA = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \Rightarrow tanA = \frac{2}{3} \qquad cotA = \frac{c}{a} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{2}$$

مثال ۲: اگر برای زاویه حاده A داشته باشیم $sinA = \frac{1}{2}$ سایر نسبت های مثلثاتی زاویه A را بیابید.

حل :

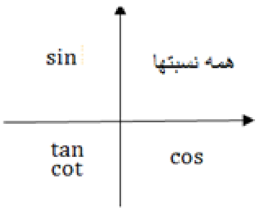
$$sinA = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow a = 1\ , b = 2$$

$$c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$cosA = \frac{c}{b} \Rightarrow \ cosA = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tanA = \frac{a}{c} \Rightarrow tanA = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$cotA = \frac{c}{a} \Rightarrow cotA = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

علامت های نسبت های مثلثاتی



در شکل روبرو علامت نسبت های مثلثاتی در چهار ربع که مثبتند مشخص شده و بقیه منفی اند.

روابط بین نسبتهای مثلثاتی

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad tan\theta\ cot\theta = 1$$

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta} \qquad 1 + cot^2\theta = \frac{1}{sin^2\theta}$$

مثال ۳: اگر θ زاویه ای با شرط $tan\theta = 3\ , \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ باشد $cos\theta$ را بیابید.

حل :

$$1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta} \Rightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{cos^2\theta} \Rightarrow 10 = \frac{1}{cos^2\theta} \Rightarrow cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$ (چون θ در ربع سوم است)

مثال ۴: درستی رابطه $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ را نشان دهید.

حل :

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

مثال ۵: درستی رابطه $cos^4x - sin^4x = 1 - 2\,sin^2x$ را نشان دهید.

حل :

$$cos^4x - sin^4x = (cos^2x + sin^2x)(cos^2x - sin^2x) = cos^2x - sin^2x$$
$$= 1 - sin^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x$$

جدول مثلثاتی زوایای مهم

درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۲\pi}{۲}$	۲π
Sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	۱-	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ن	۰	ن	۰
cot	ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ن	۰	ن

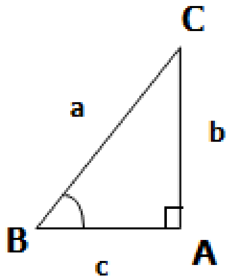
مثال ۶: حاصل عبارت $A = \frac{sin30^\circ + tan^2 60^\circ}{\cos 180^\circ - cos^2 30^\circ}$ را بدست آورید.

حل :

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2}{-1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{-1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-7}{4}} = -$$

مثال ۷: مثلث ABC در راس A قائم است اگر $AB = ۳, \angle B = ۳۰^{\circ}$

اندازه دو ضلع دیگر مثلث را بیابید.



$$sin۳۰ = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{b}{۳} \Rightarrow ۲b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (\frac{۳}{۲})^{۲} + ۳^{۲} \Rightarrow a^{۲} = \frac{۹}{۴} + ۹ \Rightarrow a^{۲} = \frac{۴۵}{۴} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۴۵}}{۲}$$

تمرین ۷-۱

۱- اندازه زوایای زیر که بر حسب درجه است به رادیان تبدیل کنید.

1) 20　　2) 120　　3) 720　　4) -150

۲- اندازه زوایای زیر که بر حسب رادیان است به درجه تبدیل کنید.

1) $\frac{2\pi}{5}$　　2) $\frac{\pi}{8}$　　3) 5π　　4) $-\frac{2\pi}{3}$

۳- زوایای زیر را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید.

1) $\frac{\pi}{2}$　　2) $\frac{3\pi}{4}$　　3) $-\frac{3\pi}{2}$　　4) $-\frac{5\pi}{3}$

۴- در هر یک از حالات زیر زاویه θ را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید.

1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　　2) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

3) $\tan\theta = 1$　　4) $\cot\theta = 1$

۵- مثلث ABC در راس B قائمه است در هر یک از حالات زیر مقدار خواسته شده را بدست آورید.

1) $b = 5$　,　$a = 2$　　$sinA = ?$

2) $tanA = 3$　,　$b = 2$　　$c = ?$

3) $\sin c = \frac{2}{3}$　,　$a = 1$　　$b = ?$

۶- اگر $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی θ را بیابید.

۷- مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید.

1) $sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{2sin^2\frac{\pi}{3}+tan\frac{\pi}{4}}{1-3cot^2\frac{\pi}{6}}$

۸- درستی روابط زیر را بررسی کنید.

1) $sin^2\frac{\pi}{6}+cos^2\frac{\pi}{6}=1$

2) $1+tan^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{4}}$

۹- اگر $\tan x=\frac{3}{2}$ باشد حاصل عبارت $\frac{-\cos x}{\cos x+2\sin x}$ را بیابید.

۱۰- اگر $\cot x=4$ باشد حاصل عبارت $\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}$ را بیابید.

۱۱- درستی روابط زیر را نشان دهید.

1) $1-sin^4x=2cos^2x-cos^4x$

2) $\cot x(1+\tan x)=\cot x+1$

3) $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

4) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$

5) $(1-\tan x)(1-\cot x)=2+\frac{1}{\sin x\cos x}$

6) $sin^4x-cos^4x+2cos^2x=1$

7) $sin^2x\ \ cos^2x(2+tan^2x+cot^2x)=1$

۳-۷نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\sin b$

$\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\sin b$

$\tan(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\frac{\tan \mathrm{a}+\tan \mathrm{b}}{1-\tan \mathrm{a}\tan \mathrm{b}}$

$\tan(\mathrm{a}-\mathrm{b})=\frac{\tan \mathrm{a}-\tan \mathrm{b}}{1+\tan \mathrm{a}\tan \mathrm{b}}$

مثال ۱: مقدار $sin75^{\circ}$ را محاسبه کنید.

حل: :

$$sin75^{\circ} = \sin(30^{\circ} + 45^{\circ}) = sin30^{\circ}cos45^{\circ}cos45^{\circ} + sin30^{\circ}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

مثال ۲: مقدار $cos120^{\circ}$ را محاسبه کنید.

حل :

$$cos120 = \cos(90^{\circ} + 30^{\circ}) = cos90^{\circ}cos30^{\circ} - sin90^{\circ}sin30^{\circ} = 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل یک زاویه با مضارب $\frac{\pi}{2}$

با استفاده از فرمولهای نسبت های مجموع و تفاضل دو زاویه می توان روابط زیر را ثابت کرد:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan \mathrm{x} \qquad tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$
$$cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotx \qquad cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -tantx$$

$$\sin(\pi - x) = sinx \qquad \sin(\pi + x) = -sinx$$
$$cos(\pi - x) = -\cos x \qquad cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$tan(\pi - x) = -\tan x \qquad tan(\pi + x) = \tan x$$
$$cot(\pi - x) = -\cot x \qquad cot(\pi + x) = -\cot x$$

$$\sin(2\pi - x) = -sinx \qquad \sin(-x) = -sinx$$
$$cos(2\pi - x) = \cos x \qquad cos(-x) = \cos x$$
$$tan(2\pi - x) = -\tan x \qquad tan(-x) = -\tan x$$
$$cot(2\pi - x) = -\cot x \qquad cot(-x) = -\cot x$$

نسبت های مثلثاتی $(2\pi + x)$با نسبت های مثلثاتی x برابرند.

مثال ۳: مقادیر $sin\frac{2\pi}{3}, cos\frac{7\pi}{4}, \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right), \cot\left(-3\frac{\pi}{4}\right)$ را بدست آورید.

حل :

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\cot\left(-\frac{3\pi}{3}\right) = \cot\frac{3\pi}{4} = -\cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cot\frac{\pi}{4} = 1$

۷-۴ نسبت های مثلثاتی دو برابر زاویه

با استفاده از نسبت های مثلثاتی مجموع دو زاویه می توان فرمولهای زیر را بدست آورد.

$sin2x = 2sincosx$

$cos2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$

$\tan 2x = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}$

مثال ۱: رابطه $\sin 2x = 2sinxcosx$ را ثابت کنید.

حل : با استفاده از فرمولهای نسبت های مجموع داریم:

$sin\ 2x = \sin(x + x) = sinxcosx + cosxsinx = 2sinxcosx$

مثال ۲: درستی روابط زیر را نشان دهید.

1) $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$ 2) $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$

حل :

1) $cos^2x = 2cos^2x - 1 \Rightarrow 2cos^2x = 1 + cos^2x \Rightarrow cos^2x = \frac{1+cos^2x}{2}$

2) $cos^2x = 1 - 2sin^2x \Rightarrow 2sin^2x = 1 - sin^2x \Rightarrow sin^2x = \frac{1+sin^2x}{2}$

مثال ۳: عبارت $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ را ساده کنید.

حل :

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-(1-2sin^2\frac{x}{2})}{1-(1+2sin^2\frac{x}{2})} = \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2sin^2\frac{x}{2}} = \left(\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}\right)^2 = tan^2\frac{x}{2}$$

۷-۵ فرمول های تبدیل جمع یا تفاضل به ضرب

با استفاده از نسبت های مجموع و تفاضل دو زاویه می توان فرمول های زیر را بدست آورد:

$$sina + sinb = 2sin\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$$
$$sina - sinb = 2cos\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$$
$$cosa + cosb = 2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$$
$$cosa - cosb = -2sin\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$$

مثال ۴: عبارت های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

1) $A = sin5x + sin3x$ 2) $B = cos^2 3x - cos^2 x$

حل :

1) $A = 2sin\frac{5x+3x}{2}cos\frac{5x-3x}{2} = 2\, sin\, 4x\, cos\, x$

2) $B = (cos3x - \cos x)(cos3x + cosx) = (-2sin\frac{3x+x}{2}sin\frac{3x-x}{2})$

$$\left(2cos\frac{3x+x}{2}cos\frac{3x-x}{2}\right) = (-2\sin 2x \sin x)(2\cos 2x cos\, x)$$
$$= (-2\sin 2x\, cos\, 2x)(2\sin x \cos x) = -\sin 4x \cos 2x$$

فرمول های تبدیل ضرب به جمع یا تفاضل

با استفاده از فرمول های جمع به ضرب و تغییر متغیر میتوان فرمول های زیر را بدست آورد.

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

مثال ۵: عبارت های زیر را به مجموع یا تفاضل تبدیل کنید.

1) $A = \sin 2x \cos 4x$ 2) $\mathrm{B} = \sin 40^{\circ}\, sin20^{\circ}$

حل :

1) $A = \frac{1}{2}[\sin(2x+4x) + \sin(2x-4x)] = \frac{1}{2}[sin6x - sin2x]$

2) $\mathrm{B} = -\frac{1}{2}[\cos(40^{\circ} + 20^{\circ}) - \cos(40^{\circ} - 20^{\circ})] = -\frac{1}{2}[cos60^{\circ} - cos20^{\circ}]$

تمرین ۷-۳

۱- مقادیر زیر را محاسبه کنید.

1) $\sin 240^\circ$ 2) $\cos \frac{5\pi}{3}$

3) $\tan \frac{5\pi}{4}$ 4) $\cot(-\frac{2\pi}{3})$

5) $\sin 405^\circ$ 6) $\tan 750^\circ$

7) $\sin 50^\circ \cos 70^\circ + \cos 50^\circ \sin 70^\circ$ 8) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ$

۲- اگر y, x دو زاویه حاده و $\cos y = \frac{2}{3}, \sin x = \frac{1}{3}$ باشد مقادیر زیر را محاسبه کنید.

1) $\sin(x+y)$ 2) $\tan(x-y)$

3) $\cos 2x$ 4) $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

۳- درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\ \sin(x+\frac{\pi}{4})$

2) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

3) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \cot x$

4) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$

5) $\cot x - \tan x = 2\cot x$

۴- عبارات زیر را به ضرب تبدیل کنید.

1) $\sin 5x - \sin x$ 2) $\cos 3x + \cos x$

3) $\sin^2 7x - \sin^2 3x$ 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$

۵- عبارات زیر را به مجموع یا تفاضل تبدیل کنید.

1) $\sin 4x\ \cos 6x$ 2) $\sin 40^\circ \sin 60^\circ$

3) $\cos 5x\ \cos 2x$ 4) $\cos 3x\ \sin 2x$

۶- مقدار $\sin 3x$ را بر حسب $\sin x$ بدست آورید.

۷- مقدار $\cos 3x$ را بر حسب $\cos x$ بدست آورید.

۷-6 معادلات مثلثاتی

معادلاتی به فرم $\sin x = \sin\theta$, $\cos x = \cos\theta$, $\tan x = \tan\theta$, $\cot x = \cot\theta$ معادله ساده مثلثاتی می گوئیم و با استفاده از فرمول های زیر معادله را حل می کنیم.

$$\sin x = \sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k + \pi \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}, k \in z$$
$$\cos x = \cos\theta \Rightarrow x = 2k\pi \pm \theta \ , \ k \in z$$
$$\tan x = \tan\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta \ , \quad k \in z$$
$$\cot x = \cot\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta \ , \quad k \in z$$

برای حل معادلات مثلثاتی ابتدا آنها را به فرم معادله ساده مثلثاتی تبدیل کرده سپس با استفاده از فرمولهای فوق آنها را حل می کنیم.

مثال ۱: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

1) $2\sin x - 1 = 0$ 2) $2\cos^2 x - cosx = 0$
3) $\tan 3x - \tan x = 0$ 4) $\sin 2x + 2\cos x = 0$
5) $\sin x + \cos x = 1$ 6) $2cos^2 x - 3cosx + 1 = 0$

حل :

1)$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2x\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, k \in z$

2)$2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ یا $2\cos x = -1 = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad, k \in z$

$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos x\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in z$

3) $\tan 3x - \tan x = 0 \Rightarrow tn3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x$

$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in z$

4) $\sin 2x + 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x = 0 \Rightarrow$

$2\cos x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ یا $\sin x + 1 = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2x\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in z$

$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in z$

5) $\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad, k \in z$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad, k \in z$

6) $2cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

قرار می دهیم $t = \cos x$ پس :

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ یا $t = \frac{1}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in z$$

تمرین ۷-۴

۱- معادلات زیر را حل کنید.

1) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

2) $3tanx - \sqrt{3} = 0$

3) $sin^2x - sinx = 0$

4) $sin3x - sinx = 0$

5) $cos^2x - cosx - sin^2x = 0$

6) $\tan x \tan 5x = 1$

7) $\sin x + sin2x + sin3x = 0$

8) $cot^2x - 3 = 0$

9) $sin2x - cosx = 0$

10) $sin^3x - \sin x = 0$

11) $sinx - cosx = 0$

12) $sin2x - cos^2x = 0$

13) $2cos^2x - cosx - 1 = 0$

14) $tanx + \cot x = 2$

فصل هشتم

تابع

۱-۸رابطه

به هر زیر مجموعه از حاصلضرب A×B یک رابطه از A به B می گوئیم .

مثال ۱: رابطه های زیر از مجموعه A={1,2,3} به مجموعه B={4,5,6} تعریف شده اند:

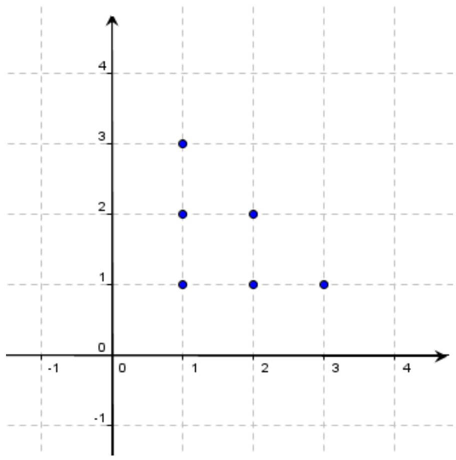
$R_1 = \{(1,4),(1,5),(2,4)\}$ $\quad\quad$ $R_2 = \{(2,5)\}$

$R_3 = \{(2,4),(3,5)\}$ $\quad\quad$ $R_4 = \{(1,6),(1,5),(2,4)\}$

نمودار دکارتی رابطه

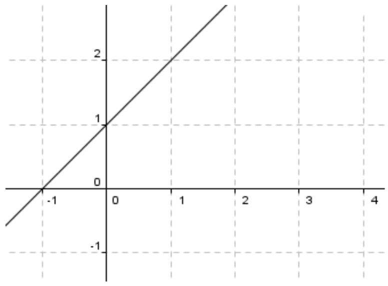
هر یک از اعضای رابطه را می توان یک نقطه در دستگاه دکارتی درنظر گرفت .

مثال ۲: نمودار رابطه $R = \{(x,y)|x,y \in N, x+y \leq 4\}$ را می توان به صورت زیر رسم کرد:



مثال ۳: نمودار رابطه $R = \{(x,y)|x,y \in \Re, y = x+1\}$ را رسم کنید .

حل: این رابطه بیشمار نقطه دارد که تشکیل خط می دهد و نمودار آن به شکل زیر است.



x	0	1
y	1	2

تابع

رابطه ای که مولفه های اول آن تکراری نباشند به عبارت دیگر اگر در دوزوج مرتب مولفه های اول مانند هم بود مولفه های دوم آنها نیز مانند هم باشندتابع نامیده میشود .

مثال ۴: رابطه $R_1=\{(2,4),(3,1),(1,2)\}$ یک تابع است ولی رابطه $R_2=\{(1,2),(1,4),(2,5)\}$ تابع نیست .

مثال۵: مقادیر b,a را چنان بیابید که رابطه زیر یک تابع باشد.

$$R=\{(1,2),(3,a),(1,2b-4),(3,b-1)\}$$

حل: چون در مولفه های اول رابطه عضو تکراری داریم بنابراین :

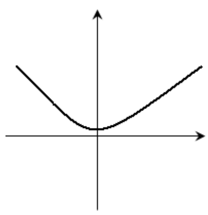
$$2b-4=2\rightarrow 2b=6\rightarrow b=3$$

$$a=b-1\rightarrow a=3-1\rightarrow a=2$$

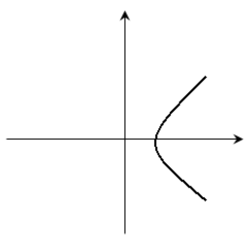
تشخیص تابع از روی نمودار

یک نمودار در صورتی تابع است که هر خط موازی محور عرض ها حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع کند.

مثال۶: در نمودار زیر شکل ۱ تابع است ولی شکل ۲ تابع نیست .



شکل۱



شکل ۲

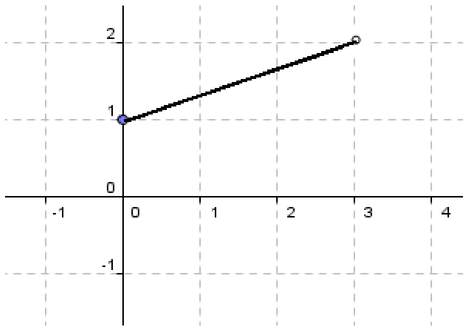
دامنه و بردتابع

به مجموعه تمام مولفه های اول یک تابع دامنه می گوئیم وبا D نمایش می دهیم به مجموعه تمام مولفه های دوم برد می گوئیم وبا R نمایش می دهیم .

مثال ۷: دامنه و برد تابع $f=\{(1,2),(3,4),(5,7),(8,9)\}$ *را پیدا کنید .*

حل: $R=\{2,4,7,9\}$ $\qquad$ $D=\{1,3,5,8\}$

مثال ۸: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد دامنه و برد آن را پیدا کنید .



حل : $R=[1,2)$ $\qquad$ $D=[0,3)$

ضابطه تابع

فرمولی که y *را بر* حسب x مشخص می کند ضابطه تابع می نامیم . اگر تابع را با f نمایش دهیم y را با f(x) نمایش می دهیم .

مثال ۹: در تابع $f(x)=x^2+x$ مقادیر $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(x-2)$, $f\left(\sqrt{x}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$f(1)=1^2+1=2 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

$$f(x-2)=(x-2)^2+(x-2)=x^2-4x+4+x-2=x^2-3x+2$$

$$f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}=x+\sqrt{x}$$

دامنه چند تابع مهم

۱- **تابع چند جمله ای :** تابع چند جمله ای به ازای تمام اعداد تعریف شده است پس دامنه آن R می باشد .

۲- **تابع کسری**: تابع کسری در اعدادی که مخرج کسر را صفر کنند تعریف نشده است بنابراین:

{ اعدادی که مخرج کسر را صفر می کنند} - R =دامنه تابع کسری

۳- **تابع رادیکالی با فرجه زوج** : عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نمی تواند منفی باشد. بنابراین عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم جواب نا معادله دامنه تابع است .

۴- **تابع رادیکالی با فرجه فرد**: از رادیکال صرف نظر می کنیم سپس دامنه عبارت حاصل را بدست می آوریم .

مثال ۱۰: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$1)y = 2x^2 - 5x + 1 \qquad 2)y = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

$$3)y = \sqrt{x^2-4x} \qquad 4)y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{|x|-2}}$$

حل:

1)D=R

$2)x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow n = 2, n = 3$

$$D = R - \{2,3\}$$

$3)x^2 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x-4) \geq 0$

$x(x-4) = 0 \rightarrow \; x = 0 \quad , \quad x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
p		+	0	−	0	+	

$$D = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$4)|x| - 2 = 0 \rightarrow |x| = 2 \rightarrow x = \pm 2$$

D=R-{-2,2

}

تساوی دوتابع

*دو تابع **g,f** مساویند اگر دامنه ها ی آن مساوی بوده و برای هر **x** در دامنه مشترک **f(x)=g(x)** .*

مثال ۱۱: آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *و* ***g(x)=x+1*** *مساویند ؟*

حل : خیر زیرا : *$D_g = IR$, $D_f = IR-\{1\}$*

تابع چند ضابطه ای

تابعی که بیش از یک ضابطه دارد تابع چند ضابطه ای می نامیم.

مثال ۱۲: در تابع با ضابطه و $f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x} & , \ x \geq 0 \\ x^2+2x & , \ x < 0 \end{cases}$ مقادیر $f(4)$

$f(-2)$ f, $f(2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $(f(-3))$ را محاسبه کنید .

حل :

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 0 \quad f(2) = 2 + \sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

$$f\big(f(-3)\big) = f(3) = 3 + \sqrt{3}$$

تمرین ۸-۱

۱-اعضای رابطه های زیر را بنویسید.

$$1) R1 = \{(x,y) | x,y \in N, x+y < 6\}$$

$$2) R_2 = \{(x,y) | x,y \in Z, |x| + |y| = 4\}$$

$$3) R_3 = \{(x,y) | x,y \in R, x^2 + y^2 = 0\}$$

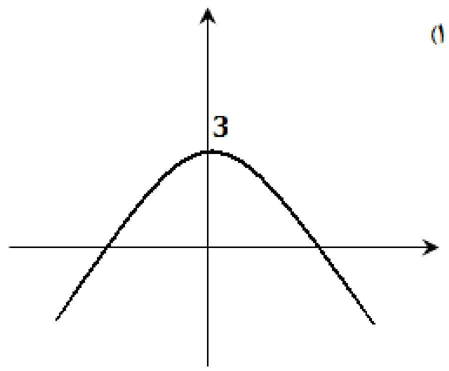
$4) R_4 = \{(x,y) | x,y \in N, x < y \ \ , \ \ y \leq 4\}$

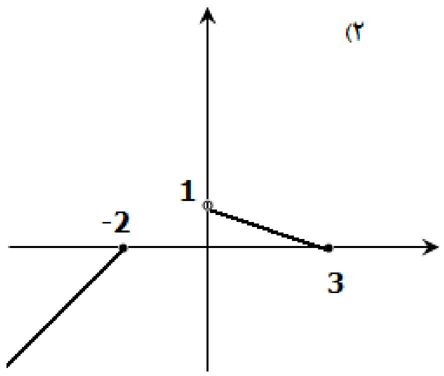
۲-به ازای چه مقادیر n,m هر یک از رابطه های زیر تابع می باشند .

$$1) R_1 = \{(1,m-1),(2,3),(1,n),(2,n-5)\}$$

$$2) \mathrm{R}_2 = \{(3,-1),(3,\mathrm{n}+\mathrm{m}),(2,2\mathrm{n}),(2,\mathrm{m}-1)\}$$

۳-در هر یک از نمودارهای زیر دامنه و برد تابع را بدست آورید .





۴-دامنه هر یک از توابع زیر را بدست آورید .

$1) y = 5x^3 - x^2 + 1$ $\qquad$ $2) y = \dfrac{x-1}{x^2-9}$

$3) y = \sqrt{x^2-4}$ $\qquad$ $4) y = \sqrt[3]{|x|-1}$

$5) y = \dfrac{1}{|x|-5}$ $\qquad$ $6) y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+x}}$

$7) y = \sqrt{3-|x|}$ $\qquad$ $8) y = \dfrac{1}{2x^2-3x+1}$

$9) y = \sqrt[4]{\dfrac{x-5}{2-x}}$ $\qquad$ $10) y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$

$11) y = \dfrac{2x+7}{|x-1|-2}$ $\qquad$ $12) y = \sqrt{|x-2|-3}$

$13) \mathrm{y} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{x}^2+1}{\mathrm{x}-5}}$ $\qquad$ $14) \mathrm{y} = \tan \mathrm{x}$

$15) y = \dfrac{1}{2\cos x - 1}$ $\qquad$ $16) y = \cot 2x$

۵-در هر یک از حالات زیر تساوی دو تابع را بررسی کنید .

$1) f(x) = x \qquad , \qquad g(x) = \sqrt{x^2}$

$2) f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} \qquad , \qquad g(x) = x + \sqrt{2}$

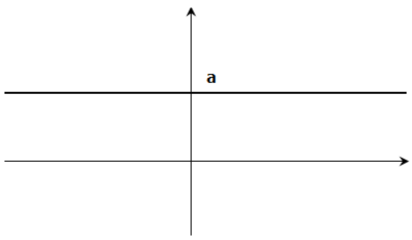
$3) f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1} \qquad , \qquad g(x) = x$

$4) f(x) = sin^2x + cos^2x \qquad , \quad g(x) = \tan x \cot x$

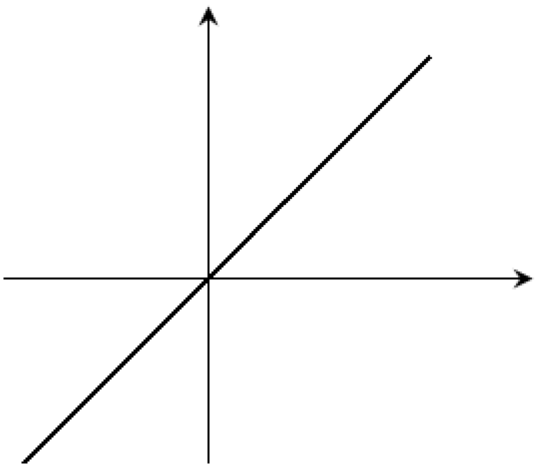
۶- در تابع f(x)= $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} & , \ x \geq 2 \\ x^2 + 3x & , \ x < 2 \end{cases}$ مقادیر $f(3), f\left(\frac{5}{2}\right), f(2), f(f(-1)), f\big(1 + f(2)\big)$ را محاسبه کنید.

۲-۸ انواع تابع

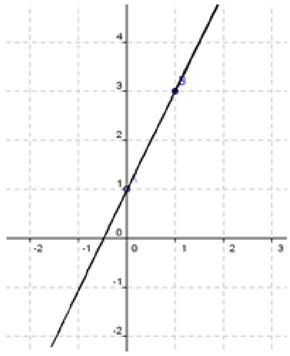
تابع ثابت : به تابع f(x)=a که a عدد ثابت است تابع ثابت می گوئیم و نمودار آن خطی موازی محور x هاست.



تابع همانی : به تابع f(x)=x تابع همانی می گوئیم و نمودار آن خط نیمساز ربع اول و سوم می باشد.



تابع خطی : به تابع f(x)=ax+b تابع خطی می گوئیم که a شیب خط است برای رسم این نمودار دو نقطه دلخواه را پیدا کرده و به هم وصل کرده و امتداد می دهیم .



مثال ۱: نمودار تابع f(x)=2x+1 را رسم کنید

حل :

x	0	1
y	1	3

تابع قدر مطلق *: تابع f(x)=|x| را می توان به شکل زیر به یک تابع دو ضابطه ای تبدیل کرد :*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

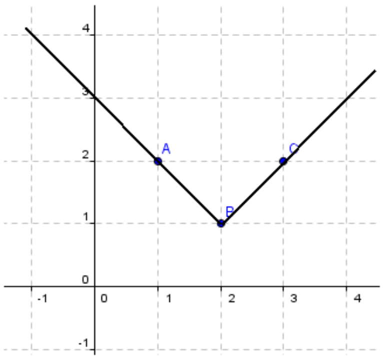
برای رسم نمودار f(x)=|ax+b|+c ریشه عبارت داخل قدر مطلق را بدست آورده سپس آن عدد و دوعدد دیگر یکی کمتر و یکی بزرگتر آن در جدول قرار داده نقاط بدست آمده را به یکدیگر وصل و امتداد می دهیم .

مثال ۲ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$1) y = |x - 2| + 1$ $\qquad$ $2) y = |2x + 2| - 3$

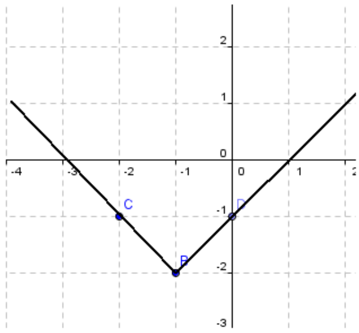
حل:

$$1) x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$



x	1	2	3
y	2	1	2

$$2) 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

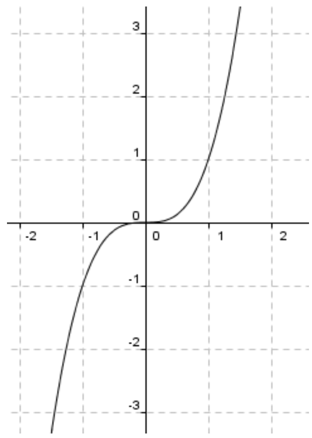


x	-2	-1	0
y	-1	-3	-1

مثال۳:تابع |f(x)=x|x را به صورت تابع دو ضابطه ای بنویسید سپس نمودار آن را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

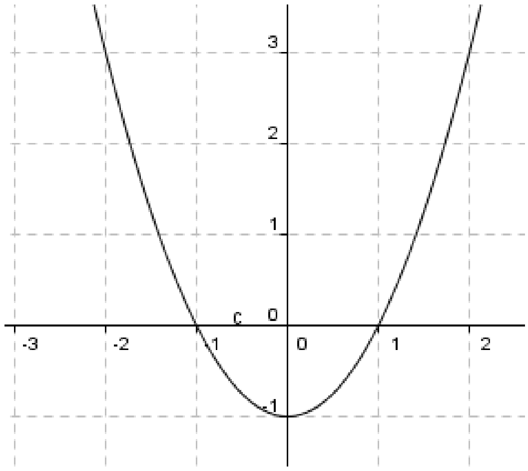


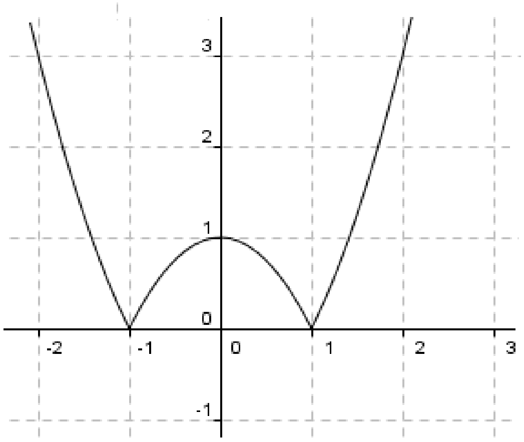
رسم نمودار |y=|f(x با استفاده از نمودار y=f(x)

ابتدا نمودار y=f(x) را رسم می کنیم سپس قسمت هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارند حذف کرده و قرینه آنها نسبت به محور x ها را به نمودار اضافه می کنیم.

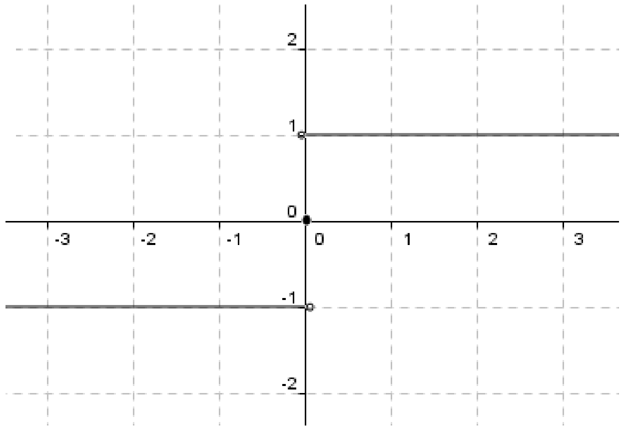
مثال ۴:نمودار $y=|x^2-1|$ را رسم کنید۰

حل: ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را رسم می کنیم و با استفاده از آن نمودار $y=|x^2-1|$ را رسم می کنیم .



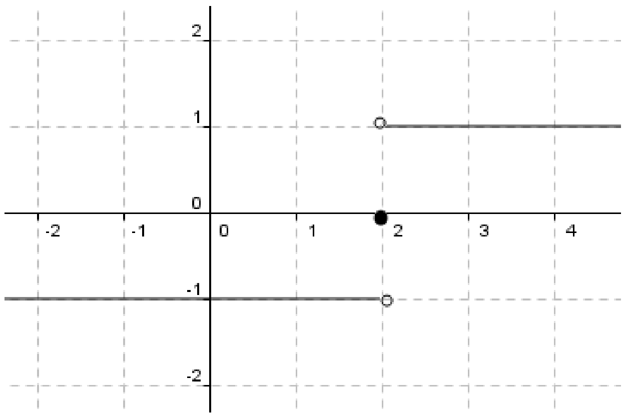


تابع علامت: *به تابع* *y=sgn(x)* *تابع علامت می گوئیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم:*



$$sgn(x)=\begin{cases} ۱ & x>. \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

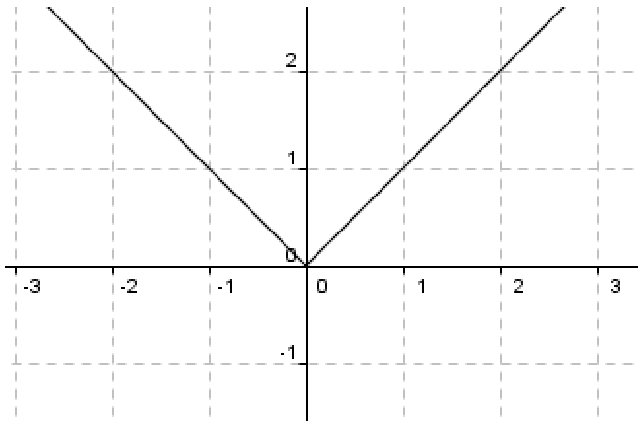
مثال ۵: نمودار y=sgn(x-2) را رسم کنید.



$$y=\begin{cases} ۱ & x>۲ \\ ۰ & x=۲ \\ -۱ & x<۲ \end{cases}$$

مثال ۶: نمودار y=x sgn(x) را رسم کنید.

$$y=\begin{cases} x & x>\cdot \\ \cdot & x=\cdot \\ -x & x<\cdot \end{cases}$$



جزءصحیح : جزء صحیح x را با نماد [x] نمایش می دهیم اگر n عدد صحیح باشد و n≤x<n+1 آنگاه [x]=n .

مثال ۷:

$$[2]=2 \qquad [3/7]=3 \qquad [1-\sqrt{2}]=-1$$

$$\left[-\frac{3}{2}\right]=-2 \qquad [0/1]=0 \qquad [\pi]=3$$

ویژگی های جزء صحیح

$1)[x+n]=[x]+n \qquad , \qquad (n\in z)$

۲) $0\leq x-[x]<1$

مثال ۸: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$1)y=\frac{1}{[x-1]} \qquad 2)y=\sqrt{x-[x]}$$

$$3)y=\frac{1}{2[x]-3} \qquad 4)y=\sqrt{[x]-2}$$

حل:

$1)[x-1]=0\rightarrow[x]-1=0\rightarrow[x]=1\rightarrow 1<x<2$

$\rightarrow D=[1,2)$

$2)x-[x]\geq 0\rightarrow$ همواره بر قرار است $\rightarrow D=R$

$3) 2[x] - 3 = 0 \rightarrow [x] = \frac{3}{2}$ جواب ندارد $\rightarrow D = R$

$4) [x] - 2 \geq 0 \rightarrow [x] \geq 2 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D = [2 + \infty)$

مثال ۹: نمودار تابع y=[x] را در باز[-1,3] رسم کنید .

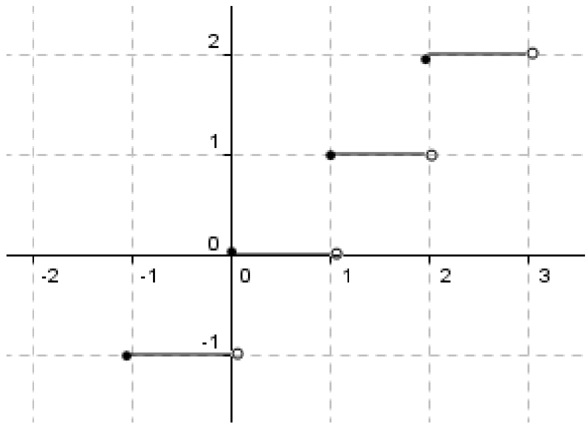
حل :

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 2$$



مثال۱۰: نمودار y=x-[x] را در بازه (0,3) رسم کنید

حل:

$۰ \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \rightarrow y = x$

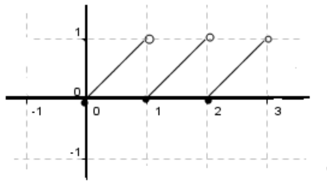
X	۰	۱
Y	۰	۰

$۱ \leq x < ۲ \rightarrow [x] = ۱ \rightarrow y = x - ۱$

X	۱	۲
Y	۰	۱

$۲ \leq x < ۳ \rightarrow [x] = ۲ \rightarrow y = x - ۲$

X	۲	۳
Y	۰	۱



مثال۱۱: نمودار y=[2x]+1 را در بازه (0,2] رسم کنید ۰

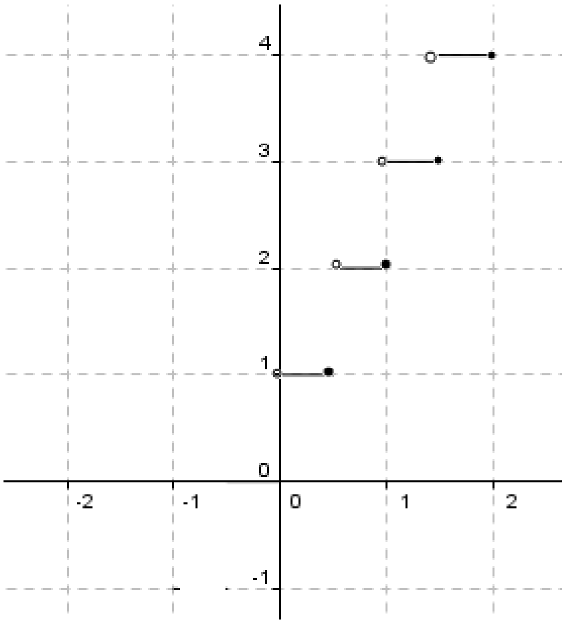
$0 \le x < 2 \to 0 \le 2x < 4$

$0 \le 2x < 1 \to [2x] = 0 \to y = 1 \quad , \quad 0 \le x < \frac{1}{2}$

$1 \le 2x < 2 \to [2x] = 1 \to y = 2 \quad , \quad \frac{1}{2} \le x < 1$

$2 \le 2x < 3 \to [2x] = 2 \to y = 3 \quad , \quad 1 \le x < \frac{3}{2}$

$3 \le 2x < 4 \to [2x] = 3 \to= 4 \quad , \quad \frac{3}{2} \le x < 2$



تابع یک به یک

*تابع **f** یک به یک است اگر مولفه های دوم آن تکراری نباشند . به عبارت دیگر اگر در دو زوج مرتب مولفه های دوم مانند هم باشند آنگاه مولفه های اول آن نیز مانند هم باشند.*

نمودار یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور طول ها حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع کند.

مثال ۱۲: تابع f={(1,2),(5,1),(4,2)} یک به یک نیست زیرا در مولفه های دوم آن تکراری وجود دارد.

مثال۱۳: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید

$1) y = 2x^3 + 1 \qquad\qquad 2) y = x^2 - 5$

حل :

$1) y_1 = y_2 \to 2x_1^3 + 1 = 2x_2^3 + 1 \to 2x_1^3 = 2x_2^3 \to x_1^3 = x_2^3 \to x_1 = x_2$

پس تابع یک به یک است.

$2) y_1 = y_2 \to x_1^2 - 5 = x_2^2 - 5 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

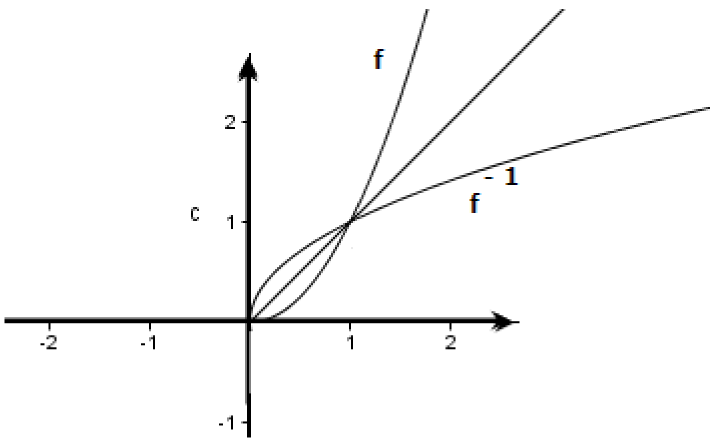
پس تابع یک به یک نیست .

تابع معکوس

یک تابع در صورتی معکوس پذیر است که یک به یک باشد برای پیدا کردن معکوس یک تابع جای دو مولفه را عوض می کنیم معکوس تابع f را با نماد f^{-1} نمایش می دهیم.

مثال۱۴: معکوس تابع $f=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ تابع $f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$ می باشد.

اگر نمودار تابع f را نسبت به خط y=x قرینه کنیم نمودار f^{-1} حاصل می شود .



ضابطه معکوس تابع

برای یافتن ضابطه معکوس تابع y=f(x) ابتدا x را بر حسب y بدست آورده سپس جای y,x را عوض می کنیم

مثال ۱۵: ثابت کنید تابع $f(x)=2x^5+4$ معکوس پذیر است سپس ضابطه معکوس را بدست آورید .

حل :

$y_1 = y_2 \to 2x_1^5 + 4 = 2x_2^5 + 4 \to 2x_1^5 = 2x_2^5 \to x_1^5 = x_2^5$

$\to x_1 = x_2 \to$ تابع یک به یک است $\to$ تابع معکوس پذیر است

$$y = 2x^5 + 4 \rightarrow 2x^5 = y - 4 \rightarrow x^5 = \frac{y-4}{2} \rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{y-4}{2}} \rightarrow \quad y = \sqrt[5]{\frac{x-4}{2}} \rightarrow f^{-1}(x)$$
$$= \sqrt[5]{\frac{x-4}{2}}$$

مثال۱۶: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ معکوس پذیر است سپس ضابطه معکوس را بیابید.

$$\mathrm{Y}_1 = \mathrm{y}_2 \rightarrow \frac{\mathrm{x}_1}{2\mathrm{x}_1 + 1} = \frac{\mathrm{x}_2}{2\mathrm{x}_2 + 1} \rightarrow \mathrm{x}_1(2x_2 + 1) = x_2(2x_1 + 1) \rightarrow 2x_1x_2 + x_1 = 2x_1x_2 + x_2$$

$\rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow$ تابع یک به یک است $\rightarrow$ تابع معکوس پذیر است

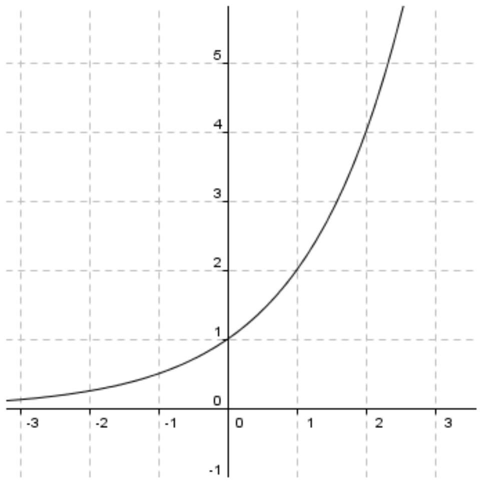
$$y = \frac{x}{2x+1} \rightarrow y(2x+1) = x \rightarrow 2xy + y = x \rightarrow 2xy - x = -y \rightarrow x(2y-1) = -y \rightarrow x$$
$$= \frac{-y}{2y-1} \rightarrow y = \frac{-x}{2x-1} \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-x}{2x-1}$$

تابع نمائی

به تابع $f(x)=a^x$ که a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند تابع نمائی می گوئیم

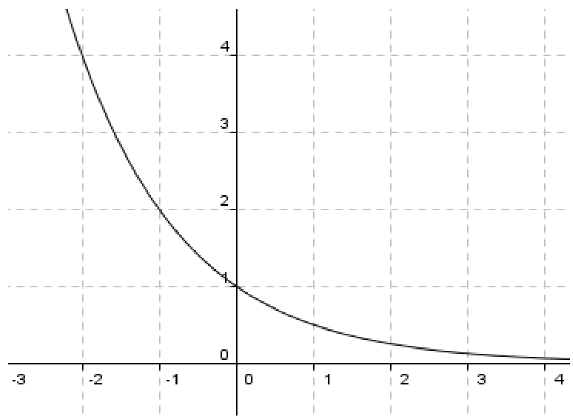
مثال ۱۷: نمودار تابع $f(x)=2^x$ را رسم کنید .

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



مثال ۱۸ : نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



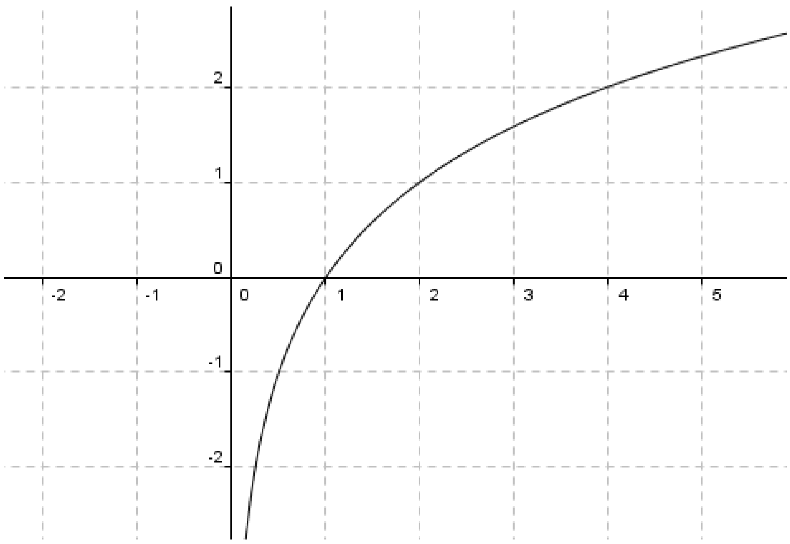
تابع لگاریتمی

معکوس تابع $f(x)=a^x$ تابع $f(x)=log_a^x$ می باشد که تابع لگاریتمی نامیده می شود .

مثال ۱۹:نمودار تابع f(x)=log_2^x را رسم کنید .

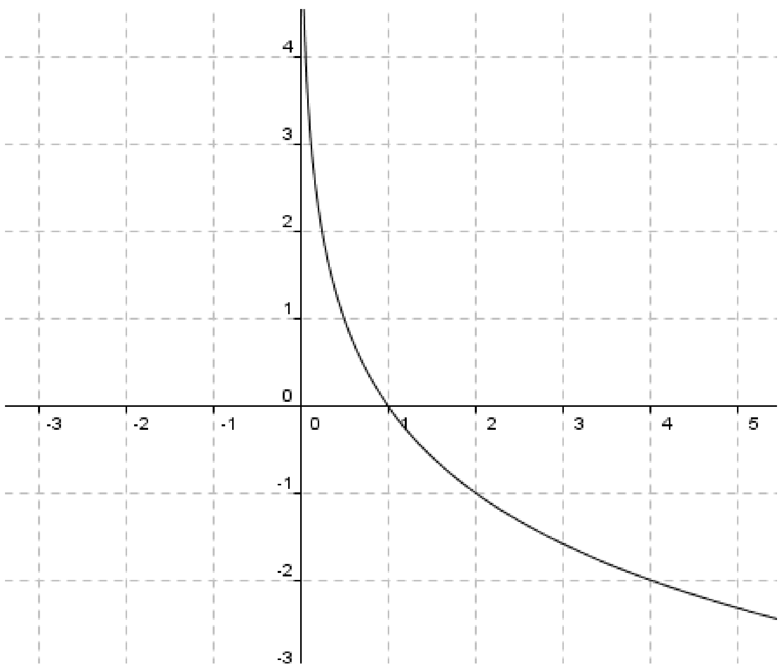
حل :

اگر نمودار مثال ۱۷ را نسبت به خط y=x قرینه کنیم نمودار تابع بدست می آید.



مثال۲۰: نمودار تابع f(x)=$log_{\frac{1}{2}}^x$ را رسم کنید.

حل : اگر نمودار مثال ۱۸ را نسبت به خطy=x قرینه کنیم نمودار تابع بدست می آید.



تمرین۸-۲

۱-نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$1) f(x) = 2$ $\quad$ $2) f(x) = 2x - 3$

$3) f(x) = -x + 1$ $\quad$ $4) f(x) = 2|x - 1|$

$5) f(x) = -|x + 2| + 1$ $\quad$ $6) f(x) = |x^2 - 4|$

۲-*توابع زیر را به صورت تابع دو ضابطه ای بنویسید و نمودار آنها را رسم کنید.*

$1) \mathrm{f(x) = x|x - 2|}$ $\quad$ $2) \mathrm{f(x) = -x|x|}$

۳-*نمودار توابع زیر را رسم کنید .*

$1) f(x) = sgn(2x - 1)$ $\quad$ $2) f(x) = sgn(x^2 - 1)$

$3) f(x) = (x - 1)sgn(x)$ $\quad$ $4) f(x) = xsgn(x - 2)$

۴-*دامنه توابع زیر را بدست آورید .*

$1) y = \frac{x - 5}{[x]}$ $\quad$ $2) y = \frac{1}{\sqrt{[x] - 1}}$

$3) y = \sqrt{3 - [x]}$ $\quad$ $4) y = \frac{1}{2[x] - 6}$

۵-نمودار توابع زیر را دربازه داده شده رسم کنید۰

$1) y = 2[x] - 1 \quad , \quad [-2,2)$

$2) \mathrm{y = x + [x]} \quad , \quad [-1,3)$

$3) y = 2[2x] + 1 \quad , \quad [-2,1)$

$4) y = x[x] \quad , \quad [-1,2)$

۶-*یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید .*

$1) y = 2x^3 + 5$ $\quad$ $2) y = 3\sqrt{x - 1}$

$3) y = |x| - 1$ $\quad$ $4) y = \frac{x - 1}{2x + 1}$

۷-با رسم نمودار نشان دهید تابع y=|x-1|+2 یک به یک نیست .

۸-ثابت کنید توابع زیر معکوس پذیرند سپس ضابطه معکوس را بدست آورید.

$1) f(x) = 5x^3 - 7$ $\qquad$ $2) f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$

$3) f(x) = \frac{x}{3x+4}$ $\qquad$ $4) f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

۳-۸ اعمال روی توابع

اگر g,f دو تابع باشند در اینصورت توابع $(f+g), (f-g), (f.g)$ و $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه توابع $(f+g), (f-g), (f.g)$ برابر است با $D_f \cap D_g$ و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با $D_f \cap D_g - \{x|g(X) = 0\}$.

مثال ۱: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}, g(x) = \frac{x}{x+2}$ در این صورت ضابطه توابع

$(f+g), (f-g)$ و $(f.g)$ و دامنه هر یک را بدست آورید .

حل:

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{x+2}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x+3} - \frac{x}{x+2}$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{x+3}\,(\frac{x}{x+2})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\frac{x}{x+2}}$$

$D_f = [-3, +\infty)$ $\qquad$ $D_g = R - \{-2\}$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = [-3, +\infty) - \{-2\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = [-3+\infty) - \{-2\} - \left\{x\middle|\frac{x}{x+2} = 0\right\} = [-3, +\infty) - \{0, -2\}$$

ترکیب دو تابع

اگر g,f دو تابع باشند تابع fog(X) را به صورت fog(x)=f(g(x)) تعریف می کنیم و دامنه آن برابر است با :

$D_{\text{fog}} = \{\text{x}|\text{x} \in \text{D}_\text{g}, \text{g}(\text{x}) \in \text{D}_\text{f}\}$

مثال ۲: اگر $g(x) = 2x + 1, f(x) = \sqrt{x-5}$ باشد ضابطه توابع fog , gof , fof , gog و دامنه تابع fog را بدست آورید.

حل:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x) - 5} = \sqrt{2x + 1 - 5} = \sqrt{2x - 4}$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1 = 2\sqrt{x - 5} + 1$$

$$fof(x) = \sqrt{f(x) - 5} = \sqrt{\sqrt{x - 5} - 5}$$

$$gof(x) = 2g(x) + 1 = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$D_\text{f} = [5, +\infty) \qquad , \qquad D_\text{g} = \text{R}$$

$$D_{\text{fog}} = \{\text{x}|\text{x} \in \text{R} \quad ,2\text{x} + 1 \in [5, +\infty)\} = \{\text{x}|\text{x} \in \text{R}, 2\text{x} + 1 \geq 5\}$$

$$= \{\text{x}|\text{x} \in \text{R}, \text{x} \geq 2\} = [2, +\infty)$$

تابع زوج و فرد

تابع f را زوج گوئیم اگر ۲ شرط زیر برقرار باشد:

۱- برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$ (دامنه f متقارن باشد) .

۲- برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم f(-x)= f(x)

نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است .

تابع f را فرد گوئیم اگر ۲ شرط زیر برقرار باشد:

۱ - برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$ (دامنه f متقارن باشد) .

2- برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$

نمودار تابع فرد نسبت به مبدامختصات متقارن است.

مثال۳: زوج یا فرد بودن توابع زیر یا بررسی کنید.

$1) f(x) = x^2 + 1$ $\quad\quad$ $2) f(x) = x^3 + x$

$3) f(x) = x^3 + \cos x$ $\quad\quad$ $4) f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

حل:

$1) D_f = R$ متقارن است

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ تابع زوج است

$2) D_f = R$ متقارن است

$f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -f(x)$ تابع فرد است

$3) D_f = R$ متقارن است

$f(-x) = (-x)^3 + \cos(-x) = -x^3 + \cos x$

$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(x)$ تابع نه زوج نه و فرد است

$4) D_f = R - \{2\}$ متقارن نیست $\rightarrow$ تابع نه زوج و نه فرد است

۱۲-زوج یا فرد بودن تابع $a \neq ۱ > ۰$ ، $f(x) = \dfrac{a^x + ۱}{a^x - ۱}$ را بررسی کنید.

حل:

$a^x - ۱ = ۰ \Rightarrow a^x = ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow D_f = R - \{۰\}$

دامنه نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و

$$f(-x) = \frac{a^{-x} + ۱}{a^{-x} - ۱} = \frac{\frac{۱}{a^x} + ۱}{\frac{۱}{a^x} - ۱} = \frac{\frac{۱ + a^x}{a^x}}{\frac{۱ - a^x}{a^x}} = \frac{۱ + a^x}{۱ - a^x} = -\left(\frac{a^x + ۱}{a^x - ۱}\right) = -f(x)$$

پس تابع فرد است.

تابع متناوب و توابع مثلثاتی:

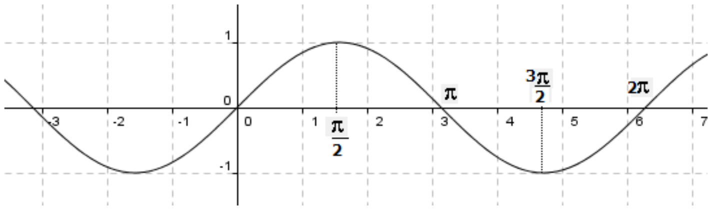
تابع f را متناوب گوئیم هر گاه عدد حقیقی مثبت و مخالف صفر مانند c موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x + c \in D_f$ و f(x+c)=f(x) در این صورتc را دوره تناوب f می نامیم کوچکترین د وره تناوب را دروه تناوب اصلی می گوئیم و با T نمایش می دهیم .

مثال۴: نشان دهید تابع $f(x) = \sin x$ متناوب است و نمودار آن را رسم کنید.

حل: $f(x + 2\pi) = \sin(2\pi + x) = \sin x = f(x)$

بنابراین 2π دوره تناوب اصلی تابع است و نمودار آن مانند شکل زیر است:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0



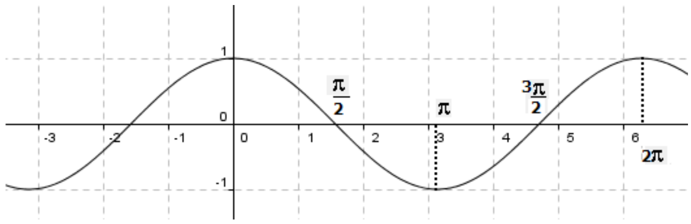
مثال۵: نشان دهید تابع متناوب است $f(x) = \cos x$ و نمودار آن را رسم کنید.

حل:

$$f(x + 2\pi) = \cos(2\pi + x) = \cos x = f(x)$$

بنابراین 2π دوره تناوب اصلی تابع است و نمودار آن مانند شکل زیراست:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1



تمرین ۸-۳

۱-در هر یک از حالات زیر توابع $(f+g), (f-g), (f.g), \left(\frac{f}{g}\right)$ را محاسبه و دامنه هر یک را بدست آورید.

$1) f(x) = 2x + 1 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

$2) f(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad , \quad g(x) = x^2 - x$

$3) f(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x-2}$

$4) f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-2}$

$5) f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \quad , \quad g(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

۲-در هر یک از حالا زیر توابع gof,fof,gof,fog را محاسبه و دامنه هر یک را بدست آورید.

$1) f(x) = 3x + 2 \quad , \quad g(x) = 2x + 4$

$2) f(x) = \dfrac{1}{x-2} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

$3) f(x) = 2x - 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

$4) f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = 2x + 7$

$5) f(x) = \dfrac{1}{x} \quad , \quad g(x) = x - 5$

۳-*زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.*

$1) f(x) = x^2 - x \qquad 2) f(x) = |x| + x$

$3) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} \qquad 4) f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$

$5) f(x) = x^2 + \cos x \qquad 6) f(x) = \tan x + x^3$

$7) f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \qquad 8) f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

۴-دوره تناوب توابع زیر را بیابید .

$1) f(x) = sin2x \qquad 2) f(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

$3) f(x) = \cos 3x \qquad 4) f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{3})$

فصل نهم

حد و پیوستگی

۱-۹مفهوم حد

درتابع f(x) اگر تابع در همسایگی x=a تعریف شده باشد وبا نزدیک کردن x در مقادیر بزرگتر یا کوچکتر ازa به a عرض نقاط به عدد L نزدیک شود می گوئیم حد تابع f(x) در a برابر L است و با نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ نمایش می دهیم .

مثال ۱: در تابع f(x)=x+1 می خواهیم حد تابع را در x=2 بررسی کنیم جدول زیر را در نظر بگیرید.

X	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	....	......	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
F(x)	۹/۳	۳/۹۹	۳/۹۹۹	......	......	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۱

طبق جدول با نزدیک شدن x به ۲ مقادیر f(x) به ۴ نزدیک می شوند پس $\lim_{x\to 2} f(x)$ برای محاسبه حد می توان قضایای زیر که بدون اثبات بیان میشوند را بکاربرد.

قضیه ۱: اگر f(x) یک چند جمله ای باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۲: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}=\frac{\mathrm{L_1}}{\mathrm{L_2}},\qquad (\mathrm{L_1}\neq 0)$$

مثال۲: حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x}{x+1}$ را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 2}2x^2+x}{\lim_{x\to 2}x+1}=\frac{10}{3}$$

توجه : در محاسبه حدهای کسری اگر حاصل حد $\frac{0}{0}$ شد حد مبهم است برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را تجزیه می کنید و پس از حذف عامل صفر کننده از صورت و مخرج کسر حد را محاسبه می کنیم .

مثال۳: حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}\qquad 4)\ \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

حل:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=2$$

$$2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+4}=\frac{2}{5}$$

$$4)\ \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}\times\frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+1}=\lim_{x\to -2}\frac{x+3-1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+3}-1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

توجه: اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ شود برای تجزیه g(x),f(x) می توان آنها را بر (x-a) تقسیم کرد.

مثال۴: حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x-1}$ را بدست آورید.

حل : حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ می باشد برای تجزیه صورت آن را بر x-1 تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۳x^۲-۲x-۲ & x-۱ \\ \underline{-x^۳+x^۲} & \overline{x^۲+۴x+۲} \\ \quad ۴x^۲-۲x & \\ \quad \underline{-۴x^۲+۴x} & \\ \qquad ۲x-۲ & \\ \qquad \underline{-۲x+۲} & \\ \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+4x+2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+4x+2)=7$$

مثال ۵: حاصل $\lim\limits_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ را محاسبه کنید .

حل: برای رفع ابهام از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to8}\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$$

$$=\lim(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4=12$$

۲) $\lim\limits_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲-۴}$

حل: چون $\frac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲-۴}$ پس:

$$\lim_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{(x-۲)(x+۲)}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-x-۲}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(x+۲)(x+\sqrt{x+۲})}=\lim_{x\to۲}\frac{(x+۱)}{(x+۲)(x+\sqrt{x+۲})}=\frac{۳}{۱۶}$$

قضیه: $\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx}{x}=0$

۵) $\lim\limits_{x\to۰}\frac{\sin ۷x+\sin ۳x}{۴x}$

حل چون $\frac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to۰}\frac{\sin ۷x+\sin ۳x}{۴x}$ پس :

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin ۷x}{۴x}+\lim_{x\to۰}\frac{\sin ۳x}{۴x}=\lim_{x\to۰}\frac{۷}{۴}\left(\frac{\sin ۷x}{۷x}\right)+\lim_{x\to۰}\frac{۳}{۴}\left(\frac{\sin ۳x}{۳x}\right)$$

$$= ۷ + ۳ = ۱۰ = ۵$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x}$$

حل: چون $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x}=\frac{0}{0}$ پس :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}(\lim\frac{\sin x}{x})^2=\frac{2}{5}\times 1=\frac{2}{5}$$

تمرین ۹-۱

۱-حدهای زیر را محاسبه کنید .

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ 2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{2x-10}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{3x-3}$ 4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x-2}$ 6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x}$

7) $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 8) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{2x-2}$

9) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-\sqrt{x+6}}$ 10) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x-12}{x-2}$

11) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-x}$ 12) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

13) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$ 14) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-16}{x-2}$

15) $\lim_{x\to 3}\frac{5x-\sin x}{2x+\cos x-1}$ 16) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

۲-۹حد چپ و راست

در تابع f(x) مقدار حد تابع در x=a برای مقادیر کوچکتر از a را حد چپ می نامیم و با نماد $\lim_{x\to a-} f(x)$ نمایش می دهیم و مقدار حد تابع در x=a برای مقادیر بزرگتر از a را حد راست می نامیم و با نماد $\lim_{x\to a+} f(x)$ نمایش می دهیم .

تابع f(x) در x=a دارای حد است اگر و فقط اگر حد چپ و راست آن در x=a مساوی باشند.

مثال۸: حد تابع $f(x)=[x]$ را در x=2 بررسی کنید .

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}[x]=1$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}[x]=2$$

چون حد چپ و راست در x=2 مساوی نیست پس تابع درx=2 حد ندارد

مثال ۹: حدهای زیر را محاسبه کنید

1) $\lim_{x\to 2+}[2x+1]$ 2) $\lim_{x\to 1+}[5-x]$

3) $\lim_{x\to 3-} x-[x]$ 4) $\lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x^2-4}$

حل:

1) $\lim_{x\to 2+}[2x+1]=\begin{bmatrix}+\\5\end{bmatrix}=5$ 2) $\lim_{x\to 1+}[5-x]=[\bar{4}]=3$

3) $\lim_{x\to \bar{3}} x-[x]=3-[\bar{3}]=3-2=1$

4) $\lim_{x\to}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

مثال ۱۰ : حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱)اگر $f(x)=\begin{cases}۳x+۵ & x>-۲\\ x^{۲}-۱ & x<-۲\end{cases}$ در نقطه $x=-۲$

حل :

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(۳x+۵)=-۶+۵=-۱$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(x^{۲}-۱)=۴-۱=۳$$

چون $۳\neq -۱$ است پس تابع در این نقطه حد ندارد.

مثال۳: به ازای چه مقدار a تابع زیر در x=2 دارای حد است؟

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x, x\geq 2 \\ a[x]+x^2, x<2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} ax^2+x=4a+2$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} a(x)+x^2=a[2]+x=a+4$$

حد چپ و راست را با یکدیگر مساوی قرار می دهیم پس:

$$4a+2=a+4\rightarrow 3a=2\rightarrow a=\frac{2}{3}$$

مثال۴: مقادیرb,a را چنان بیابید که تابع زیر در x=-3,x=1 دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax & ,x\geq 1 \\ bx^2+x & ,-3<x\leq 1 \\ ax+1 & ,x<-3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} x^2-ax=1-a$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} bx^2+x=b+1$$

حد چپ و راست درx=۱ را مساوی قرار می دهیم پس:

$$1-a=b+1\rightarrow -a=b$$

$$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3+} bx^2+x=9b-3$$

$$\lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3-} ax+1=-3a+1$$

حد چپ و راست در x=-3 را مساوی قرار می دهیم پس:

$$9b-3=-3a+1\rightarrow 9(-a)-3=-3a+1$$

$$+3a=3+1\rightarrow -6a=4\rightarrow a=-\frac{2}{3} \quad ,b=\frac{2}{3}\rightarrow -9a$$

حد بینهایت

در حدهای کسری اگر صورت عدد غیر صفر و مخرج صفر شود حاصل کسر∞+ یا ∞− می شود برای تعیین علامت ∞ علامت صورت را در علامت مخرج ضرب می کنیم.

مثال ۵:حدهای زیر را محاسبه کنید .

$$1)\ \lim_{x\to o+}\frac{1}{x} \qquad 2)\ \lim_{x\to o-}\frac{1}{x}$$

$$3)\ \lim_{x\to 2-}\frac{x-5}{x-2} \qquad 4)\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}$$

حل:

$$1)\lim_{x\to o+}\frac{1}{\mathrm{x}}=\frac{1}{\mathrm{o}^+}=+\infty \qquad 2)\ \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{o}-}\frac{1}{x}=\frac{1}{\mathrm{o}^-}=-\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to 2-}\frac{x-5}{x-2}=\frac{-3}{o^-}=+\infty \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{o^+}=+\infty$$

مثال۶: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\mathrm{x}^2-4}{\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+4}$$-۱

حل: حاصل حد $\frac{\circ}{\circ}$ می باشد وبرای رفع ابهام داریم :

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\mathrm{x}^2-4}{\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+4}=\lim_{\mathrm{x}\to 2^+}\frac{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2)}{(\mathrm{x}-2)^2}=\lim_{\mathrm{x}\to 2^+}\frac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}-2}=\frac{4}{\mathrm{o}^+}=+\infty$$

۲) $\lim_{\mathrm{x}\to ۰}\frac{۱+\sin \mathrm{x}}{۱-\cos \mathrm{x}}$

حل :

$$۱-\cos \mathrm{x}>۰ \quad , \quad \lim_{\mathrm{x}\to ۰}(۱-\cos \mathrm{x})=۰ \quad , \quad \lim_{\mathrm{x}\to ۰}(۱+\sin \mathrm{x})=۱$$

بنابراین $\lim_{\mathrm{x}\to ۰}\frac{۱+\sin \mathrm{x}}{۱-\cos \mathrm{x}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

برای محاسبه حد در بینهایت موارد زیر مورد استفاده قرار می گیرند :

$$+\infty+\infty=+\infty \qquad -\infty-\infty=-\infty$$

$$(+\infty)\times(+\infty)=+\infty \qquad (-\infty)\times(-\infty)=+\infty$$

$$(-\infty)\times(+\infty)=-\infty \qquad a+\infty=+\infty$$

$$a-\infty=-\infty \qquad a\times(+\infty)=+\infty \quad (a>0)$$

$$a\times(-\infty)=+\infty(a<0) \qquad a\times(-\infty)=-\infty \quad (a>0)$$

$a \times (-\infty) = +\infty \ (a < 0)$ $\qquad$ $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$

حالتهای $\frac{\infty}{\infty}$، $o \times \infty, \infty - \infty$ مبهم می باشند .

مثال ۷: حدهای زیر را محاسبه کنید

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x \qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+5}{2x^2+1} \qquad 4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{x+1}$$

$$5)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-5}} \qquad 6)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

حل:

$$1) \lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x = +\infty + \infty = +\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-\infty} = o$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+5}{2x^2+1} = \quad \frac{+\infty}{+\infty}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+5}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1+o+o}{2+o} = \frac{1}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-3)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{1+\frac{1}{x}} = \frac{+\infty-3}{1+o} = +\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{5}{x})}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{5}{x}}} = \frac{3-o}{-\sqrt{1+o}} = -3$$

$$6)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - \infty_{\text{مبهم}}$$

برای رفع ابهام عبارت را درمزدوج رادیکال ضرب وتقسیم میکنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=o$$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-\sqrt{x^۲-۵x}}{x-\sqrt{x^۲+۹x}}$

حل: چون $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-\sqrt{x^۲-۵x}}{x-\sqrt{x^۲+۹x}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ پس:

$$\lim\frac{۲x-\sqrt{x^۲(۱-\frac{۵}{x})}}{\quad}=\lim\frac{۲x-\sqrt{x^۲}}{\quad}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|x|}{x-|x|}$$

۲) $\lim\limits_{x\to-۳}(x^۲-۹)\cot g(x+۳)$

حل: چون $\lim\limits_{x\to-۳}(x^۲-۹)\cot g(x+۳)=۰\times\infty$ پس :

$$\lim_{x\to-۳}\frac{x^۲-۹}{\frac{۱}{\cot g(x+۳)}}=\lim_{x\to-۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{\tan(x+۳)}=\lim_{x\to-۳}(x-۳)=-۶$$

۴) $\lim\limits_{x\to-۱^-}(\dfrac{[x]+۱}{x+۱}+\sqrt{x^۴+x^۲+۲})$

حل :

$$\lim_{x\to-۱^-}\frac{[x]+۱}{x+۱}=\frac{[-۱^-]+۱}{-۱^-+۱}=\frac{-۲+۱}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-۱^-}\sqrt{x^۴+x^۲+۲}=\sqrt{۱+۱+۲}=\sqrt{۴}=۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-۱^-}(\frac{[x]+۱}{x+۱}+\sqrt{x^۴+x^۲+۲})=+\infty+۲=+\infty$$

۴) $\lim\limits_{x\to-۱^-}(\dfrac{[x]+۱}{x+۱}+\sqrt{x^۴+x^۲+۲})$

حل :

$$\lim_{x\to-۱^-}\frac{[x]+۱}{x+۱}=\frac{[-۱^-]+۱}{-۱^-+۱}=\frac{-۲+۱}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-۱^-}\sqrt{x^۴+x^۲+۲}=\sqrt{۱+۱+۲}=\sqrt{۴}=۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-۱^-}(\frac{[x]+۱}{x+۱}+\sqrt{x^۴+x^۲+۲})=+\infty+۲=+\infty$$

مثال ۲۴: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x(x+۱)})$

حل: چون $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x(x+۱)})=\infty-\infty$ پس:

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{x+۱-۱}{x(x+۱)})=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x+۱}=۱$$

قضیه:

(۱) $\lim\limits_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x=e$

(۲) $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=e$

نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰}(۱+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{a}{x})^{bx}=e^{ab}$$

هرگاه در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ به حالت ۱^∞ تبدیل شود با توجه به قضایای بالا:

و این که:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}(f(x)-۱+۱)^{\frac{f(x)-۱}{f(x)-۱}g(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(((f(x)-۱)+۱)^{\frac{۱}{f(x)-۱}}\right)^{(f(x)-۱)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-۱)g(x)}$$

مثال: حدهای زیر را بیابید

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+۲}{x+۱})^{x+۱}$

راه حل اول: چون $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+۲}{x+۱})^{x+۱}=۱^\infty$ پس:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+۱+۱}{x+۱})^{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x+۱})^{x+۱}=e$$

راه حل دوم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+۲}{x+۱})^{x+۱}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+۲}{x+۱}-۱)(x+۱)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+۱}{x+۱})}=e$$

۶) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^{x-\frac{۳}{۴}}$

حل: چون $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^{x-\frac{۳}{۴}}=۱^{\infty}$ پس :

$$\lim_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^{\frac{۴x-۳}{۴}}=\lim_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^{\frac{x}{۴}}\lim_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^{-\frac{۳}{۴}}$$

۱ ۱

۶) $\lim\limits_{x\to۰}(۱+\sin x)^{\frac{۱}{x}}$

حل: چون $\lim\limits_{x\to۰}(۱+\sin x)^{\frac{۱}{x}}=۱^{\infty}$ پس :

$$\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to۰}(۱+\sin x-۱)\frac{۱}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to۰}\frac{\cos x}{۱}}=e$$

مجانب قائم وافقی

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوئیم هرگاه حد تابع از چپ یا راست $+\infty$ یا $-\infty$ شود.

خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f گوئیم هرگاه حد تابع در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر با b شود .

مثال ۸: مجانب های نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را بیابید و نمودار تابع را رسم کنید

$$\lim_{x\to o^+}f(x)=\lim_{x\to o^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{o^+}=+\infty$$

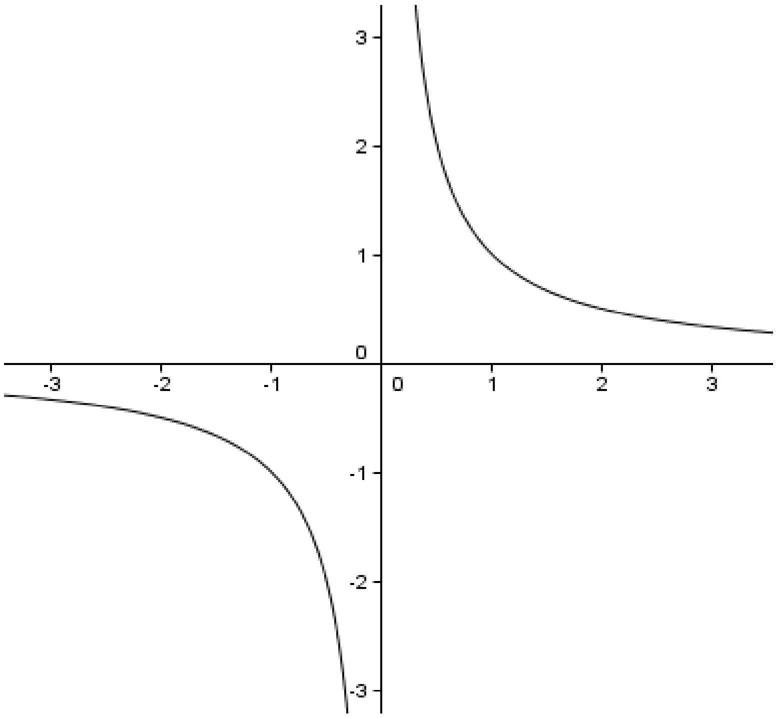
$$\lim_{x\to o^-}f(x)=\lim_{x\to o^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{o^-}=-\infty$$

بنابراین خط $x=0$ مجانب قائم تابع f می باشند

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی تابع f می باشد و نمودار تقریبی تابع به شکل زیر است :



تمرین ۹-۲

۱-حد توابع زیر را در عدد د اده شده بررسی کنید.

$$1) f(x) = [x+1] \qquad , x = -2$$

$$2) f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \qquad , x = 3$$

$$3) f(x) = [x]([x]-1) \qquad , x = 1$$

$$4) f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}} \qquad , x = 1$$

$$5) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x \geq -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \quad x < -1 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} [x]+x & , \quad x < 2 \\ 2x-1 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

۲-مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در x=2 دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x]+x^2 , x > 2 \\ \dfrac{x^2-4}{|2-x|} \quad , x < 2 \end{cases}$$

۳-مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع زیر در x=2,x=1 دارای حد باشد .

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & ,x>2\\ bx+x & ,1<x\leq 2\\ 2ax+3x & ,x\leq 1\end{cases}$$

۴-مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع زیر x=2 و x=-2 دارای حد باشد .

$$f(x)=\begin{cases}a[x]+x & ,|x|<2\\ b+2x & ,|x|>2\end{cases}$$

۵-حدهای زیر را محاسبه کنید .

1) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-1}{x-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[x]-1}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{|x-2|}$

5) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{4-x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+4x-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{2x^2+5}$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{2x-1}$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{9x^2}}$ 12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2+3}-2x$

۶-مجانبهای نمودار توابع زیر را بیابید و نمودار را رسم کنید

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

۷-مجانبهای تابع $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ را بیابید.

۳-۹ قضیه فشردگی (ساندویچ)

هرگاه در همسایگی x=a رابطه $f(x)<g(x)<h(x)$ بر قرار باشد و حد تابع f(x) , g(x) در x=a برابرL شود ، آنگاه حد g(x) نیز در x=a برابرL می باشد.

مثال۱: $\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\frac{1}{x}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1\to -|x|\le |x|\sin\frac{1}{x}\le |x|$$

باتوجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}-|x|=0$ پس طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\frac{1}{x}=0$

مثال ۱۲: $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{2}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{2}{x}\to 2-x<x\left[\frac{2}{x}\right]\le 2$$

باتوجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 0}2-x=\lim\limits_{x\to 0}2=2$ پس طبق قضیه فشردگی:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\right]=2$$

مثال ۱۳ : اگر برای هر x داشته باشیم $|f(x)-۴|\le(۲x-۱)^۲$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\sqrt{f(x)}$ را بیابید.

حل :

$$|f(x)-۴|\le(۲x-۱)^۲\Rightarrow -(۲x-۱)^۲\le f(x)-۴\le(۲x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴-(۲x-۱)^۲\le f(x)\le ۴+(۲x-۱)^۲$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴-(۲x-۱)^۲)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴+(۲x-۱)^۲)=۴$$

پس $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}f(x)}=\sqrt{۴}=۲$

۴-۹پیوستگی

تابع f(x) را در x=a پیوسته گوئیم اگر حد f(x) در x=a با f(a) مساوی باشد.

مثال۱:پیوستگی تابع زیر را در x=2 بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x>2 \\ 3x-1 & ,x=2 \\ x^3-3 & ,x<2 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2+1 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(X) = \lim_{x\to 2^-} x^3-3 = 5$$

$$f(2) = 3(2)-1 = 5$$

چون $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ سپس تابع در x=2 پیوسته است .

مثال ۳۴: مقدار تابع $f(x) = \frac{۲-\sqrt{x+۴}}{x}$ در $x=۰$ را چنان بیابید که در این نقطه پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{۲-\sqrt{x+۴}}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۴-x-۴}{x(۲+\sqrt{x+۴})}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{۲+\sqrt{x+۴}} = \frac{-۱}{۴}$$

پس کافی است $f(۰) = -\frac{۱}{۴}$ باشد.

مثال۲: مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع زیر در x=3 پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & ,x>3 \\ x+a & ,x=3 \\ x^2+b[x] & ,x<3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3^+} ax+b = 3a+b$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2+b[x] = 9+2b$$

$$f(3) = 3+a$$

از مساوی قرار دادن حد چپ و راست و مقدار تابع می توان دو معادله زیر را بدست آورد:

$$3a+b=9+2b \rightarrow 3a-b=9$$

$$9+2b=3+a \rightarrow -a+2b=-6$$

$$\begin{cases} 3a-\mathrm{b}=9 \\ -a+2\mathrm{b}=-6 \end{cases}$$

$$5b=-9 \rightarrow b=-\frac{9}{5} \qquad -\mathrm{a}-\frac{18}{5}=-6 \rightarrow -\mathrm{a}=\frac{18}{5}-6 \rightarrow \mathrm{a}=\frac{12}{5}$$

۱۷–در تابع با ضابطه‌ی زیر مقدار a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در $x=۴$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[۲-x]+b & x<۴ \\ [\frac{x}{۳}]+b & x=۴ \\ \frac{x^{۲}-۱۶}{۴-x} & x>۴ \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} a[۲-x]+b=\lim_{x\to ۴^-} ۲a+a[-x]+b$$

$$=۲a+a[(-۴)^+]+b=۲a-۴a+b=-۲a+b$$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{x^{۲}-۱۶}{۴-x}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{(x-۴)(x+۴)}{۴-x}=-۸$$

$$f(۴)=\left[\frac{۴}{۳}\right]+b=۱+b \Rightarrow \begin{cases} ۱+b=-۸ \\ -۲a+b=-۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱}{۲} \\ b=-۹ \end{cases}$$

پیوستگی چپ وراست

تابع f(x) را در x=a از راست پیوسته گوئیم اگر:

$$\lim_{x\to a^+} \mathrm{f(x)}=\mathrm{f(a)}$$

وتابع f(x) را در x=a ازچپ پیوسته گوئیم اگر:

$$\lim_{x\to a^-} \mathrm{f(x)}=\mathrm{f(a)}$$

مثال۳:تابع زیر در x=1 چه نوع پیوستگی دارد؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & ,x\neq 1\\ 2x-3 & ,x=1\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$$f(1)=2-3=-1$$

چون $\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ پس تابع در x=1 پیوستگی چپ دارد .

۱) $: x=\frac{۱}{۲}$ $\qquad f(x)=۴x+[۲x]$

حل:

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+}(۴x+[۲x])=۴(\frac{۱}{۲})+[۱^+]=۲+۱=۳$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^-}(۴x+[۲x])=۴(\frac{۱}{۲})+[۱^-]=۲+۰=۲$$

چون $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$ موجود نمی‌باشد پس در نقطه $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته نمی‌باشد اما:

$$f(\frac{۱}{۲})=۴(\frac{۱}{۲})+[۱]=۲+۱=۳ \Rightarrow \lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+} f(x)=f(\frac{۱}{۲})=۳$$

پس تابع در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۲}$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی تابع در بازه

تابع f(x) را روی بازه [a,b] پیوسته گوئیم اگر در تمام نقاط بازه (a,b) پیوسته باشد و تابع در x=a پیوستگی راست ودر x=b پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع f(x)=[x] را در بازه [1,2] بررسی کنید

حل:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}[x]=1 \qquad ,f(2)=2$$

چون تابع در x=2 پیوستگی چپ ندارد پس تابع دراین بازه پیوسته نیست.

مثال۵: پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه [0,4] بررسی کنید.

حل: اگر x_o یک عدد دلخواه در بازه (0.4) باشد ، داریم :

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to xo} \sqrt{x} = \sqrt{x_o} = f(x_o)$$

پس تابعf در نقاط بازه (0,4)پیوسته است.

$$\lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{x\to o^+} \sqrt{x} = o \quad = f(o)$$

$$\lim_{x\to 4^-} (x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{x} = 2 = f(4)$$

پس تابع در x=o پیوستگی راست ودر x=4 پیوستگی چپ دارد پس تابع f در بازه [o,4] پیوسته است.

تمرین ۹-۳

۱-با استفاده از قضیه فشردگی حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to o} x^2 \cos\frac{1}{x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}|x-1| \sin\frac{1}{x-1}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] \qquad 4)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{[x]}{x}$$

۲-پیوستگی توابع زیر را در عدد داده شده بررسی کنید.

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} \ , \ x > 3 \\ 2x \ , \ \ x = 3 \\ [x]+4 \ , \ x < 3 \end{cases} \qquad (x = 3)$$

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & , x>2\\ \frac{1}{8}x & , x=2\\ x+1 & , x<2\end{cases}$ $\quad (x=2)$

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1\\ 2x-1 & , x=1\end{cases}$ $\quad (x=1)$

۲- مقادیر aو b را چنان بیابید که تابع زیر در x=2 پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}a[x]+x^2 & , x<2\\ bx+1 & , x=2\\ ax+x & , x>2\end{cases}$$

۳- مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در x=3 پیوستگی راست داشته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{|x-3|} & , x\neq 3\\ ax+2 & , x=3\end{cases}$$

۴- پیوستگی توابع زیر را در فاصله داده شده بررسی کنید.

1) $f(x)=[x] \quad , \quad \left[1,\frac{3}{2}\right]$

2) $f(x)=[x] \quad , \quad [1,3]$

3) $f(x)=\frac{1}{x-1} \quad , \quad [2,5]$

4) $f(x)=\sqrt{x-2} \quad , \quad [2,10]$

۸-مقدار a و b را چنان تعیین کنید که توابع زیر در نقاط تعیین شده پیوسته باشند.

۱) $x=۱$ $\quad f(x)=\begin{cases}xe^{x} & x\leq ۱\\ e^{۲ax} & x>۱\end{cases}$

۲) $x=۴$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-۴)}{\sqrt{x}-۲} & x\neq ۴\\ a & x=۴\end{cases}$

۳) $x=۰$ $\quad f(x)=\begin{cases}۲x^{\frac{-۱}{۴}} & x\neq ۰\\ a+۲ & x=۰\end{cases}$

۴) $x=۳$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x^۳-۲۷} & x\neq ۳\\ \dfrac{a+۲}{(۲a-۱)} & x=۳\end{cases}$

فصل دهم

مشتق

۱۰-۱ تعریف مشتق

مشتق تابع f(x) *را در* $x = a$ *با نماد* $f'(a)$ *نمایش می دهید و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال ۱: با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(x) = x^2$ *را در* $x=2$ *محاسبه کنید .*

حل:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

مثال ۲: با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ *را در* $x = 3$ *محاسبه کنید .*

حل:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 3(}\frac{x-3}{x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} == \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

تابع مشتق

مشتق تابع $f(x)$ *را با نماد* $f'(x)$ *یا* $\frac{df}{\mathrm{dx}}$ *نمایش می دهیم و برای محاسبه آ ن از فرمول معادل تعریف مشتق که به صورت زیر تعریف می شود استفاده می کنیم:.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال : با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(x) = x^2$ را محاسبه کنید .

حل:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)^2-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x
\end{aligned}
$$

مشتق چپ و راست

مشتق چپ *f(x)* در *x=a* را با نماد $f'(a)_+$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم

$$f'(a)_+ = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق راست تابع *f(x)* در *x=a* را با نماد $f'(a)_-$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم :

$$f'(a)_- = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تابع *f(x)* در *x=a* مشتق پذیر است اگرو فقط اگر $f'(a)_+ = f'(a)_-$.

مثال ۴: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x|$ را در *x=0* بررسی کنید .

حل:

$$f'(0)_+ = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

$$f'(0)_- = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

چون $f'(0)_+ \neq f'(0)_-$ پس تابع در *x=0* مشتق پذیر نیست .

قضیه: اگر تابع *f* در *x=a* مشتق پذیر باشد آنگاه تابع *f* در *x=a* پیوسته است .

مثال ۵: مشتق پذیری تابع زیر را در *x=2* بررسی کنید .

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 2 \\ x & , \quad x < 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x+1 = 3 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

چون تابع در *x=2* پیوسته نیست پس مشتق پذیر نیز می باشد .

تمرین۱۰-۱

۱- با استفاده از تعریف مشتق توابع زیر را در عدد داده شده بدست آ ورید .

1) $f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad x = 2$

2) $f(x) = \sqrt{x+1} \quad , \quad x = 3$

3) $f(x) = x^3 \quad , \quad x = 1$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad x = 8$

۲- با استفاده از تعریف مشتق توابع زیر را بدست آورید .

1) $f(x) = x^2 + x$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$

3) $f(x) = x^3$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$

۳- مشتق پذیری توابع زیر را در عدد داده شده بدست آورید .

1) $f(x) = x|x-2| \quad , \quad x = 2$

2) $f(x) = [x] \quad , \quad x = 1$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$

۲-۱۰ قواعد مشتق گیری

اگر C عدد حقیقی و n عدد گویا و U, V توابعی از x باشند آنگاه :

1) $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = CU \Rightarrow f'(x) = CU'$

3) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

4) $f(x) = U + V \Rightarrow f'(x) = U' + V'$

5) $f(x) = UV \Rightarrow f'(x) = U'V + V'U$

6) $f(x) = \frac{U}{V} \Rightarrow f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

7) $f(x) = U^n \Rightarrow f'(x) = nU'U^{n-1}$

8) $f(x) = \sqrt{U} \Rightarrow f'(x) = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$

9) $f(x) = \sqrt[m]{U^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{nU'}{m\sqrt[m]{U^{m-n}}}$

10) $f(x) = sinU \Rightarrow f'(x) = U'cosU$

11) $f(x) = cosU \Rightarrow f'(x) = -U'sinU$

12) $f(x) = tanU \Rightarrow f'(x) = U'(1 + tan^2U)$

13) $f(x) = cotU \Rightarrow f'(x) = -U'(1 + cot^2U)$

14) $f(x) = \sin^{-1} U \Rightarrow f'(x) = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

15) $f(x) = \cos^{-1} U \Rightarrow f'(x) = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$

16) $f(x) = \tan^{-1} U \Longrightarrow f'(x) = \frac{U'}{1+U^2}$

17) $f(x) = \cot^{-1} U \Longrightarrow f'(x) = \frac{-U'}{1+U^2}$

18) $f(x) = e^U \Longrightarrow f'(x) = U'e^U$

19) $f(x) = Ln\, U \Longrightarrow f'(x) = \frac{U'}{U}$

مثال ۱: با استفاده از قواعد مشتق گیری مشتق توابع زیررا محاسبه کنید .

1)$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4$ 2)$f(x) = (2x^2 + 3x)(x^3 + 3x^2)$

3)$f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x}{4x + 1}$ 4)$f(x) = (x^4 - 2x^2)^5$

5)$f(x) = \sqrt{x}$ 6)$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x}$

7)$f(x) = \sin(x^2)$ 8)$f(x) = 5tan^3(\sqrt{x})$

9) $f(x) = \sin^{-1} 2x$ *10)* $f(x) = \tan^{-1} x$

11) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ *12)* $f(x) = Ln(x^3 + 2x)$

حل:

1)$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x$

2) $f(x) = (2x^2 + 3x)(x^3 + 3x^2) \Longrightarrow$

$f'(x) = (4x + 3)(x^3 + 3x^2) + (3x^2 + 6x)(2x^2 + 3x)$

3) $f(x) = \frac{5x^2+3x}{4x+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(10x+3)(4x+1)-4(5x^2+3x)}{(4x+1)^2}$

4) $f(x) = (x^4 - 2x^2)^5 \Longrightarrow f'(x) = 5(4x^3 - 4x)(x^4 - 2x^2)^4$

5) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x^2-x)^3}}$

7) $f(x) = \sin(x^2) \Longrightarrow f'(x) = 2xcos(x^2)$

8) $f(x) = 5tan^3\left(\sqrt{x}\right) \Longrightarrow$

$f'(x) = 5(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1 + tan^2(\sqrt{x})tan^2(\sqrt{x})$

9) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

10) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

11) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$

12) $f'(x) = \frac{3x^2+2}{x^3+2x}$

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیره ای)

در بعضی از قواعد مشتق گیری قاعده زنجیره ای را به طور غیر مستقیم بیان کردیم حال به بیان دقیق این قاعده می پردازیم.

اگر تابع g در x مشتق پذیر و تابع f در $g(x)$ مشتق پذیر باشد در این صورت مشتق تابع fog در x از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$y = fog(x) \Longrightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

به عبارت دیگر اگر y تابعی از U و همچنین U تابعی از x باشد می توان قاعده زنجیرای را به شکل زیر نوشت :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

مثال ۵: اگر $f'(x) = 2x + 5$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد مشتق تابع fog را محاسبه کنید .

حل:

$$(fog)'_{(x)} = g'(x)f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x} + 5)$$

مثال ۶: اگر $y = x^2 + 2x \quad , \quad x = t^3 + 5t$ باشد، $\frac{dy}{dt}$ را بیابید .

حل:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} = (2x + 2)(3t^2 + 5) = (2t^3 + 1t + 2)(3t^2 + 5)$$

مثال ۷: اگر $\begin{cases} x = ۲t + ۳ \\ y = t^{۳} - ۱ \end{cases}$ باشد مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در $t = ۴$ بیابید.

$$\frac{dx}{dt} = ۲ \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ۳t^{۲} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۳t^{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(t = ۴) = ۶$$

مثال ۸: اگر $\begin{cases} x = \ln(t + \cos t) \\ y = e^{t^{۲}} + e^{t} \end{cases}$ باشد آن‌گاه $\frac{dy}{dx}$ را برای $t = ۰$ بیابید.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{۱ - \sin t}{t + \cos t} , \frac{dy}{dt} = ۲te^{t^{۲}} + e^{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۲te^{t^{۲}} + e^{t}}{\frac{۱ - \sin t}{t + \cos t}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(t = ۰) = ۱$$

تمرین۱۰-۲

۱- مشتق توابع زیر را بیابید .

1) $y = \sqrt{x^3 - x}$ 2) $y = \frac{5x^2+3x}{x^3-1}$

3) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-5}$ 4) $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{3x-5}}$

5) $y = (\frac{2x+1}{x+4})^5$ 6) $y = x(2x+7)^3$

7) $y = \frac{1}{(x-1)^3}$ 8) $y = \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}$

9) $y = \cos(\frac{1}{x})$ 10) $y = \frac{x-sinx}{x^3-cosx}$

11) $y = \sqrt{\cot x}$ 12) $y = 2sin^3(x + \frac{\pi}{4})$

13) $y = \sqrt[3]{\sin x}$ 14) $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

15) $y = x^3 \, sin2x$ 16) $y = x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

17) $y = \tan(\frac{2x-1}{x+4})$ 18) $y = \cos(\sin x)$

19) $y = \cos^{-1} x^2$ 20) $y = xe^{2x}$

21) $y = x^3 Lnx$ 22) $y = \frac{\sin^{-1} x}{e^x}$

23) $y = \sqrt{e^{4x}}$ 23) $y = \sin(e^{3x})$

۲- اگر $g'(x) = \frac{1}{x+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ باشد مشتق تابع gof را محاسبه کنید .

۳-اگر $f(2x+1) = x^3 + x$ باشد، مقدار $f'(5)$ را بیابید .

۴-در هر یک از توابع زیر $\frac{dy}{\mathrm{dx}}$ را بیابید .

1) $y = u^3 + u$, $u = \sqrt{x}$

2) $y = \frac{u}{u+1}$, $u = x^2 - x$

3) $y = \sqrt{u-3}$, $u = \sin x$

4) $y = sin^2 u$, $u = x^3$

5) $y = \tan u$, $u = \cos x$

۳-۱۰ مشتق گیری ضمنی و مشتق مراتب بالاتر

مشتق گیری ضمنی

به عبارت $F(x,y)=0$ که y بر حسب x نوشته نشده باشد ضمنی می گویئم و برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ می توان از رابطه $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ استفاده کرد . اگر y را ثابت فرض کرده از عبارت $F(x,y)=0$ نسبت به xمشتق بگیریم F_x به دست می آید و اگر x را ثابت فرض کرده و از عبارت $F(x,y)=0$ نسبت به y مشتق بگیریم F_y بدست می آید .

مثال ۱: در هر یک از حالات زیر $\frac{dy}{dx}$ را بیابید .

$1)2x^3y^2+5x^2+2y^2=0$ $\qquad$ $2)x^3siny+\sqrt{xy}=0$

$3)\ x^2-5xy^2=sinxy$ $\qquad$ $4)\frac{x}{y}+x^2\sqrt{y}-xcosy=0$

حل:

$$1)2x^3y^2+5x^2+2y^2=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{6x^2y^2+10x}{4x^3y+4y}$$

$$2)x^3siny+\sqrt{xy}=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2siny+\frac{y}{2\sqrt{xy}}}{x^3cosy+\frac{x}{2\sqrt{xy}}}$$

$$3)x^2-5xy^2=sinxy\Longrightarrow x^2-5xy^2-sinxy=0\Longrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-5y^2-ycos\,xy}{-10xy-xcosxy}$$

$$4)\frac{x}{y}+x^2\sqrt{y}-xcosy=0\Longrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{y}+2x\sqrt{y}-cosy}{\frac{x}{y^2}+x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)+x\,siny}$$

مشتق مراتب بالاتر

مشتق تابع $f(x)$ را با $\frac{dy}{dx}$ یا y' یا$f'(x)$ *نمایش می دهیم . اگر از تابع* $f'(x)$ *مشتق بگیریم ان را با* $f''(x)$ ، $\frac{d^2y}{d^2x}$ یا y'' *نمایش می دهیم به طور کلی مشتق* n*ام تابع* $f(x)$ *را با* $\frac{d^ny}{d^nx}$ یا y^n یا$f^{(n)}(x)$*نمایش می دهیم .*

مثال ۲: اگر $y=x^4-3x^3+x^2+1$ *باشد ،مقادیر* $y',y'',y^{(3)}$ *را حساب کنید*

حل:

$y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x$
$y'' = 12x^2 - 18x + 2$
$y^{(3)} = 24x - 18$

مثال ۳: اگر $x^2 + y^2 - 1 = 0$ باشد y', y'' رابیابید .

$$y' = -\frac{2x}{2y} \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y'' = -\frac{x'y - y'x}{y^2} = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} \Longrightarrow y'' = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$
$$= -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

تمرین۱۰-۳

۱- در هر یک از حالات زیر y' را محاسبه کنید .

1)$x^3 - 4x^2y + 2y^2 - 1 = 0$ 2)$x^3 \sin y - x^2\sqrt{y} - y^2 = 0$

$3)\frac{\cos x}{y} + \sqrt{xy} - \sin x = 0$ $\qquad$ $4) \cos xy + 2x^5 y + x^2 = 0$

$5)\frac{x^2}{y} + x^3 \tan y - x\sqrt[3]{y} = 0$ $\qquad$ $6) 2x^4 y - x\sin xy - y = 0$

۲- در توابع زیر y', y'' را بدست آورید .

$1) x^3 - \sin^2 x$ $\qquad$ $2) y = \frac{1}{x+1}$

$3) x^2 - 2y^2 = 1$ $\qquad$ $4) x^3 + y^3 - 5 = 0$

۳- در توابع زیر $y^{(4)}$ را بدست آورید .

$1) y = \sin(2x)$ $\qquad$ $2) y = \cos(2x)$

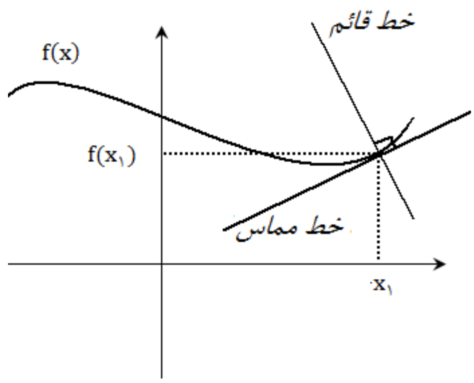
$3) y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $4) y = \sin^2(x)$

۴-۱۰ کاربردهای مشتق (۱)

خط مماس و قائم بر منحنی در نقطه ی واقع بر منحنی

برای پیدا کردن خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ی (x_1, y_1) واقع بر منحنی شیب خط مماس از رابطه ی $\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ که همان $f'(x)$ است محاسبه می شود .

و شیب خط قائم قرینه و معکوس شیب خط مماس است .



با قرار دادن x_1, y_1, m در فرمول زیر معادله خط مماس و قائم را بدست می آوریم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال۱: معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 + 3x$ در نقطه به طول ۱ واقع بر منحنی را بیابید .

حل:

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 4 \quad , \quad y' = 2x + 3 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 5$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{5}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow\begin{cases} y-4=5(x-1)\Rightarrow y=5x-1 & \text{خط مماس} \\ y-4=-\dfrac{1}{5}(x-1)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{21}{5} & \text{خط قائم} \end{cases}$$

مثال ۲: مختصات نقاطی روی منحنی $y=\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+2$ بیابید که خط مماس بر منحنی در آن نقاط با خط $y=4x-1$ موازی باشد .

حل: دو خط در صورتی موازیند که شیب آنها مساوی باشد بنابراین مشتق دو خط را مساوی یکدیگر قرار می دهیم :

$y=\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+2\Longrightarrow y'=3x^2+1$

$y=4x-1\Longrightarrow y'=4$

$\Longrightarrow 3x^2+1=4\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

$x=1\Longrightarrow y=4\ \Longrightarrow\quad (1,4)$

$x=-1\Longrightarrow y=0\ \Longrightarrow\quad (-1,0)$

مثال ۳: معادله خط مماس بر منحنی $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+3\mathrm{x}-4=0$ در نقطه $(1,-1)$ را بدست آورید .

حل:

$$x_1=1,\quad y_1=-1\qquad y'=-\frac{2x+3}{2y}\Longrightarrow \mathrm{m}_{\text{مماس}}=-\frac{5}{-2}=\frac{5}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Longrightarrow y+1=\frac{5}{2}(x-1)\Longrightarrow y=\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}$$

مثال ۴: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=x^2$ از نقطه $A(3,5)$ را بدست آورید.

حل: چون نقطه A در معادله منحنی صدق نمی کند پس خارج منحنی قرار دارد . اگر خط مماس بر منحنی در نقطه $(a,f(a))$ منحنی را قطع کند، در این صورت معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه را بدست می آوریم .

$f'(x)=2x\Longrightarrow m=2a$

$x_1=a\quad,\quad y_1=f(a)=a^2$

$y-y_1=m(x-x_1)\Longrightarrow$

$y-a^2=2a(x-a)$ معادله خط مماس بر منحنی

چون خط مماس از خط Aعبور می کند پس مختصات ان در معادله صدق می کند پس:

$5-a^2=2a(3-a)\Longrightarrow 5-a^2 6a-2a^2\Longrightarrow a^2-6a+5=0\Longrightarrow a=5$ یا $a=1$

$a=5\Longrightarrow y-25=5(x-5)\Longrightarrow y=5x$

$a=1\Longrightarrow y-1=2(x-1)\Longrightarrow y=2x-1$

بنابراین از نقطه A دو خط مماس بر منحنی می توان رسم کرد .

آهنگ تغییر متوسط و لحظه ای

در تابع $y=f(x)$ آهنگ تغییر متوسط y نسبت به x وقتی که x از x_1 تا x_2 تغییر کند با نماد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نمایش می دهیم و از رابطه ز یر محاسبه می کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در $x=a$ برابر است با $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که همان $f'(a)$ می باشد .

مثال ۵: در تابع $y=x^3+x$ آهنگ تغییر متوسط y نسبت به x از $x_1=1$ تا $x_2=3$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(3)-y(1)}{3-1}=\frac{30-2}{2}=14$$

آهنگ تغییر y نسبت به x در $x=2$ به صورت زیر محاسبه می شود :

$$y'=3x^2+1 \Rightarrow y'(2)=13$$

مثال ۶: معادله مکان متحرکی از معادله $x(t)=t^2+3t$ بدست می آید که t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر است . سرعت متوسط این متحرک از $t_1=0$ تا $t_2=5$ و سرعت لحظه ای را در $t=3$ محاسبه کنید .

حل: در مسائل فیزیکی منظور از سرعت همان آهنگ تغییر نسبت به زمان است پس :

سرعت متوسط $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(5)-x(0)}{5-0}=\frac{40-0}{5}=8\,m/s$

سرعت لحظه ای $V(t)=x'(t)=2t+3 \Rightarrow V(2)=7\ m/s$

مثال ۷: آهنگ تغییر لحظه ای مساحت دایره نسبت به شعاع آن در دایره ای به شعاع 5cm چقدر است؟

حل:

$$S(r)=\pi r^2 \Rightarrow S'(r)=2\pi r \Rightarrow S'(5)=10\pi$$

تمرین۱۰-۴

۱- معادله خط مماس و قائم بر منحنی های زیر در نقاط داده شده را بدست آورید .

1) $y = x^3 - 2x^2 + 1 \quad , \quad x_1 = 2$

2) $y = 2x + \sqrt{x} \quad , \quad x_1 = 4$

3) $y = \sqrt{x+1} \quad , \quad x_1 = 3$

4) $y = \frac{2x-1}{x+1} \quad , \quad x_1 = -2$

5) $y = \sin x \quad , \quad x_1 = \frac{\pi}{4}$

۲- مختصات نقاطی روی منحنی $y = x^3 - 3x + 1$ را بیابید که خط مماس بر منحنی موازی محور x ها باشد .

۳-مختصات نقاطی روی منحنی $y = \frac{x-1}{x-2}$ بیابید که خط مماس بر منحنی با خط $y = -x + 2$ موازی باشد .

۴-معادله خط مماس و قائم بر منحنی های زیر در نقطه A داده شده را بیابید .

1) $x^2 + y^2 = 2 \quad , \quad A(-1,1)$

2) $x^3 + 2xy - x^2 - 4 = 0 \quad , \quad A = (1,2)$

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3 = 0 \quad , \quad A(4,1)$

۵-از نقطه $A(2,1)$ دو خط مماس بر منحنی $y = x^2 + 1$ رسم می کنیم مختصات طول نقاط تماس را بیابید .

۶-در تابع $y = x^2 + \sqrt{x}$ آهنگ تغییر متوسط y نسبت به x از $x_1 = 1$ تا $x_2 = 4$ و آهنگ تغییر لحظه ای در $x=4$ را بیابید .

۷-معادله مکان متحرکی از رابطه $x(t) = t^3 + 2t + 1$ بدست می آید که t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر است .

سرعت متوسط این متحرک از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3$ و سرعت لحظه ای را در $t=2$ محاسبه کنید .

۸- آهنگ تغییر لحظه ای مساحت یک مربع نسبت به ضلع ان در مربعی به ضلع ۳ چقدر است؟

۵-۱۰کاربرد مشتق(۲)

صعودی و نزولی بودن نمودار تابع

اگر تابع f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد وبرای هر x دراین بازه داشته باشیم :

۱- $F'(x)>0$ آنگاه تابع F دراین بازه صعودی است.

۲- $F'(x)<0$ انگاه تابع F دراین بازه نزولی است.

مثال۱: تابع $y=x^2-2x+3$ در چه بازه هائی صعودی یانزولی است ؟

حل:

$$y' = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	

تابع در بازه (۱و∞−) نزولی ودر بازه (∞+و۱) صعودی است.

نقاط اکسترمم نسبی نمودار

تابع f در c دارای ماکزیمم نسبی است اگر بازه بازی شامل c وجود داشته باشد که برای هرx در آن بازه داشته باشیم $f(x)\leq f(c)$.

تابع f در c دارای مینیمم نسبی است اگر بازه بازی شامل c وجود داشته باشد که برای هرx در آن بازه داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$.

به نقاط ماکزیمم ومینیمم اکسترمم می گوئیم.

آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترمهای نسبی

برای یافتن نقاط اکسترمم تابع مشتق پذیرf مشتق تابع را مساوی صفر قرار می دهیم اگر در جواب بدست آمده مشتق تغییر علامت دهد آن نقطه اکسترمم نسبی است .

وبرای تعیین نوع اکسترمم از صعودی و نزولی بودن تابع استفاده می کنیم .

مثال۲: برای تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ اکسترمم های نسبی تابع و صعودی یا نزولی بودن نمودار را تعیین کنید :

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \to x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	—	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲ Max	↘	-۲ min	↗	$+\infty$

بنابراین نقطه (۲و۰) ماکزیمم نسبی و نقطه (۲- و۲)مینیمم نسبی و تابع در بازه های $(-\infty, 0)$ و (∞+و۲)صعودی ودر بازه(۲و۰)نزولی است.

نقاط بحرانی

نقطه $c \in D_f$ را یک نقطه بحرانی تابع f گوئیم اگر f'(c)=0 یا f'(c) موجود نباشد

مثال۳:طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^3-3x$ را بیابید.

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \to 3x^2 = 3 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1$$

چون f'(1)=f'(-1)=0 پس x=-1,x=1 طول نقاط بحرانی تابع f می باشند.

مثال ۴: طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را بیابید.

حل:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad D_f = [-2,2]$$

چون f'(-2),f'(2),f'(0)=0 وجود ندارند پس نقاط $x = 0$, $x=\pm 2$ نقاط بحرانی تابع f می باشند .

مثال۵: طول نقاط کسترمم نسبی تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در بازه [-1,2] بیابید.

حل:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \to x = 1$$

چون f'(2),f'(-1),f'(1)=0 وجود ندارند چون نقاط x=1, x=-1, x=2 نقاط بحرانی تابع f می باشند.

نقاط اکسترمم مطلق

بالاترین نقطه نمودار را ماکزیمم مطلق پائین ترین نقطه نمودار را در صورت وجود مینیمم مطلق تابع می گوئیم برای یافتن این نقاط ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می کنیم نقطه ای که بیشترین عرض را دارد ماکزیمم مطلق و نقطه ای که کمترین عرض را دارد min مطلق می نامیم

مثال۶: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در بازه [0.3] بیابید.

حل:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

نقاط x=0,1,3 نقاط بحرانی تابع می باشند .

$$x = o \rightarrow y = o$$

$$x = 1 \rightarrow y = -1$$

$$x = 3 \rightarrow y = 3$$

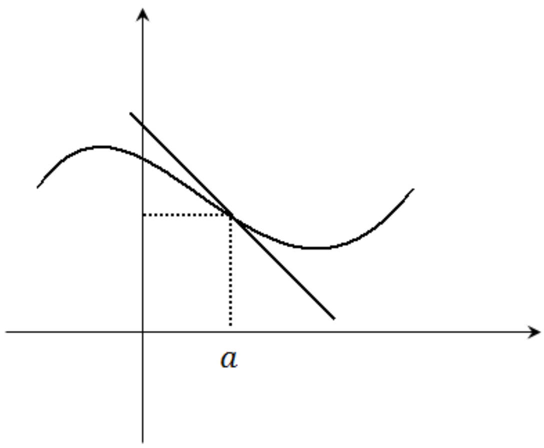
بنابراین نقطه ۱- و ۱ مینیمم مطلق و نقطه (۳و۳) ماکزیمم مطلق تابع f می باشد.

جهت تقعر و نقطه عطف منحنی

اگر مشتق دوم تابع f در نقاط بازه (a,b) مثبت باشد، تقعر تابع دراین بازه به سمت بالا و اگر منفی باشد تقعر به سمت پائین می باشد در نقطه ای که خط مماس بر منحنی در آن نقطه وجود دارد و جهت تقعر منحنی در آن نقطه عوض می شود نقطه عطف می نامیم .

درتوابع مشتق پذیر مشتق دوم در نقطه عطف صفر می شود .

در شکل زیر تقعر نمودار تابع در بازه $(-\infty, a)$به سمت پائین ودر بازه $(a, +\infty)$ به سمت بالا و نقطه (a,f(a)) نقطه عطف تابع می باشد .



مثال ۷: جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $y=x^3-3x^2-1$ را تعیین کنید .

حل:

$$y' = 3x^2 - 6x \to y" = 6x - 6 = 0 \to 6x = 6 \to x = 1$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$y"$		$-$	۰	$+$	
y			-۳		

پس تقعر منحنی در بازه(۱ و$-\infty$) روبه پائین و در بازه $(1, +\infty)$ روبه بالا و نقطه (۳-و۱) نقطه عطف نمودار است.

رسم نمودار تابع

برای رسم نمودار تابع f مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- *تعیین دامنه تابع.*
۲- *پیدا کردن مجانبها در صورت وجود.*
۳- *محاسبه f' و رسم جدول تغییرات و تعیین نقاط اکسترمم تابع.*
۴- *محاسبه $f"$ و رسم جدول تقعر و تعیین نقاط عطف.*
۵- *تعیین نقاط کمکی برای دقیقتر شدن رسم نمودار.*
۶- *رسم نمودار با استفاده از اطلاعات فوق .*

مثال۸: نمودار $y=x^2-2x$ را رسم کنید.

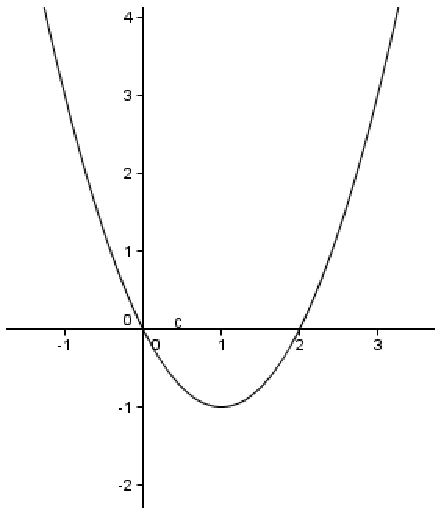
حل:

$$D = R \qquad\qquad y' = 2x - 2 = 0 \to x = 1$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
Y'		—	۰	+	
y		↘	۱- min	↗	

$y''=2$ تقعر منحنی به سمت بالاست.

نقاط(۰,۰)و(۲,۰) را نقاط کمکی می گیریم و نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود .



مثال۹: نمودار تابع $y=-x^3+3x^2+1$ را رسم کنید

حل:

$$D = R \quad y' = -3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(-x+2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
Y'		—	۰	+	۰	—	
y		↘	۱ min	↗	۵ max	↘	

$$y'' = -۶x + ۶ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
Y''		+	۰	—	
Y		∪	۳ نقطه عطف	∩	

مثال۱۰: نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2-1}$ را رسم کنید.

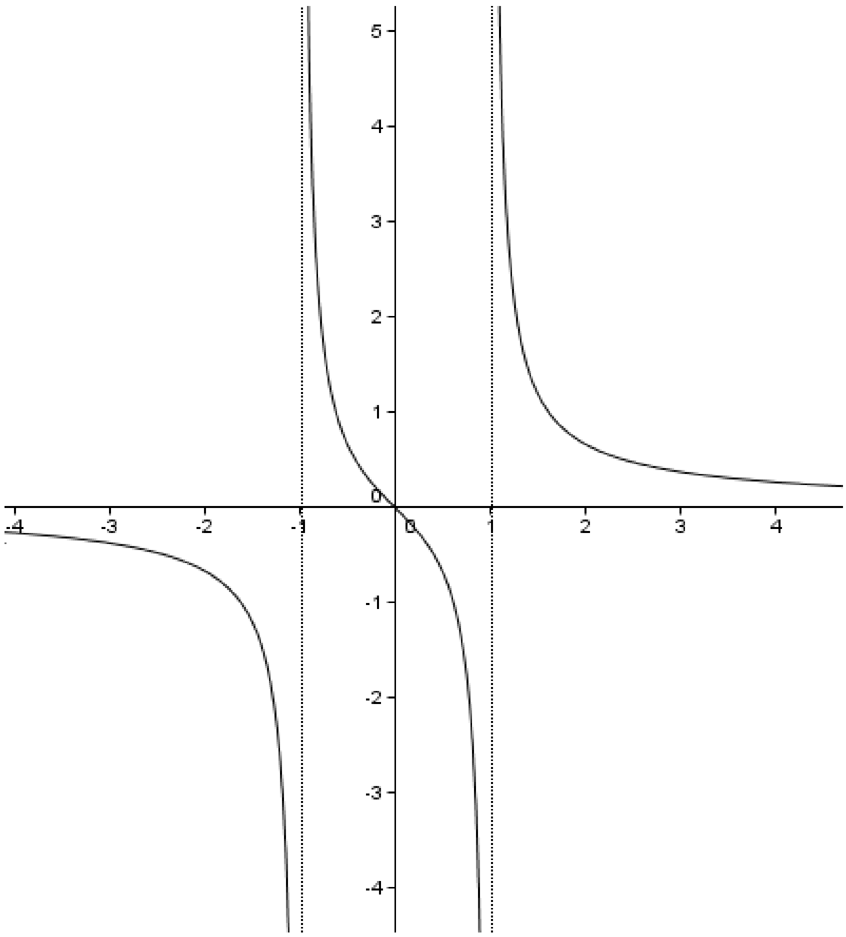
$D = R - [-1,1]$ $\qquad\qquad x = 1 \ , x = -1$ مجانب های قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 - 1} = 0 \to \mathrm{y} = 0$ مجانب افقی

$y' = \frac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ همواره منفی

$$y" = \frac{-2x(x^2-1)^2 - 4x(x^2-1)(-x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+1+2x^2+2)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(\mathrm{x}^2-1)^3}$$

$$y" = 0 \to 2x(x^2+3) = 0 \to x = 0$$



تمرین۱۰-۵

۱-درتوابع زیر نقاط اکسترمم نسبی را بدست آورده وبازه هائی که تابع در آن بازه ها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

$1)y = x^3 + 3x^2 - 2$ $\qquad$ $2)y = x(x-2)$

$3)y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ $\qquad$ $4)y = x^3 - 3x + 5$

$5)y = x^3 + x$ $\qquad$ $6)y = x^4 - 2x^2$

$7)\dfrac{1}{x^2 - 1}$ $\qquad$ $8)y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

۲-مقادیر a,b را چنان بیابید که نقطه A(1,5) اکسترمم نسبی نمودار تابع $y=x^3+ax+b$ باشد.

۳-نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را در بازه داده شده بدست آورید.

$1)y = x^2 - 4x \quad , \quad [0,3]$

$2)y = -x^2 + 2x + 2 \quad , \quad [-1,2]$

$3)y = x^3 - 3x^2 + 1 \quad , \quad [1,3]$

$4)y = \dfrac{x}{x+1} \quad , \quad [0,2]$

$5)y = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad [-1,1]$

$6)y = x\sqrt{4 - x^2} \quad , \quad [-2,2]$

۴-*جهت تقعر و نقطه عطف نمودار توابع زیر را تعیین کنید.*

$1)y = x^2 + 3x - 1$ $\qquad$ $2)y = x^3 - 3x^2 - 4$

$3)y = x^4 + x^2$ $\qquad$ $4)y = x^4 - 2x^3 + x - 1$

$5)y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $6)y = \dfrac{x}{x-1}$

۵-مقادیرb,a را چنان بیابید که نقطه a(-1,2) نقطه عطف نمودار تابع $y = x^3 - ax^2 + b$ باشد.

۶-مقادیرb,a راچنان بیابید که تابع $y = x^3 + ax^2 + bx$ در $x=1$ دارای اکسترمم نسبی ودر $x = \frac{1}{3}$ نقطه عطف داشته باشد.

۷-نمودار توابع زیر را رسم کنید

$1) y = -x^2 + 4x + 1$ $\qquad$ $2) y = 2x^2 - 4x - 1$

$3) y = (x-1)^3$ $\qquad$ $4) y = x^3 - 3x^2 + 1$

$5) y = x^4 + 1$ $\qquad$ $6) y = x^4 + 4x^3 + 3$

$7) y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $\qquad$ $8) y = \dfrac{1}{1-x^2}$

۶-۱۰ قاعده هوپیتال

اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ شود بر ای رفع ابهام می توان $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ را بدست آورد.

مثال۱: حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوبیتال بدست آورید.

$1) \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$ $\qquad$ $2) \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^2-x-22}{x^2-4}$

$3) \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$ $\qquad$ $4) \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}$

$5) \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x}{2x}$ $\qquad$ $6) \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x}{tan3x}$

$7) \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^2}$

حل: همه حدهای داده شده به صورت مبهم $\frac{0}{0}$می باشند.

$$1) \lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{1} = 7$$

$$2) \lim_{x\to 2}\frac{x^4-x^2-x-10}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{4x^3-2x-1}{2x} = \frac{27}{4}$$

$$3) \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}\lim_{x\to 2}\frac{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$5) \lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5cos5x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$6) \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} =$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{2}=\frac{1}{2}$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{6}=\frac{1}{6}$$

مثال۲: حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوپیتال محاسبه کنید

$$1)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-5}{3x+1}\qquad 2)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x}{2x-1}$$

$$3)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+4x+5}{2x^3+x^2-1}\qquad 4)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$$

حل: حدهای داده شده به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می باشند .

$$1)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-5}{3x+1}\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x}{2x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{2}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+4x+5}{2x^3-x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+4}{6x^2+2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{12x+2}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}=\frac{1}{+\infty}=0$$

مثال ۳: حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوپیتال محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\qquad 2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

حل : حدهای داده شده به صورت مبهم $\infty-\infty$ می باشند که با ساده کردن به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می شوند و می توان با قاعده هوپیتال آنها را حل کرد .

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{cosx-1}{\sin x+xcosx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{cosx+cosx-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-2x}{2x}=\frac{-1}{2}$$

مثال۴: حدهای زیر را با قاعده هوپیتال محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 0} x\cot x \qquad 2)\ \lim_{x\to \frac{x}{2}} \tan x \tan 2x$$

حل: حدهای داده شده به صورت مبهم $0 \times \infty$ می باشند که با ساده کردن به صورت $\frac{0}{0}$ تبدیل می شوند و می توان با قاعده هوپیتال آنها را حل کرد.

$$1)\ \lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+tan^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2(1+tan^2 2x)}{1+tan^2 x} = \frac{2}{1} = 2$$

مثال۴: حدهای زیر را با قاعده هوپیتال محاسبه کنید.

۱- $\lim_{x\to ۰}\frac{e^{x^۲}-۱}{x^۲}$

حل: چون $\frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۰}\frac{e^{x^۲}-۱}{x^۲}$ پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲xe^{x^۲}}{۲x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{x\to ۰}\frac{۲e^{x^۲}+۴x^۲e^{x^۲}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۲- ۷) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x - \cos x)\tan ۲x$

حل: چون $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x - \cos x)\tan ۲x = ۰\times\infty$ پس:

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x - \cos x}{\cot ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x + \sin x}{-۲(۱+\cot^۲ ۲x)} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین ۱۰-۶

۱-حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوپیتال بدست آورید.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-3}{x^2-x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$$

$$3)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cot x}{2\sin x^2-1} \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin2x-sin5x}{sinx+sin3x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{cos3x-cos2x} \qquad 6)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3}$$

$$7)\ \lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x} \qquad 8)\ \lim_{x\to 1}(x-1)\tan(\frac{\pi}{2}x)$$

$$9)\ \lim_{x\to 0} x\cot 3x \qquad 10)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x}-\tan x$$

۱۰-۷ کاربرد مشتق در بهینه سازی

در مسائلی که پیدا کردن بیشترین یا کمترین مقدار یک متغیر را بخواهیم پیدا کنیم از مشتق استفاده کرده و نقاط اکسترمم مطلق را بدست می آوریم.

مثال۱: می خواهیم یک زمین مستطیل شکل به مساحت $400m^2$ را حصار کشی کنیم ابعاد این زمین را طوری بیابید که هزینه حصار کشی کمترین مقدار شود.

حل: طول و عرض زمین را x,y و محیط آن را p فرض می کنیم پس:

$$xy=400\to y=\frac{400}{x}$$

$$p=x+y\ \ \to p(x)=x+\frac{400}{x}$$

$$x>0\to D_p=(0,+\infty)$$

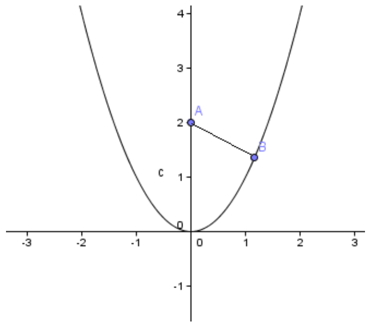
اکنون برای تابع $p(x)$ با دامنه داده شده مینیمم مطلق را بدست می آوریم :

$$p'(x) = 1 + \frac{-400}{x^2}, p'(x) = 0 \to 1 - \frac{400}{x^2} = 0 \to x^2 = 400$$

بنابراین اگر y=20,x=20 انتخاب شود حصار کشی کمترین هزینه را دارد .

مثال۲: چه نقاطی از منحنی $y=x^2$ کمترین فاصله رااز نقطه A(0,2) دارند؟

حل: فرض کنید نقطه B(x,y) کمترین فاصله را از A دارد ، فاصله دو نقطه b,a را با d نمایش می دهیم پس:



$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

چون نقطه x,y روی منحنی $y=x^2$ قرار دارد پس می توان در رابطه به جای x^2 مساوی آن y قرار داد پس:

$$d(y) = \sqrt{y + (y-2)^2} \quad .D = [0, +\infty)$$

$$d'(y) = \frac{1 + 2y - 4}{2\sqrt{y + (y-2)^2}} = 0 \to y = \frac{3}{2}$$

$$y = x^2 \to \frac{3}{2} = x^2 \to x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

بنابراین دو نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ و $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$کمترین فاصله را از نقطه A دارند.

مثال۳ : با ورقی به مساحت ۶۰۰ متر مربع می خواهیم مخزنی استوانه ای شکل با ضخامت معین بسازیم، به طوری که بیشترین گنجایش ممکن را داشته باشد ارتفاع مخزن را بر حسب شعاع آن بیابید.

شکل (۶)

$$S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲$$

$$V = \pi r^۲ h$$

$$۲\pi rh + ۲\pi r^۲ = ۲۰۰$$

$$\Rightarrow h = \frac{۶۰۰ - ۲\pi r^۲}{۲\pi r} = \frac{۳۰۰ - \pi r^۲}{\pi r}$$

$$\Rightarrow v = \pi r^۲ h = \pi r^۲ (\frac{۳۰۰ - \pi r^۲}{\pi r}) = ۳۰۰r - \pi r^۳$$

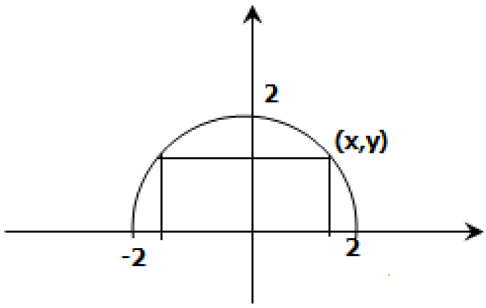
$$\Rightarrow V' = ۳۰۰ - ۳\pi r^۲ = ۰ \Rightarrow \pi r^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow r = \frac{۱۰}{\sqrt{\pi}}$$

$$h = \frac{۶۰۰ - ۲۰۰}{۲\pi \times \frac{۱۰}{\sqrt{\pi}}} = \frac{۴۰۰}{۲۰\sqrt{\pi}} = \frac{۲۰}{\sqrt{\pi}}$$

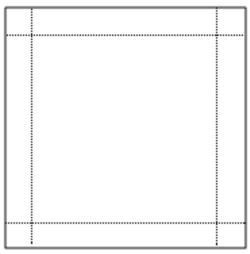
تمرین ۱۰-۷

۱- مجموع دو عدد حقیقی مثبت برابر۱۰ می باشد دو عدد را چنان بیابید که حاصلضرب آن بیشترین مقدار ممکن باشد .

۲- یک ضلع مستطیلی روی محور x ها و دو راس آن روی نیم دایره به معادله $y = \sqrt{4 - x^2}$ قرار دارد ابعاد این مستطیل را چنان انتخاب کنید که مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد.



۳- می خواهیم از یک مقوای مربع شکل به ضلع 12cm یک جعبه در باز بسازیم. چهار مربع از چهار گوشه این مربع بریده اطراف آن را تا می کنیم تا جعبه ساخته شود ضلع مربع های اطراف را چندcm انتخاب کنیم تا حجم جعبه بیشترین مقدار شود.



فصل یازدهم

دیفرانسیل و انتگرال

۱-۱۱مقدار تقریبی ودیفرانسیل

اگر تابع y=f(x) در همسایگی x مشتق پذیر باشد در فصل قبل نشان دادیم :

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

حال اگر Δx مقدار کوچکی باشد می توان تقریب زیر را در نظر گرفت :

$$f'(x) \sim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f(x+\Delta x) - f(x) \sim f'(x)\Delta x$$

بنابراین مقدار تقریبی $f(x+\Delta x)$ را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$f(x+\Delta x) \sim f(x) + f'(x)\Delta x$$

مثال۱: مقدار تقریبی $\sqrt{17}$ را بیابید.

حل: در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ با قرار دادن۱ = Δx

$x = 1$, در فرمول تقریب داریم :

$$f(x+\Delta x) \sim f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{17} = \mathrm{f}(16+1) \sim \mathrm{f}(16) + \mathrm{f}'(16)(1) = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} = 4 + \frac{1}{8} = 4/125$$

مثال۲: مقدار تقریبی $\sqrt{24}$ را بیابید.

حل: در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ با قرار دادن1- = Δx

$x = 25$, در فرمول تقریب داریم :

$$f(x+\Delta x) \sim f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{24}=\mathrm{f}(24-1) \sim \mathrm{f}(25)+\mathrm{f}'(25)(-1)=\sqrt{25}-\frac{1}{2\sqrt{25}}=5-\frac{1}{10}=4/9$$

مثال۳: مقدار تقریبی $\sin 29^\circ$ را محاسبه کنید.

حل:

$f(x)=\sin x \ \rightarrow f'(x)=\cos x$

$x=30^\circ=\frac{\pi}{6} \qquad \Delta x=-1^\circ=-\frac{\pi}{180}$ رادیان

$f(x+\Delta x) \sim f(x)+f'(x)\Delta x$

$\sin 29=\sin(30-1) \sim \sin 30+cos30(-1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)=0/485$

مثال۴ : به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[5]{۰/۹}-(۰/۹)^۵$ را به دست آورید.

حل: داریم :

$\mathrm{f(x)}=\sqrt[5]{\mathrm{x}}-\mathrm{x}^۵ \Rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x})=\frac{۱}{۵\sqrt[5]{\mathrm{x}^۴}}-۵\mathrm{x}^۴$

$\mathrm{x}=۱$

$\Delta\mathrm{x}=۰/۹-۱=-۰/۱$

$\sqrt[5]{۰/۹}-(۰/۹)^۵ \simeq (\sqrt[5]{۱}-(۱)^۵)+(\frac{۱}{۵\sqrt[5]{(۱)^۴}}-۵(۱)^۴)\times(-۰/۱)$

$\Rightarrow \sqrt[5]{۰/۹}-(۰/۹)^۵ \simeq (\frac{۱}{۵}-۵)(-\frac{۱}{۱۰})=\frac{۲۴}{۵۰}=۰/۴۸$

دیفرانسیل

باتوجه به رابطه $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ می توان رابطه $\mathrm{dy}=\mathrm{f}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ را نتیجه گرفت این عبارت را دیفرانسیل تابع f می نامیم که $\Delta x=dx$, dy تقریبا Δy می باشد .

مثال۳: دیفرانسیل توابع زیر را محاسبه کنید.

$1) y=x^3+2x \qquad 2) y=\sqrt{x}$

$3) y = \sin 2x$ $4) y = \dfrac{x}{x+1}$

حل:

$1) y = x^3 + 2x \to dy = (3x^2 + 2)dx$

$2\ ) y = \sqrt{x} \to dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$3) y = \sin 2x \to dy = 2\cos 2x\ dx$

$4) y = \dfrac{x}{x+1} \to dy = \dfrac{-1}{(x+1)^2} dx$

چند جمله‌ایهای تیلور

در خطی سازی تابعی مانند $f(x)$ در نقطه $x=a$ دیدیم که تابع خطی $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ رفتار $f(x)$ را در همسایگی نقطه $x = a$ توصیف کرد. برای یافتن تقریب‌های بهتری برای $f(x)$ می‌توان از مشتقات متوالی تابع استفاده کرد و چند جمله‌ای به صورت:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

که در آن $P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

به نام چند جمله‌ای درجه n ام تیلور برای تابع $f(x)$ حول نقطه $x = a$ را بیان کرد.

نتیجه:

به حالت خاص چندجمله‌ای تیلور وقتی که $x = 0$ باشد چند جمله‌ای مک لورن گوییم

یعنی :

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

مثال۴ : *برای تابع* $\boldsymbol{f(x) = sinx}$ *چند جمله ای مک لورن درجه پنجم را بیابید.*

حل:

$$f'(x) = \cos x \to f''(x) = -\sin x \to f'''(x) = -\mathrm{Cos}x$$

$$\to f^{(4)}(x) = \sin x \to f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x^1 - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5$$

$$\Rightarrow P_n(x) = x^1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \Rightarrow \sin x \simeq x^1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

مثال۴ : برای تابع $f(x) = \ln x$ حول $x = c$ چند جمله ای تیلور درجه سوم م را بیابید.

$$f'(x)=\frac{۱}{x}\to f''(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}$$

$$P_{۳}(x)=f(e)+\frac{f'(e)}{۱!}(x-e)+\frac{f''(e)}{۲!}(x-e)^{۲}+\frac{f'''(e)}{۳!}(x-e)^{۳}$$

$$\Rightarrow P_n(x)=۱+\frac{۱}{e}(x-e)-\frac{۱}{۲e^{۲}}(x-e)^{۲}+\frac{۱}{۳e^{۳}}(x-e)^{۳}$$

تمرین۱۱-۱

۱-با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی توابع زیر را به ازای x و Δx داده شده محاسبه کنید.

$1) f(x) = x^3 - x \qquad x = 2 \quad , \Delta x = 0/1$

$2) f(x) = \sqrt{x+1} \qquad x = 3 \quad , \Delta x = -0/1$

$3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \qquad x = 1 \quad , \Delta x = 0/01$

$4) f(x) = \cos x \qquad x = \frac{\pi}{3} \quad , \Delta x = \frac{\pi}{180}$

۲-با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی هر عبارت را بیابید.

$1)\sqrt{24} \qquad 2)\sqrt[3]{29}$

$3)\cos 31 \qquad 4)(1/1)^{10}$

۳-دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

$1) y = (x^2+1)^5 \qquad 2) y = \frac{x^2 - x}{x+3}$

$3) y = x\sqrt{x-1} \qquad 4) y = sin^2\sqrt{x}$

$5) y = sinx + \cos x \qquad 6) y = \sqrt{\tan x}$

$7) y = \sqrt[3]{x^2 + 3x} \qquad 8) y = x^2 \sin x$

$9) y = \cot x^2 \qquad 10) y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

۱۱-۲ انتگرال نامعین

عکس عمل مشتق را انتگرال می نامیم یعنی اگر f(x) یک تابع باشد هر تابعی مانند f(x) که در شرط f'(x)=f(x) صدق کند یک انتگرال نامعین یا تابع اولیه f(x) می گوئیم و با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می دهیم.

مثال ۱: حاصل $\int 2xdx$ را بیابید.

حل: اگر c عدد دلخواهی باشد مشتق تابع $f(x)=x^2+c$ برابر 2x می باشد پس:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

قواعد انتگرال گیری نامعین

1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x} dx = Ln|x| + c$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (a\epsilon R)$

4) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

مثال۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x^3 dx$ 2) $\int \sqrt{x}\ dx$

3) $\int \frac{2}{x^2}\ dx$ 4) $\int (t^2 - t)dt$

5) $\int \left(\sqrt[3]{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) dx$ 6) $\int \frac{1 - x^2}{x^5} dx$

حل:

1) $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

2) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

3) $\int \frac{2}{x^2} dx = 2\int x^{-2} dx = \frac{2}{-1} x^{-1} + x = -\frac{2}{x} + c$

4) $\int (t^2 - t)dt = \int t^2 dt - \int t dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + c$

5) $\int \left(\sqrt[3]{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du = \int \left(u^{\frac{1}{3}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{1}{\frac{4}{3}} u^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} - 2\sqrt{u} + c$

6) $\int \frac{1 - x^2}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{x^2}{x^5}\right) dx = \int (x^{-5} - x^{-3}) dx$

$$= \frac{1}{-4}x^{-4} - \frac{1}{-2}x^{-2} + c = \frac{-1}{4x^4} + \frac{1}{2x^2} + c$$

روش تغییر متغیر

در بعضی از موارد برای محاسبه انتگرال از قواعد بیان شده نمی توان استفاده کرد یکی از روشهای محاسبه انتگرال استفاده از تغییر متغیر می باشد .

مثال۳: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\int 2x(x^2-5)^{10}dx \qquad 2)\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$3)\int x\sqrt{x+5}dx \qquad 4)\int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$$

حل:

$$1) u = x^2 - 5 \rightarrow du = 2x\,dx$$

$$\int 2x(x^2-5)^{10}dx = \int u^{10}du = \frac{1}{11}u^{11} + c = \frac{1}{11}(x^2-5)^{11} + c$$

$$2) \quad u = 2x^2 + 1 \rightarrow du = 4xdx \rightarrow \frac{1}{4}du = xdx$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{4}du}{\sqrt{u}} = \int \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}\sqrt{u} + c = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} + c$$

$$3) u = x + 5 \rightarrow du = dx, x = u - 5$$

$$\int x\sqrt{x+5}dx = \int (u-5)\sqrt{u} = \int (u-5)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{\frac{5}{2}}u^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{u^5} - \frac{10}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{2}{5}\sqrt{(x+5)^5} - \frac{10}{3}\sqrt{(x+5)^3} + c$$

$$4) U = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow du = \frac{-1}{x^2}dx \rightarrow -du = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int \sqrt{u}(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{(1+\frac{1}{x})^2 + c}$$

فرمولهای دیگر انتگرالگیری

$$\int \sin axd\,x = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

$$\int \cos axd\,x = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$\int (1+tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$$

$$\int (1+cot^2 ax)dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

مثال۴: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

1) $\int (\sin 5x + \cos 2x)dx$ 2) $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$

3) $\int 3x^2\ \sin x^3\ \cos^4 x^3\ \ dx$ 4) $\int \frac{1+tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 6) $\int e^{2x}dx$

حل:

$$1)\int(\sin 5x+cos2x\,)dx=-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$2)u=x^2+1\rightarrow du=2x\,dx$$

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx=\int\sin u\,du=-\cos u+c=-\cos(x^2+1)+c$$

$$3)\;u=cosx^3\rightarrow du=-3x^2\sin x^3$$

$$\int 3x^2\sin x^3\,cos^4x^3\,dx=\int -u^4\,du=-\frac{1}{5}u^5+c=-\frac{1}{5}cos^5+c=-\frac{1}{5}cos^5x^3+c$$

$$4)\quad u=\sqrt{x}\rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\rightarrow 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int\frac{1+tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int 2(1+tan^2u)du=2\tan u+C=2tan\sqrt{x}+c$$

$$5)\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx\quad=\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$$

$$6)\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

انتگرالگیری به روش جزء به جزء

با **انتگرالگیری** ازدو طرف رابطه $\boldsymbol{d(uv)=udv-vdu}$ میتوان رابطه زیررابدست آورد:

$$\int\boldsymbol{d(uv)}=\int\boldsymbol{udv}-\int\boldsymbol{vdu}\;\rightarrow\;\int\boldsymbol{udv}=\boldsymbol{uv}-\int\boldsymbol{vdu}$$

مثال5: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

$1)\int xe^x dx$ $\qquad$ $2)\int x\sin x\,dx$

حل:

$1)\ u = x \qquad dv = e^x dx \to v = e^x$

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu} \ \to \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$2)\ u = x \qquad dv = \ \sin x\, dx \ \ \to v = -\cos x$

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu} \ \to \ \int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx$$

اروش تجزیه کسرها

۱) اگر صورت کسر عددی حقیقی و مخرج آن $g(x) = (ax+b)^n$ باشد در این صورت انتگرال‌های ساده به صورت زیر می‌باشند.

$$\int \frac{Adx}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int \frac{Adx}{(ax+b)^n} = \frac{A}{a(۱-n)}(ax+b)^{۱-n} + c \qquad n > ۱$$

۲) اگر صورت کسر عبارت درجه اول یعنی $f(x) = px+q$ و مخرج آن عبارت درجه دوم یعنی $g(x) = ax^۲ + bx + c$ که $g(x)$ فاقد ریشه حقیقی باشد در این صورت مشتق عبارت مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم و با تبدیل انتگرال به دو انتگرال ساده و استفاده از تغییر متغیر آن را محاسبه می‌کنیم.

مثال6: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

-1 $\int \frac{۴}{(۳x+۲)}dx$

حل:

$$\int \frac{۴}{(۳x+۲)}dx = \frac{۴}{۳}\ln|۳x+۲| + c$$

-۲ $\int \frac{dx}{(۲x-۳)^۵}$

حل:

$$\int \frac{dx}{(۲x-۳)^۵} = \frac{۱}{۲}\frac{(۲x-۳)^{-۴}}{-۴} + c = -\frac{۱}{۸}(۲x-۳)^{-۴} + c$$

-۳ $\int \frac{x}{x^۲+۲x+۲}dx$

حل:

$$\int\frac{x}{x^{۲}+۲x+۲}dx=\int\frac{\frac{۱}{۲}(۲x+۲)-۱}{x^{۲}+۲x+۲}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲x+۲}{x^{۲}+۲x+۲}dx-\int\frac{dx}{x^{۲}+۲x+۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۲x+۲)-\int\frac{dx}{(x+۱)^{۲}+۱}\Rightarrow\begin{cases}x+۱=\tan t\\ dx=(۱+\tan^{۲}t)dt\end{cases}$$

$$=\begin{cases}t=\operatorname{Arc}\tan(x+۱)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۲x-۲)-\int\frac{(۱+\tan^{۲}t)dt}{۱+\tan^{۲}t}=\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۲x+۲)-\int dt$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۲x+۲)-t+c=\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۲x+۲)-\operatorname{Arc}\tan(x+۱)+c$$

۳) اگر صورت کسر عددی حقیقی و مخرج آن عبارت درجه دوم یعنی $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ که $g(x)$ فاقد ریشه حقیقی باشد در این صورت با تبدیل مخرج به مربع کامل با استفاده از تغییر متغیر مناسب آن را بـه روابـط توابع معکوس مثلثاتی تبدیل می‌کنیم یعنی به فرم $\int\frac{dx}{u^{۲}+a^{۲}}$ تبدیل می‌شود.

مثال۷: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

۱- $\int\frac{dx}{x^{۲}+۶x+۱۴}$

حل:

$$\int\frac{dx}{x^{۲}+۶x+۱۴}=\int\frac{dx}{x^{۲}+۶x+۹-۹+۱۴}=\int\frac{dx}{(x+۳)^{۲}+۵}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x+۳}{\sqrt{۵}}\right)+c$$

۲- $\int\frac{dx}{x^{۲}-۳x+۵}$

حل:

$$\int\frac{dx}{x^{۲}-۳x+۵}=\int\frac{dx}{x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}+۵}=\int\frac{dx}{(x-\frac{۳}{۲})^{۲}+\frac{۱۱}{۴}}$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x-\frac{۳}{۲}}{\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}}\right)+c=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{۲x-۳}{\sqrt{۱۱}}\right)+c$$

۴) اگر در تابع گویا $\frac{f(x)}{g(x)}$ توابع $g(x), f(x)$ چند جمله‌ای باشند آن‌گاه داریم:

الف) اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کوچکتر باشد و مخرج کسر دارای ریشه باشد آن‌گاه با تجزیه مخرج کسر حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر مخرج دارای عامل $(ax+b)^m$ باشد در این صورت کسر به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

که در آن $A_m, \dots, A_2, A_1$ مقادیر ثابت می‌باشند.

۲) اگر در مخرج عامل $(ax^2+bx+c)^m$ موجود باشد در این صورت کسر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m} \qquad ; m \in N$$

که در آن A_i و B_i اعداد حقیقی می‌باشند و عبارت‌های مخرج فاقد ریشه می‌باشند.

۳) ممکن است مخرج کسر دارای هر دو عامل بیان شده در قسمت‌های (۲) و (۱) باشد در این صورت هم مانند آنچه گفته شد عمل می‌کنیم.

۴) اگر مخرج کسر دارای عامل‌های به صورت $(ax+b)(cx+d)$ باشد یعنی مخرج دارای دو ریشه متمایز باشد آن‌گاه کسر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}$$

که A_1 و A_2 مقادیر ثابت می‌باشند.

ب) اگر درجه صورت کسر مساوی یا بزرگتر از درجه مخرج کسر باشد می‌توان صورت را بر مخرج تقسیم کرد و سپس آن را به انتگرال‌های به فرم‌های دیگر تبدیل نمود.

مثال6: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

۱- $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$

حل: با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

$$\int \frac{x^۲+۵x+۷}{x+۳}dx = \int (x+۲+\frac{۱}{x+۳})dx = \frac{x^۲}{۲}+۲x+\ln|x+۳|+c$$

۲- $\int \frac{۱-۳x}{۳+۲x}dx$

حل:

$$\frac{۱}{۲}\int \frac{۲-۶x}{۳+۲x}dx = \int (-۳+\frac{۱۱}{۲x+۳})dx = -\frac{۳}{۲}x+\frac{۱۱}{۴}\ln|۲x+۳|+c$$

۳- $\int \frac{x^۴+x^۲+۱}{x-۱}dx$

حل:

$$\int \frac{x^۴+x^۲+۱}{x-۱}dx = \int (x^۳+x^۲+۲x+۲+\frac{۳}{x-۱})dx$$

$$=\frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۱}{۳}x^۳+x^۲+۲x+۳\ln|x-۱|+c$$

۴- $\int \frac{x^۲+x-۱}{x-۱}dx$

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^۲+x-۱ & x-۱ \\ \cline{2-2} -x^۲+x & x+۲ \\ \cline{1-1} ۲x-۱ & \\ -۲x+۲ & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^۲+x-۱}{x-۱}dx = \int (x+۲+\frac{۱}{x-۱})dx = x^۲+۲x+\ln|x-۱|+c$$

۵- $\int \frac{x^۲+۲}{(x+۱)^۳(x-۲)}dx$

حل:

$$\frac{x^{۲}+۲}{(x+۱)^{۳}(x-۲)}=\frac{A}{(x+۱)^{۳}}+\frac{B}{(x+۱)^{۲}}+\frac{C}{(x+۱)}+\frac{D}{x-۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲=A(x-۲)+B(x+۱)(x-۲)+C(x+۱)^{۲}(x-۲)+D(x+۱)^{۳}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲=(C+D)x^{۳}+(B+۳D)x^{۲}+(A-B-۳C+۳D)x+(-۲A-۲B-۲C+D)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C+D=۰\\B+۳D=۱\\A-B-۳C+۳D=۰\\-۲A-۲B-۲C+D=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-۱\\B=\frac{۱}{۳}\\C=-\frac{۲}{۹}\\D=\frac{۲}{۹}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^{۲}+۲}{(x+۱)^{۳}(x-۲)}dx=-\int\frac{dx}{(x+۱)^{۳}}+\frac{۱}{۳}\int\frac{dx}{(x+۱)^{۲}}-\frac{۲}{۹}\int\frac{dx}{x+۱}+\frac{۲}{۹}\int\frac{dx}{x-۲}$$

$$=\frac{۱}{۲(x+۱)^{۲}}-\frac{۱}{۳(x+۱)}-\frac{۲}{۹}\operatorname{Ln}|x+۱|+\frac{۲}{۹}\ln|x-۲|+C$$

۶- $\int\frac{dx}{x^{۲}-۱}$

حل:

$$\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}=\frac{(A+B)x+A-B}{(x-۱)(x+۱)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=۰\\A-B=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{۱}{۲}\\B=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}\left(\int\frac{dx}{x-۱}-\int\frac{dx}{x+۱}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\ln|x-۱|-\ln|x+۱|)+c=\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|+c$$

۷- $\int\sec x\,dx$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^۲ x}=\int\frac{\cos x}{۱-\sin^۲ x}dx$$

با تغییر متغیر داریم:

$$\begin{cases}u=\sin x\\ du=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{۱-u^۲}$$

طبق مثال قبل داریم:

$$\Rightarrow\int\frac{du}{۱-u^۲}=-\frac{۱}{۲}\left(\int\frac{du}{u-۱}-\int\frac{du}{u+۱}\right)$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\ln|u-۱|-\ln|u+۱|)=-\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{u-۱}{u+۱}\right|+c$$

$$=-\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{\sin x-۱}{\sin x+۱}\right|+c=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

۸- $\int\frac{۵x-۳}{(x+۱)(x-۳)}dx$

حل:

$$\frac{۵x-۳}{(x+۱)(x-۳)}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x-۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۵x-۳}{(x+۱)(x-۳)}=\frac{(A+B)x+B-۳A}{(x+۱)(x-۳)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=۵\\ B-۳A=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=۲\\ B=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{۵x-۳}{(x+۱)(x-۳)}dx=\int\frac{۲}{x+۱}dx+\int\frac{۳}{x-۳}dx=۲\ln|x+۱|+۳\ln|x-۳|+c$$

۹- $\int\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}dx$

حل:

$$\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}=\frac{Ax+B}{x^۲+۱}+\frac{c}{x-۱}+\frac{D}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow -۲x+۴=(Ax+B)(x-۱)^۲+c(x-۱)(x^۲+۱)+D(x^۲+۱)$$

$$\Rightarrow -۲x+۴=(A+C)x^۳+(-۲A+B-C+D)x^۲+(A-۲B+C)x+(B-C+D)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=۰\\ -۲A+B-C+D=۰\\ A-۲B+C=-۲\\ B-C+D=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=۲\\ C=-۲\\ B=۱\\ D=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}dx=\int\left(\frac{۲x+۱}{x^۲+۱}-\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{۲x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x^۲+۱}-\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}\right)dx$$

$$=\ln(x^۲+۱)+\operatorname{Arctan}x-۲\ln|x-۱|-\frac{۱}{x-۱}+c$$

۱۰- $\int \frac{x+۴}{x^۳+۳x^۲-۱۰x}dx$

حل:

$$\frac{x+۴}{x^۳+۳x^۲-۱۰x}=\frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}$$

حال با جایگزینی ریشه‌های مخرج و حذف آن عامل در کسر مقادیر ثابت تجزیه کسر حاصل می‌شوند.

$$\left.\begin{array}{l} x=۰\Rightarrow A_۱=\frac{۰+۴}{(۰-۲)(۰+۵)}=-\frac{۲}{۵} \\ x=۲\Rightarrow A_۲=\frac{۲+۴}{۲(۲+۵)}=\frac{۳}{۷} \\ x=-۵\Rightarrow A_۳=\frac{-۵+۴}{(-۵)(-۵-۲)}=-\frac{۱}{۳۵} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}=-\frac{۲}{۵x}+\frac{۳}{۷(x-۲)}-\frac{۱}{۳۵(x+۵)}$$

$$\Rightarrow \int\frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}dx=-\frac{۲}{۵}\ln|x|+\frac{۳}{۷}\ln|x-۲|-\frac{۱}{۳۵}\ln|x+۵|+c$$

۱۱- $\int \frac{x-۱}{(x+۱)^۳}dx$

حل:

$$\frac{x-۱}{(x+۱)^۳}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{(x+۱)^۲}+\frac{C}{(x+۱)^۳}\Rightarrow x-۱=A(x+۱)^۲+B(x+۱)+C$$

اگر $x=-۱$ را در رابطه قرار دهیم: $-۲=C$

حال با مشتق گیری از طرفین رابطه داریم: $۱=۲A(x+۱)+B \qquad x=-۱\Rightarrow B=۱$

با مشتق‌گیری مجدد داریم:

$$۰=۲A\Rightarrow A=۰$$

$$\Rightarrow \frac{x-۱}{(x+۱)^۳}=\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{۲}{(x+۱)^۳}$$

$$\Rightarrow \int\frac{x-۱}{(x+۱)^۳}dx=\int\frac{dx}{(x+۱)^۲}-۲\int\frac{dx}{(x+۱)^۳}=\frac{-۱}{x+۱}+\frac{۴}{(x+۱)^۲}+c$$

۱۲- $\int \frac{x^۲+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}dx$

حل:

$$\frac{x^۲+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x-۲}+\frac{C}{x-۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=۱\Rightarrow A=\frac{۱+۱}{(۱-۲)(۱-۳)}=\frac{۲}{۲}=۱ \\ x=۲\Rightarrow B=\frac{۴+۱}{(۲-۱)(۲-۳)}=-۵ \\ x=۳\Rightarrow C=\frac{۹+۱}{(۳-۱)(۳-۲)}=۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int\frac{x^۲+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}dx=\int\frac{۱}{x-۱}dx-۵\int\frac{۱}{x-۲}dx+۵\int\frac{dx}{x-۳}$$
$$=\ln|x-۱|-۵\ln|x-۲|+۵\ln|x-۳|+c$$

۱۳- $\int\frac{۱}{x^۲+۲x+۳}dx$

حل:

$$x^۲+۲x+۳=(x+۱)^۲+۲=(x+۱)^۲+(\sqrt{۲})^۲$$

با فرض $x+۱=\sqrt{۲}t$ داریم: $dx=\sqrt{۲}dt$ بنابراین

$$\int\frac{۱}{x^۲+۲x+۳}dx=\int\frac{۱}{(x+۱)^۲+(\sqrt{۲})^۲}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{t^۲+۱}\sqrt{۲}dt$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\operatorname{Arctan} t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\operatorname{Arctan}\frac{x+۱}{\sqrt{۲}}+c$$

محاسبه انتگرال‌های به صورت $\int\cos^m x dx, \int\sin^m x dx$

برای محاسبه انتگرال توان‌های نسبت‌های مثلثاتی آنها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

۱) اگر توان نسبت مثلثاتی زوج باشد آن‌گاه از روابط زیر می‌توان استفاده کرد.

$$\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲} \quad , \quad \cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

۲) اگر توان نسبت مثلثاتی فرد باشد با کم کردن یک واحد از توان آن و تبدیل به توان زوج سپس از روابط مثلثاتی، جایگزین مناسب را قرار داده و انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال۱۲: انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int \sin^{۲} x dx$

حل:

$$\int \sin^{۲} x dx = \int \frac{۱-\cos ۲x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}\int (۱-\cos ۲x) dx = \frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)+c$$

۲) $\int \sin^{۳} x dx$

حل:

$$\int \sin^{۳} x dx = \int (\sin x)(\sin^{۲} x) dx = \int \sin x(۱-\cos^{۲} x) dx$$

$$= \int (\sin x - \sin x \cos^{۲} x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^{۲} x dx$$

$$= -\cos x - \int \sin x \cos^{۲} x dx \quad (۱)$$

$$\int \sin x \cos^{۲} x dx = -\int u^{۲} du = -\frac{u^{۳}}{۳} = -\frac{\cos^{۳} x}{۳} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \int \sin^{۳} x dx = -\cos x + \frac{\cos^{۳} x}{۳} + c$$

۳) $\int \cos^{۴} x dx$

حل:

$$\cos^{۲} x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲} \Rightarrow \cos^{۴} x = \frac{۱}{۴}(۱+\cos ۲x)^{۲}$$

$$\Rightarrow \int \cos^{۴} x dx = \int \frac{۱}{۴}(۱+\cos ۲x)^{۲} dx = \frac{۱}{۴}\int (۱+۲\cos ۲x+\cos^{۲} ۲x) dx$$

با توجه به $\cos^{۲} ۲x = \frac{۱+\cos ۴x}{۲}$ داریم:

$$= \frac{۱}{۴}\int (۱+۲\cos ۲x+\frac{۱+\cos ۴x}{۲}) dx = \frac{۱}{۴}(x+\sin ۲x+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۸}\sin ۴x)+c$$

$$\Rightarrow \int \cos^{۴} x dx = \frac{۱}{۴}(\frac{۳}{۲}x+\sin ۲x+\frac{۱}{۸}\sin ۴x)+c$$

۴) $\int \sin^{۵} x \cos^{۲} x dx$

حل:

$$\sin^{۴} x = (\sin^{۲} x)^{۲} = (۱-\cos^{۲} x)^{۲}$$

$$\Rightarrow \int \sin^{۵} x \cos^{۲} x dx = \int \sin^{۴} x \sin x \cos^{۲} x dx$$

$$= \int (۱-\cos^{۲} x)^{۲} \cos^{۲} x \sin x dx$$

اکنون با تغییر متغیر $u = \cos x$ داریم: $du = -\sin x dx$

$$\Rightarrow \int \sin^{۵} x \cos^{۲} x dx = -\int (۱-u^{۲})u^{۲} du = -\int (۱-۲u^{۲}+u^{۴})u^{۲} du$$

$$= -\int (u^{۲}-۲u^{۴}+u^{۶}) du = -(\frac{u^{۳}}{۳} - ۲\frac{u^{۵}}{۵} + \frac{u^{۷}}{۷}) + c$$

$$= -(\frac{\cos^{۳} x}{۳} - \frac{۲}{۵}\cos^{۵} x + \frac{۱}{۷}\cos^{۷} x) + c$$

مثال۱۳: انتگرال‌های زیر را بیابید.

۱) $\int \tan^{۴} x dx$

حل:

$$\int \tan^{۴} x dx = \int (\tan^{۴} x + \tan^{۲} x - \tan^{۲} x + ۱ - ۱) dx$$

$$= \int (\tan^{۴} x + \tan^{۲} x) dx + \int (-\tan^{۲} x + ۱ - ۱) dx$$

$$= \int \tan^{۲} x (\tan^{۲} x + ۱) - \int (\tan^{۲} x + ۱) dx + \int dx$$

$$= \frac{۱}{۳} \tan^{۳} x - \tan x + x + c$$

مسائل نمونه

۱–انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{x^{۲}-۳x+۱}{\sqrt[۳]{x}}dx$

حل: با توجه به $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ و ضرب توان‌ها داریم:

$$\int \frac{x^{۲}-۳x+۱}{\sqrt[۳]{x}}dx=\int (x^{۲}-۳x+۱)x^{-\frac{۱}{۳}}dx=\int (x^{\frac{۵}{۳}}-۳x^{\frac{۲}{۳}}+x^{-\frac{۱}{۳}})dx$$

$$=\frac{۳}{۸}x^{\frac{۸}{۳}}-\frac{۹}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}+\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+c$$

۲) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt[۵]{x^{۳}}}dx$

حل:

$$\int \frac{x^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۲}{۳}}}{x^{\frac{۳}{۵}}}dx=\int (x^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۲}{۳}})x^{-\frac{۳}{۵}}dx=\int (x^{-\frac{۱}{۱۰}}+x^{\frac{۱}{۱۵}})dx$$

$$=\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{۹}{۱۰}}+\frac{۱۵}{۱۶}x^{\frac{۱۶}{۱۵}}+c$$

۳) $\int \sqrt[۳]{x}(۲-x)^{۲}dx$

حل:

$$\int x^{\frac{۱}{۳}}(۴-۲x+x^{۲})dx=\int (۴x^{\frac{۱}{۳}}-۲x^{\frac{۴}{۳}}+x^{\frac{۷}{۳}})dx=۳x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۶}{۷}x^{\frac{۷}{۳}}+\frac{۳}{۱۰}x^{\frac{۱۰}{۳}}+c$$

۴) $\int \frac{x^{۳}+۲x^{۲}+x+۵}{x^{۲}+۱}dx$

حل: با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

$$\int (x+۲+\frac{۳}{۱+x^{۲}})dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲x+۳\text{Atctan}\,x+c$$

۵) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

حل: با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

$$\int (1-\frac{1}{x^2+1})dx = x - \operatorname{Arctan} x + c$$

۶) $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

حل:

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int (\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$= \int (x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{Arctan} x + c$$

۷) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$

حل: با فرض $u = \ln x$ آن‌گاه $du = \frac{1}{x}dx$ پس:

$$\int e^{\ln x} \times \frac{1}{x}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\ln x} + c$$

۸) $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

حل:

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx + \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \sin x \cos^{-2} x dx + \int \cos x \sin^{-2} x dx$$

با استفاده از $\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ داریم:

$$= \cos^{-1} x - \sin^{-1} x + c = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + c = \sec x - \csc x + c$$

۹) $\int \frac{e^{\operatorname{Arctan} x}}{1+x^2}dx$

حل: با فرض $u = \operatorname{Arctan} x$ آن‌گاه $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ پس:

$$\int e^{\operatorname{Arctan} x} \times \frac{1}{1+x^2}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\operatorname{Arctan} x} + c$$

۱۰) $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx$

حل: با فرض $u = \sin x$ آن‌گاه $du = \cos x dx$ پس:

$$\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt[3]{u}du = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}(\sin x)^{\frac{4}{3}} + c$$

۱۱) $\int \frac{dz}{\sqrt{\pi + 2z}}$

حل: با فرض $u = \pi + 2z$ آن‌گاه $du = 2dz$ پس:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\pi+2z}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\times 2 \times u^{\frac{1}{2}} + c = u^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{\pi+2z} + c$$

۱۲) $\int \left(\frac{2+\sqrt{t}}{t}\right)^{\frac{1}{2}}dt$

حل: با فرض $t = u^2$ آن‌گاه $dt = 2udu$ پس:

$$\int \left(\frac{2+\sqrt{u^2}}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}} 2udu = 2\int \left(\frac{2+u}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}udu = 2\int \left(\frac{2+u}{u^2}\times u^2\right)^{\frac{1}{2}}du$$

$$= 2\int (2+u)^{\frac{1}{2}}du = 2\times\frac{2}{3}(2+u)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(2+\sqrt{t})^{\frac{3}{2}} + c$$

۱۳) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$

حل: با فرض $u = 1 + 2\cos x$ آن‌گاه $du = -2\sin x dx$ پس:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\times 2\times u^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c$$

۱۴) $\int(1-\cot g^4 x)dx$

حل: از اتحاد مزدوج داریم:

$$\int(1-\cot g^2 x)(1+\cot g^2 x)dx$$

با فرض $u=\cot gx$ آن‌گاه $du=-(1+\cot g^2 x)dx$

$$=-\int(1-u^2)du=\frac{u^3}{3}-u+c=\frac{1}{3}\cot g^3 x-\cot gx+c$$

۱۵) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$

حل: با فرض $u=\ln x$ آن‌گاه $du=\frac{1}{x}dx$ پس:

$$\int\frac{1}{\ln^2 x}\times\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{u^2}du=\int u^{-2}du=-u^{-1}+c=\frac{-1}{\ln x}+c$$

۱۶) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

حل: با فرض $u=1+e^x$ آن‌گاه $du=e^x dx$ پس:

$$\int\sqrt{1+e^x}\,e^x dx=\int\sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}}+c$$

۱۷) $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

حل:

$$\int(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\ln x}{x})dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\ln x\times\frac{1}{x}dx=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln^2 x+c=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x+c$$

۱۸) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

حل:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

در انتگرال دوم با فرض $u = 1 - x^2$ آن‌گاه $du = -2xdx$ پس:

$$= \text{Arcsin}\, x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \text{Arcsin}\, x + \frac{1}{2} \times 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \text{Arcsin}\, x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

۱۹) $\int \frac{(3x-4)^5}{(x-1)^7} dx$

حل: ابتدا یک عبارت کسری با کمترین توان می‌سازیم:

$$\int \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^5 \times \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

با فرض $u = \frac{3x-4}{x-1}$ آن‌گاه $du = \frac{1}{(x-1)^2} dx$ پس:

$$\int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{6}\left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^6 + c$$

۲۰) $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$

حل: چون $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ پس صورت و مخرج کسر را در عبارت $(1 - \cos x)$ ضرب می‌کنیم پس:

$$\int \frac{\sin^3 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^3 x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos x) dx = \int (\sin x - \sin x \cos x) dx = -\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

۲۱) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

حل: با فرض $u = \ln x$ آن‌گاه $du = \frac{1}{x} dx$ پس:

$$\int \sin u\, du = -\cos u + c = -\cos(\ln x) + c$$

۲۲) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

حل: با فرض $u = \ln x$ آن‌گاه $du = \frac{1}{x} dx$ پس:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(\ln x) + c$$

۲۳) $\int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$

حل: با فرض $u=۱+\sqrt{x}$ آن‌گاه $du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$ و هم چنین داریم $\sqrt{x}=u-۱$ پس

بنابراین: $du=\frac{۱}{۲(u-۱)}dx$

$$\int \frac{۲(u-۱)du}{u}=۲\int(۱-\frac{۱}{u})du=۲u-۲\ln u+c=۲(۱+\sqrt{x})-۲\ln(۱+\sqrt{x})+c$$

۲۴) $\int \frac{dx}{۱+e^x}$

حل: با ساختن مخرج کسر در صورت آن داریم:

$$\int \frac{۱+e^x-e^x}{۱+e^x}dx=\int(\frac{۱+e^x}{۱+e^x}-\frac{e^x}{۱+e^x})dx=\int(۱-\frac{e^x}{۱+e^x})dx$$

با فرض $u=۱+e^x$ آن‌گاه $du=e^x dx$ پس:

$$=x-\int\frac{du}{u}=x-\ln u+c=x-\ln(۱+e^x)+c$$

۲۵) $\int \frac{۸x-۳}{۴x+۱}dx$

حل: با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم: $\int(۲-\frac{۵}{۴x+۱})dx=۲x-\frac{۵}{۴}\ln|۴x+۱|+c$

۲۶) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

حل: با توجه به رابطه مثلثاتی $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\int \csc x dx=\ln(\tan\frac{x}{۲})+c$ پس:

$$\int\frac{dx}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۲\int\frac{dx}{\sin ۲x}=۲\int \csc ۲x dx=۲\ln|\tan x|+c$$

۲۷) $\int \frac{۱}{x^۲}\tan(\frac{۱}{x})dx$

حل: با فرض $u=\frac{۱}{x}$ داریم $du=-\frac{۱}{x^۲}dx$ پس:

$$-\int \tan u du=\ln(\cos u)+c=\ln(\cos\frac{۱}{x})+c$$

۲۸) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

حل: با توجه به رابطه مثلثاتی $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ داریم

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)^3} = \int (\frac{1}{\cos^2 x})^3 dx = \int (1+\tan^2 x)^3 dx$$

با توجه به توان فرد برای تانژانت می‌توان نوشت:

$$\int (1+\tan^2 x)^2 (1+\tan^2 x) dx$$

با فرض $u = \tan x$ آن‌گاه $du = (1+\tan^2 x)dx$ پس:

$$= \int (1+u^2)^2 du = \int (1+2u^2+u^4) du = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + c$$

۲۹) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

حل: با توجه به توان فرد کسینوس $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ داریم:

$$\int \frac{\cos^2 x \times \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int (1-\sin^2 x) \times \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \sin^{-\frac{1}{2}} x (1-\sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int (\sin^{-\frac{1}{2}} x \cos x - \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x) dx$$

با فرض $u = \sin x$ آن‌گاه $du = \cos x dx$ پس:

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} du - \int u^{\frac{3}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + c$$

۳۰) $\int \tan^3 x dx$

حل: با توجه به فرمول بازگشتی برای توان‌های تانژانت $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{x-1} - \int \tan^{n-2} x dx$

پس $\int \tan^3 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}} \quad (۳۱$$

حل: با توجه به فرمول‌های توابع معکوس مثلثاتی داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} \quad (۳۲$$

حل: عبارت زیر رادیکال را به مربع کامل تبدیل و سپس از فرمول توابع معکوس مثلثاتی داریم:

$$-4x^2+4x+3=-(4x^2-4x-3)=-(4x^2-4x+1-1-3)$$

$$=-((2x-1)^2-4)=4-(2x-1)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}$$

با فرض $u=2x-1$ آن‌گاه $du=2dx$

پس:

$$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{u}{2}+c=\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{2x-1}{2}+c$$

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \quad (۳۳$$

حل: با ضرب کسر در e^x ، مشتق مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^0}dx=\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

با فرض $u=e^x$ آن‌گاه $du=e^x dx$ پس:

$$=\int \frac{du}{1+u^2}=\operatorname{Arctan}u+c=\operatorname{Arctan}e^x+c$$

$$\int \frac{dx}{(5x-1)(3x+1)} \quad (۳۴$$

حل: با تجزیه کسر

$$\frac{1}{(5x-1)(3x+1)}=\frac{A}{5x-1}+\frac{B}{3x+1}=\frac{\frac{5}{8}}{5x-1}+\frac{-\frac{3}{8}}{3x+1}=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{5x-1}-\frac{3}{3x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int\left(\frac{5}{5x-1}-\frac{3}{3x+1}\right)dx=\frac{1}{8}(\ln|5x-1|-\ln|3x+1|)+c$$

$$=\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{5x-1}{3x+1}\right|\right)+c$$

۳۵) $\int\frac{x^{2}+2}{x^{2}-1}dx$

حل: با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

$$\int(1+\frac{3}{x^{2}-1})dx=\int(1+\frac{3}{(x-1)(x+1)})dx$$

$$=x+\frac{3}{2}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=x+\frac{3}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)$$

$$=x+\frac{3}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|+c$$

۳۶) $\int\frac{dx}{9x^{2}-30x+25}$

حل: چون عبارت مخرج مربع کامل است یعنی $\Delta=0$ پس:

$$\int\frac{dx}{(3x-5)^{2}}=\int(3x-5)^{-2}dx$$

با فرض $u=3x-5$ آن‌گاه $du=3dx$ پس:

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\int u^{-2}du=\frac{1}{3}\times\frac{u^{-1}}{-1}+c=\frac{-1}{3(3x-5)}+c$$

۳۷) $\int\frac{3x+1}{10x^{2}+11x+3}dx$

حل: با توجه به این که مخرج دارای دو ریشه متمایز می‌باشد بنابراین $10x^{2}+11x+3=(5x+3)(2x+1)$ حال به تجزیه کسر می‌پردازیم:

$$\frac{3x+1}{10x^{2}+11x+3}=\frac{A}{5x+3}+\frac{B}{2x+1}$$

$$=\frac{2Ax+A+5Bx+3B}{(5x+3)(2x+1)}=\frac{(2A+5B)x+(A+3B)}{(5x+3)(2x+1)}$$

$$\Rightarrow(2A+5B)x+(A+3B)=3x+1\Rightarrow\begin{cases}2A+5B=3\\A+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\A=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{3x+1}{10x^{2}+11x+3}=\frac{4}{5x+3}-\frac{1}{2x+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{3x+1}{10x^{2}+11x+3}dx=\int(\frac{4}{5x+3}-\frac{1}{2x+1})dx=\frac{4}{5}\ln|5x+3|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$$

۳۸) $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx$

حل: با توجه به این که مخرج کسر دارای ریشه نمی‌باشد یعنی $\Delta < 0$ پس با ضرب صورت کسر در عددی مناسب آن را به مشتق مخرج تبدیل می‌کنیم بنابراین:

$$\frac{5x+2}{x^2+6x+11}=\frac{\frac{5}{2}(2x+6)-13}{x^2+6x+11}=\frac{\frac{5}{2}(2x+6)}{x^2+6x+11}-\frac{13}{x^2+6x+11}$$

$$\Rightarrow \int\frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+6)}{x^2+6x+11}dx-\int\frac{13}{x^2+6x+11}dx$$

هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه حل می‌کنیم:

در انتگرال

$$\Rightarrow \int\frac{\frac{5}{2}(2x+6)}{x^2+6x+11}dx$$

با فرض $u = x^2+6x+11$ آن‌گاه $du=(2x+6)dx$ پس:

$$=\frac{5}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{5}{2}\ln u=\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+11)$$

در انتگرال $\int\frac{13}{x^2+6x+11}dx$ با تبدیل مخرج به مربع کامل از روابط معکوس مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{13}{x^2+6x+11}=\frac{13}{x^2+6x+9-9+11}=\frac{13}{(x+3)^2+2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{13}{x^2+6x+11}dx=13\int\frac{1}{(x+3)^2+(\sqrt{2})^2}dx=\frac{13}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

پس جواب نهایی انتگرال

$$\Rightarrow \int\frac{5x+2}{x^2+6x+11}dx=\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+11)-\frac{13}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{x+3}{\sqrt{2}}+c$$

۳۹) $\int x^2e^{-x}dx$

حل: به کمک روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases}u=x^2\\ dv=e^{-x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-\int -e^{-x}(2xdx)=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$$

برای محاسبه انتگرال $\int xe^{-x}dx$ باز هم به روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

۴۰) $\int x\cos x dx$

حل: به کمک روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

۴۱) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

حل: برای حذف رادیکال از تغییر متغیر $x = 2\sin t$ استفاده می‌کنیم پس $dx = 2\cos tdt$ بنابراین:

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos tdt}{(2\sin t)^2\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int \frac{2\cos tdt}{(4\sin^2 t)(2\cos t)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\cot gt + c$$

با توجه به تغییر متغیر $x = 2\sin t$ پس:

$$\sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \operatorname{Arcsin}(\frac{x}{2}) \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\cot(\operatorname{Arcsin}(\frac{x}{2})) + c$$

۴۲) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

حل: با تغییر متغیر $x = \sin t$ آن‌گاه $dx = \cos tdt$ پس:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos tdt$$

$$= \int \cos^2 tdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

از طرفی چون $x = \sin t$ پس $t = \operatorname{Arcsin} x$ بنابراین:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}\sin(2\operatorname{Arcsin} x)) + c$$

$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

۴۳) $\int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)}dx$

حل: با توجه به مخرج، کسر را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+3Bx^2+3Cx-Bx-C}{(3x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+3B)x^2+(3C-B)x+A-C}{(3x-1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+3B=1 \\ 3C-B=1 \\ A-C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{7}{5} \\ B=\frac{4}{5} \\ C=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \int\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)}dx = \int\frac{-\frac{7}{5}}{3x-1}dx + \int\frac{\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2+1}dx$$

$$= -\frac{7}{5}\times\frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+1) + \frac{3}{5}\operatorname{Arctan} x + c$$

$$= -\frac{7}{15}\ln|3x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+1) + \frac{3}{5}\operatorname{Arctan} x + c$$

۴۴) $\int_0^{\pi}\cos^2 x\sin x\,dx$

حل: با فرض $u=\cos x$ آن‌گاه $du=-\sin x\,dx$ پس:

$$\int\cos^2 x\sin x\,dx = \int -u^2du = -\frac{1}{3}u^3 + c = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos^2 x\sin x\,dx = -\frac{1}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

۴۵) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$

حل:

$$\int\tan^2 x\,dx = \int(\tan^2 x + 1 - 1)dx$$

تمرین۱-۲

۱)انتگرال های زیر را محاسبه کنید .

1) $\int (2x^5 - 3x + 1)dx$ 2) $\int (3x^4 - 7x^2 + x)dx$

3) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x} + 3\right) dx$ 4) $\int \left(\frac{2x^5 - x^3 + 1}{x^2}\right) dx$

5) $\int \left(\frac{3x^2 - x + 4}{\sqrt{x}}\right) dx$ 6) $\int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

7) $\int \sqrt{2x - 5}\, dx$ 8) $\int \frac{3}{\sqrt{2x + 1}} dx$

9) $\int \sqrt[3]{3x + 7} dx$ 10) $\int x^2\sqrt{x^3 + 4} dx$

11) $\int 2x^3\sqrt{x^4 - 1} dx$ 12) $\int (2x + 1)\sqrt{x^2 + x}\, dx$

13) $\int x^2(x^3 + 4)^7 dx$ 14) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

15) $\int x \cos x^2\, dx$ 16) $\int x \cos x^2 \; sin^3 x^2\, dx$

17) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$ 18) $\int tan^2 x\, dx$

19) $\int \frac{dx}{sin^2 x}$ 20) $\int cos^2 x\, dx$

21) $\int cos^3 x\, dx$ 22) $\int sin2x\, cos^2 x\, dx$

23) $\int xe^{-x} dx$ 24) $\int e^x \sin x dx$

25) $\int \sin^{-1} x\, dx$ 26) $\int \tan^{-1} x\, dx$

27) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 4}\, dx$ 28) $\int \frac{1}{9x^2 + 4}\, dx$

29) $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x - 5}} dx$ 30) $\int \frac{4x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

31) $\int \frac{2ta\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 30) $\int \frac{4x + 2}{x - 1} dx$

$31)\int \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx$ $32)\int \frac{x^2-5x+1}{x+2}dx$

$33)\int \sqrt{4-x^2}dx$ $34)\int \frac{4x+2}{(2x-1)(x^2+4)}dx$

$35)\int x\sqrt{2x-5}\,dx$ $36)\int \frac{3}{\sqrt{x+1}}dx$

$37)\int sin^3xcos^3x\,dx$ $3\,8)\int sin^2xcos^4xdx$

۳-۱۱ انتگرال معین

اگر $F(x)$یک تابع اولیه تابع$f(x)$ در بازه [a,b] باشد آنگاه :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال۱:حاصل$\int_1^2 (2x+1)dx$ را محاسبه کنید.

حل: $f(x)=x^2+x$ یک تابع اولیه $f(x)=2x+1$ می باشد پس:

$$\int_1^2 (2x+1)dx = x^2+x\Big|_1^2 = (4+2)-(1+1) = 4$$

خواص انتگرال معین

اگر تابع $f(x)$ در بازه [a,b] انتگرال پذیر باشد آنگاه :

$$1)\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$2)\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\int_a^b f(x)dx=\int_a^c d(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

مثال۲: حاصل انتگرالهای زیر را بیابید.

$$1)\int_0^2 |x-1|dx \qquad\qquad 2)\int_0^3 x[x]dx$$

حل :

$$1)\int_0^2 |x-1|dx=\int_0^1 |x-1|dx+\int_1^2 |x-1|dx$$

$$=\int_0^1 (-\mathrm{x}+1)\mathrm{dx}+\int_1^2 (\mathrm{x}-1)\mathrm{dx}=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{x}^2+\mathrm{x}\right)|_0^1+(\frac{1}{2}\mathrm{x}^2-\mathrm{x})|_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-0+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=1$$

$$2)\int_0^3 x[x]dx=\int_0^1 x[x]dx+\int_1^2 x[x]dx+\int_2^3 x[x]dx$$

$$=\int_0^1 0\mathrm{dx}+\int_1^2 \mathrm{xdx}+\int_2^3 2\mathrm{xdx}=0+(\tfrac{1}{2}\mathrm{x}^2)\Big|_1^2+(\mathrm{x}^2)\Big|_2^3=\left(2-\tfrac{1}{2}\right)+(9-4)=\tfrac{11}{2}$$

مشتق گیری از انتگرال

باتوجه به تعریف انتگرال معین می توان فرمول زیر را نتیجه گرفت :

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\int_{u(x)}^{\mathrm{v(x)}} \mathrm{f(t)dt}=\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}\mathrm{f}\big(\mathrm{v(x)}\big)-\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}\mathrm{f(u(x))}$$

مثال۳: مشتق های زیرا را محاسبه کنید .

$$1)\frac{d}{dx}\int_1^{x^1}\sqrt{2+t^3}dt \qquad\qquad 2)\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$1)\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\sqrt{2+t^3}dt=2x\sqrt{2+x^6}-0\sqrt{2+1}=2x\sqrt{2+x^6}$$

$$2)\tfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\tfrac{1}{t^2+1}dt=(-\sin x)\tfrac{1}{cos^2x+1}-(\cos x)\tfrac{1}{sin^2x+1}$$

تمرین ۱-۳

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

1) $\int_{1}^{3}(x^2-2x+3)dx$
2) $\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$

3) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx$
4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x\,)dx$

5) $\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+2}dx$
6) $\int_{-1}^{2}x|x|dx$

7) $\int_{1}^{3}x^2[x]dx$
8) $\int_{0}^{2}x^{[x]}\,dx$

9) $\int_{1}^{2}|x+1|dx$
10) $\int_{0}^{1}x\sqrt{x^2+1}dx$

11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}tan^2x\,dx$
12) $\int_{-1}^{1}x(1+x^2)^3dx$

13) $\int_{0}^{\pi}\sin x\,(1+\cos x)^2dx$
14) $\int_{1}^{2}|x|\sqrt{x^2-1}dx$

۲-درتوابع زیر $\frac{dy}{\mathrm{dx}}$ را بدست آورید.

1) $y=\int_{2}^{x}\left(t^2+\sqrt{t}\right)dt$
2) $y=\int_{x}^{\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^3}dt$

3) $y=\int_{1}^{\sin x}\sqrt{1+t^2}dt$
4) $y=\int_{x^3}^{2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}$

5) $y=x\int_{Lnx}^{x}\frac{dt}{2t+5}$
6) $y=x^2\int_{x}^{e^x}(\frac{1}{t^2+t})^3dt$

۳-حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوپیتال محاسبه کنید .

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\int_{\sin x}^{cos}\frac{dt}{t^2-1}}{x-\frac{\pi}{4}}$
2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\int_{\sqrt{3}}^{\tan x}(t+1)dt}{1-2\cos x}$

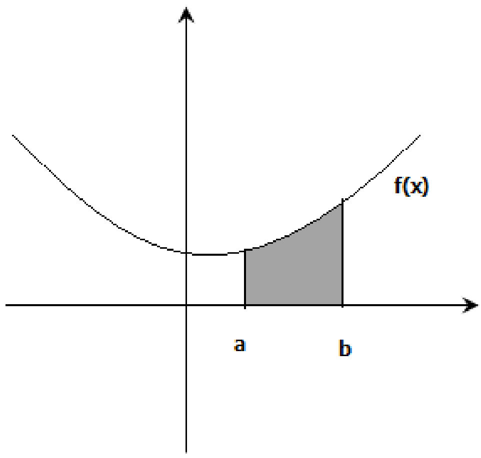
۴-۱۱محاسبه مساحت ، حجم و طول

یکی از مهمترین کاربردهای انتگرال محاسبه مساحت ، حجم و طول منحنی توابع می باشد.

سطح محصور بین منحنی و محور x ها

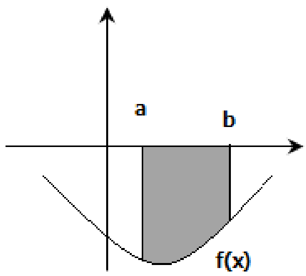
اگر تابع f(x) در بازه [a,b] پیوسته باشد برای محاسبه سطح محصور بین نمودار f(x) و خطوط x=b,x=a و محور x هایکی از حالات زیر را داریم :

۱-اگر نمودار بالای محور x ها باشد دراین صورت :



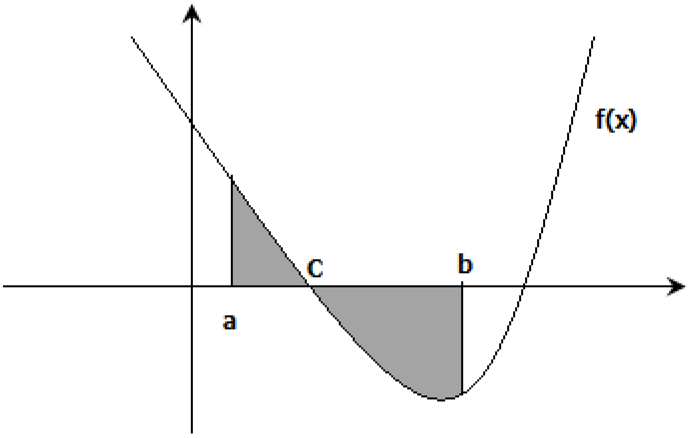
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

۲-اگر نمودار زیر محور x ها باشد دراین صورت :



$$s=-\int_a^b f(x)dx$$

۳-اگر قسمتی از نمودار بالا و قسمتی زیر محور x ها باشد دراین صورت :



$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

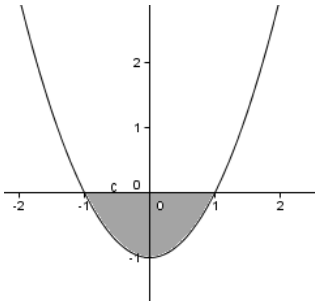
مثال۱: سطح محصور بین منحنی y=x+1 و محورx ها و خطوط x=3,x=1 را محاسبه کنید .

حل:

$$s = \int_1^3 (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{x}\Big|_1^3 = \left(\frac{9}{2}+3\right) - (\frac{1}{2}+1) = 6$$

مثال ۲: سطح محصور بین منحنی $y = x^2 - 1$ و محور x ها را بیابید.

حل:

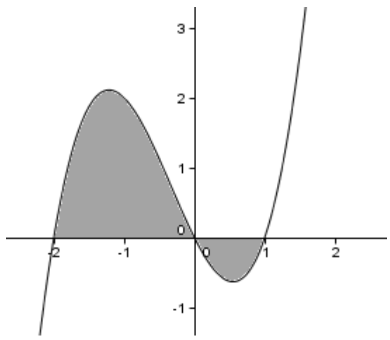


$$y = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$s = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}$$

مثال۳: سطح محصور بین منحنی $y = x^3 + x^2 - 2x$ و محور x ها را بیابید .

حل:



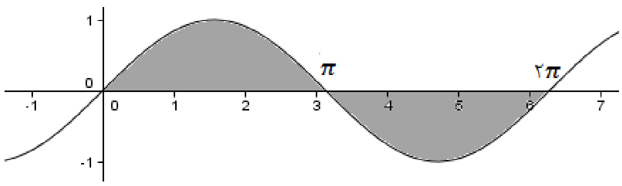
$$y = 0 \to x^3 + x^2 - 2x = 0 \to x(x+2)(x-1) = 0 \to x = 0, -2, 1$$

$$s = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x) - \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \Big|_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]\Big|_{0}^{1} = \frac{97}{12}$$

مثال۴: سطح محصور بین منحنی y=sin x و محور x ها و خطوط x=0 و x=2π را بیابید.

حل:



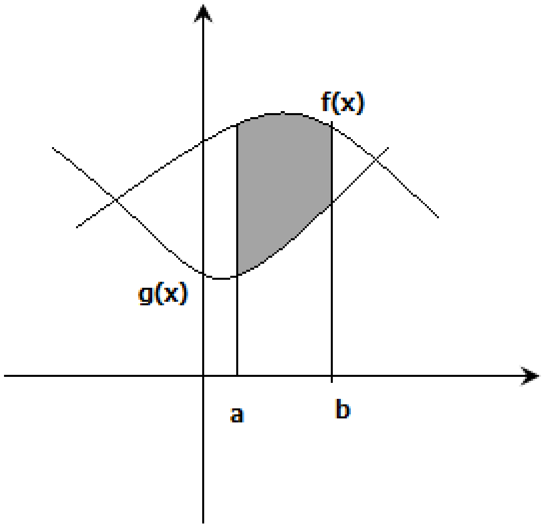
$$s = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4$$

سطح محصور بین دو منحنی

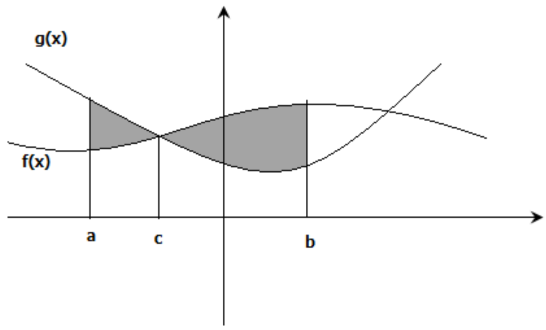
اگر نمودار y=f(x) در بازه [a,b] بالاتر از منحنی y=g(x) باشد دراین صورت سطح محصور بین دو منحنی دراین بازه برابر است با :

$$s = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x)) dx$$



اگر نمودار دو منحنی g(x),f(x) در بازه[a,b] یکدیگر را در نقطه c مانند شکل زیر قطع کنند (برای پیدا کردن c معادله f(x)=g(x) را حل می کنیم) دراین صورت :

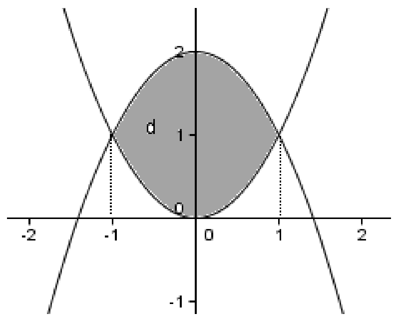
$$s = \int_a^c (g(x) - f(x)dx + \int_c^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$



مثال۵: سطح محصور بین دو منحنی $y=2-x^2, y=x^2$ را بیابید

حل: ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می آوریم:

$$x^2 = 2 - \mathrm{x}^2 \rightarrow 2\mathrm{x}^2 = 2 \rightarrow \mathrm{x}^2 = 1 \rightarrow \mathrm{x} = \pm 1$$



$$s = \int_{-1}^{1} \big((1 - x^2) - x^2\big)dx$$

$$\int_{-1}^{1}(1-2x^2)dx = x-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

مثال۶: مساحت بین دو نمودار $y=x^2$ و $y=3x-2$ و خطوط $x=0$ و $x=2$ را بیابید .

$$x^2 = 3x-2 \rightarrow x^2-3x+2=0 \rightarrow (x-1)(x-2)=0 \rightarrow$$

$$x=1, x=2$$

$$s=\int_0^1\left(x^2-(3x-1)\right)dx-\int_1^2(3x-1-x^2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)-0+\left(6-2-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-1-\frac{1}{3}\right)=1$$

توجه : اگر روابط به صورت $x=f(y)$ و $x=g(y)$ باشند با عوض کردن y,x می توان سطح محصور بین دو منحنی را مانند حالت قبل محاسبه کرد.

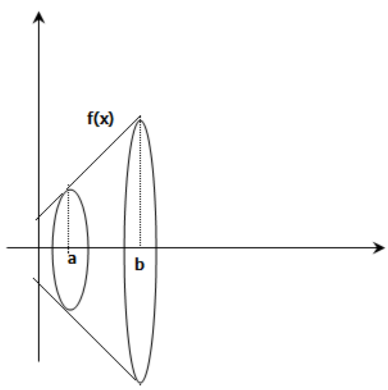
مثال۷: سطح محصور بین دو منحنی $x=2-y^2, x=y^2$ را بیابید.

حل: اگر جای y,x را در دو منحنی عوض کنیم توابع $y=2-x^2, y=x^2$ بدست می آید و مسئله به مثال۵ تبدیل می شود بنابراین سطح محصور بین دو منحنی $\frac{2}{3}$ می باشد.

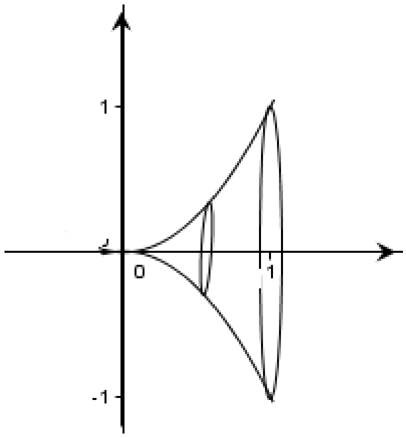
حجم حاصل از دوران منحنی حول محور x ها

اگر منحنی پیوسته $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ را حول محور x ها دوران دهیم دراین صورت حجم حاصل از دوران سطح محصور بین نمودار $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و $y=0$ از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$



مثال۸: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=1,x=0$ و $y=0$ را حول محور x ها بیابید.

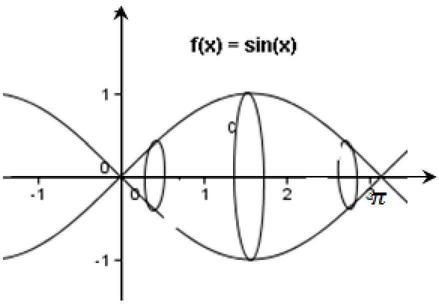


حل:

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 (x^2)^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$$

مثال ۹: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین $x=\pi\ ,x=0\ ,y=\sin x$
$y=0,$را حول محور x ها بیابید .

حل:



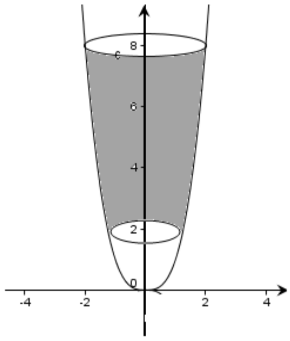
$$V=\pi\int_0^\pi sin^2xdx=\pi\int_0^\pi \frac{1-cos2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$$

توجه : حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی$x=f(y)$ و خطوط $x=0,y=b,y=a$ حول محصور y ها از فرمول زیر محاسبه می شود :

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$

مثال۱۰: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خطوط $x=0,y=8,y=1$ حول محور y ها را بیابید.

حل:



$$y = x^3 \to x = \sqrt[3]{y}$$

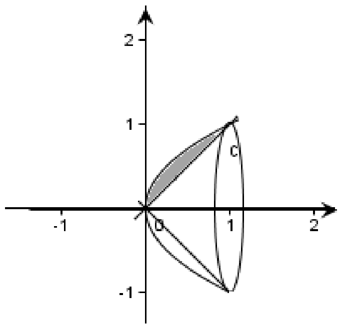
$$V = \pi \int_1^8 x^2 dy = \pi \int_1^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_1^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{93\pi}{5}$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین دو منحنی

اگر دو تابع g,f در بازه [a,b] پیوسته باشند بطوریکه $g(x) \le f(x)$ دراین صورت حجم حاصل از دوران سطح محصور بین g,f و خطوط $y=0,x=b,x=a$ حول محور x ها بر ابر است با :

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$

مثال۱۱: سطح محصور بین دو نمودار $y=\sqrt{x}, y = x$ را حول محور x ها دوران می دهیم حجم تولید شده را بیابید .



حل: ابتدا نقطه تلاقی دو منحنی را بدست می آوریم :

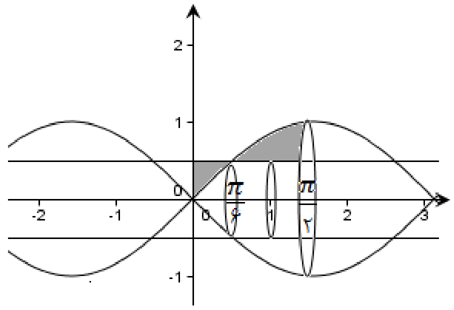
$$\sqrt{x} = \mathrm{x} \to \mathrm{x} = \mathrm{x}^2 \to \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = 0 \to \mathrm{x}(\mathrm{x}-1) = 0 \to \mathrm{x} = 0{,}1$$

$$V=\pi\int_0^1((\sqrt{x})^2-x^2)dx=\pi\int_0^1(x-x^2)dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۱۲: سطح محصور بین نمودار y=sin x و خطوط $x=\frac{\pi}{2}, x=0$

$y=0, y=\frac{1}{2}$, حول محور x ها دوران می دهیم حجم تولید شده را بیابید .

حل :



$$\sin x=\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}((\frac{1}{2})^2-(\sin x)^2)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}((\sin x)^2-(\frac{1}{2})^2)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4})dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\pi\left[\frac{-1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left[-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right]+\pi\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{24}\right]=\frac{\pi^2+6\sqrt{3}\pi}{24}$$

طول قوس منحنی

هرگاه تابع y=f(x) در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد طول قوس منحنی دراین بازه به صورت زیر محاسبه می شود :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

مثال۱۳: طول قوس منحنی $y=\sqrt{x^3}$ در بازه (۰,۱) را محاسبه کنید .

حل:

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\frac{3}{2}} \to \mathrm{y}' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_o^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_o^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \ dx$$

انتگرال فوق با تغییر متغیر $u = 1+\frac{9}{4}x$ حل می شود :

$$\mathrm{du} = \frac{9}{4}\mathrm{dx} \ \to \mathrm{dx} = \frac{4}{9}\mathrm{dx}$$

$$\int \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{4}{9}\right)du = \frac{4}{9}\times\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{27}\sqrt{u^3} = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3} + \mathrm{c}$$

$$\to L = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\sqrt{(1+\frac{9}{4})^3} - \frac{8}{27}$$

سطح جانبی حاصل از دوران منحنی

هرگاه تابع y=f(x) د ر بازه (a,b) مشتق پذیر باشد سطح جانبی حاصل از دوران منحنی حول محور x ها از رابطه زیر محاسبه می شود .

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

مثال۱۴: سطح حاصل از دوران منحنی y=2x+1 در بازه (۲, ۰) حول محور x ها را بیابید.

$$y' = 2 \to s = 2\pi\int_0^2 (2x+1)\sqrt{1+4}\,dx = 2\pi\sqrt{5}\int_0^2 (2x+1)dx$$

$$= 2\pi\sqrt{5}[x^2+x]_0^2 = 2\sqrt{5}(6) = 12\pi\sqrt{5}$$

مرکز ثقل یک ناحیه مسطح

هرگاه تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد دراین صورت مرکز ثقل یا گرانیگاه   سطح محصور به نمودار $y=f(x)$ و خطوط $y=0,x=b,x=a$ نقطه $c(x_c,y_c)$ است که از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$x_c=\frac{\int_a^b xy\,dx}{S} \qquad\qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S}$$

در روابط فوق s مساحت سطح محصور می باشد.

مثال ۱۵: مختصات مرکز ثقل سطح محدود به $y=1-x^2$ و محور x ها را بیابید .

حل:

$$\int_{-1}^{1} xy\,dx=\int_{-1}^{1} x(1-x)^2 dx=0$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2 dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{15}$$

$$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=x-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow x_c=\frac{o}{\frac{4}{3}}=0 \qquad\qquad ,y_c=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{5}$$

بنابراین مرکز ثقل سطح داده شده نقطه ($\frac{2}{5}$ و 0)می باشد.

تمرین۱۱-۴

۱- در تمرینهای زیر مساحت محصور به منحنی ها یا خطوط داده شده را بیابید.

1) $y = x^2 - 2x \quad , \quad y = 0$

2) $y = x^2 + x \quad , \quad y = 2x$

3) $y = 1 - x^2 \quad , \quad y = 0$

4) $y = x^2 + 1 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 2$

5) $y = x^3 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad y = 0$

6) $y = x^2 + x \quad , \quad y = 2$

7) $y = x^4 \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = 1$

8) $y = \sqrt{x} \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 4$

9) $y = \sin x \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad y = 0$

10) $x = y^2 + 1 \quad , \quad x = y + 1$

11) $y = \cos x \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$

12) $y = \sin x \quad , \quad y = \cos x \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = \pi$

۲-حجم حاصل از دوران مساحت محصور به منحنی یا خطوط زیر حول محور x ها را بیابید.

1) $y = x^2 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$

2) $y = x^3 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$

3) $y = 1 - x^2 \quad , \quad y = 0$

4) $y = \sin x \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} \quad , \quad y = 0$

5) $y = \frac{1}{x} \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$

$6) y = |x| \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad y = 0$

$7) y = 2x \quad , \quad y = x^2$

۳-حجم حاصل از دوران مساحت محصور به منحنی یا خطوط زیر حول محور y ها را بیابید.

$1) y = x^{2} \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 1$

$2) y = \sqrt{x} \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 1$

$3) y = x^3 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$

$4) y = \frac{1}{x} \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad y = 0$

$5) y = \sqrt{x} \quad , \quad y = -x + 6 \quad , \quad x = 0$

۴-*طول قوس منحنی های زیر در بازه داده شده را بیابید.*

$1) y = \sqrt{x^3} \quad , \quad (0,4)$

$2) y^2 = 4x^3 \quad , \quad (0,1)$

$3) y^2 = (x +)^3 \quad , \quad (0,2)$

۵-*طول قوس منحنی که خط x=1 از منحنی $y=\sqrt{x^3}$ جدا می کند را بیابید.*

۶-*سطح جانبی حاصل از دوران خط y=3x+2 در بازه (0,2) حول محور x ها را بیابید.*

۷-*سطح جانبی حاصل از دوران منحنی y=sin x در بازه $(0 و \frac{\pi}{2})$ حول محور x ها را بیابید.*

۸-*مختصات مرکز ثقل مساحت محدود به خطوط x+y=2 و y=0,x=0 را بیابید .*

۹-*مختصات مرکز ثقل مساحت محدود به منحنی $y=4-x^2$ و محور x ها را بیابید.*