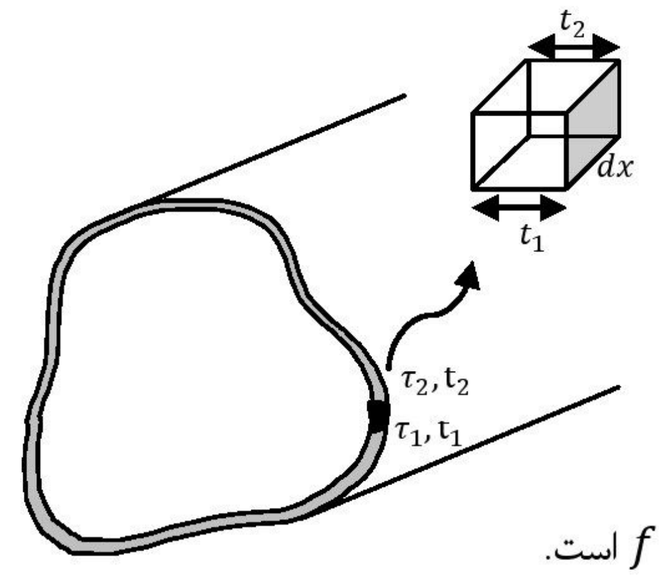
پیچش در لوله‌های جدارنازک:

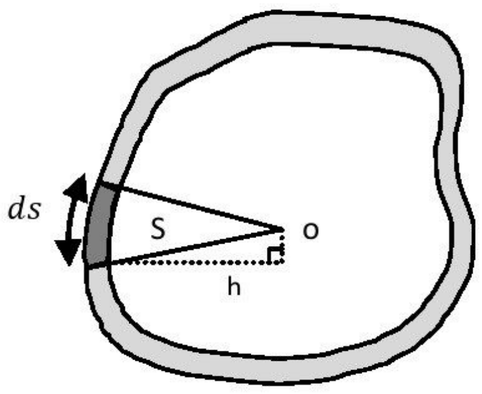


$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_2(t_2 dx) - \tau_1(t_1 dx) = 0$$
$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \cdots = \tau_n t_n$$

به حاصل‌ضرب برش در ضخامت، **جریان برش** می‌گوییم که در کل جداره مقدار آن ثابت و برابر با f است.

$$f = \tau t$$

برای بدست آوردن گشتاور در لوله‌های جدارنازک:



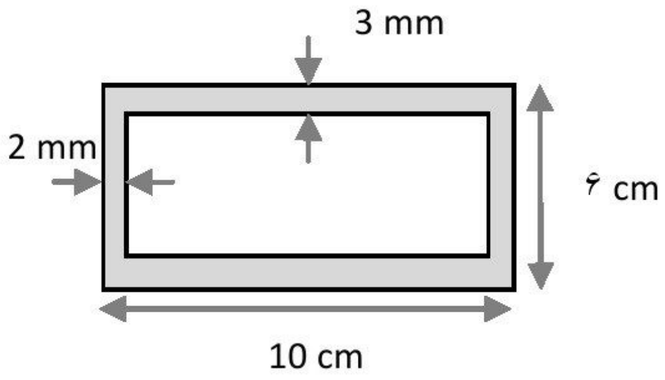
$$dT = dF.h = (\tau dA).h = (tds).\tau h \quad \rightarrow \quad dT = \tau thds$$
$$dS = \frac{1}{2}hds \quad \rightarrow \quad hds = 2dS$$

$$dT = 2\tau t dS = 2f dS \quad \rightarrow \quad T = 2A_m f$$

$$\boxed{f = \frac{T}{2A_m}} \qquad \boxed{\tau = \frac{T}{2A_m t}}$$

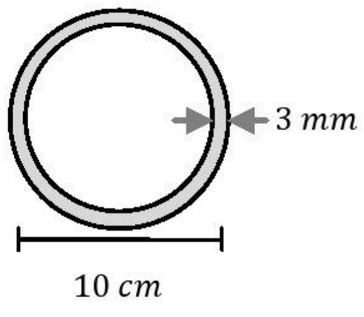
بنابراین با داشتن مساحت کل جداره (A_m) و گشتاور، تنش برشی را در هر نقطه بدست آوریم.

❖ **مثال.** *اگر* $T = 10\ Nm$ *باشد،* τ_{max} *را بدست آورید.*



$$A_m \cong 10 \times 6 = 60\ cm^2$$
$$f = \frac{T}{2A_m} = \frac{10}{2 \times 60 \times 10^{-4}} = 833\frac{N}{m}$$
$$f = \tau t \quad \rightarrow \quad 833 = \tau_{max}\, t_{min} = \tau_{max} \times 2 \times 10^{-3}$$
$$\tau_{max} = 416 \times 10^3 Pa$$

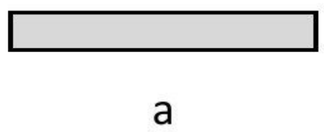
❖ **مثال.** *اگر* $\tau_y = 80\ MPa$ *باشد،* T_y *را حساب کنید.*



$$f = \tau t \quad \rightarrow \quad f = 80 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-3} = 24 \times 10^4$$
$$f = \frac{T}{2A_m}, \qquad A_m \cong 25 \times 10^{-4}\pi$$
$$T = 1200\pi\ Nm$$

بررسی دیگر مقاطع:

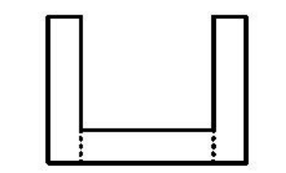
اگر مقطع به صورت مستطیل نازک باشد :

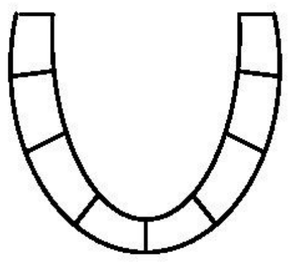


$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}, \quad a > b$$

- c_1 بستگی به نسبت $\frac{a}{b}$ دارد که جز معلومات مسئله است.

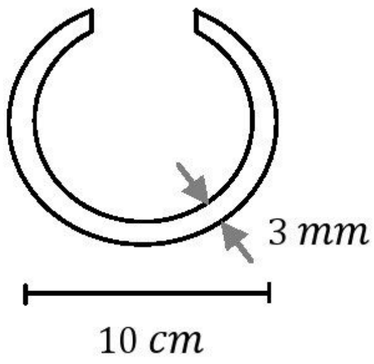
اشکال زیر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از مستطیل‌ها در نظر گرفت :





$$\rightarrow \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\sum c_1 ab^2}$$

❖ **مثال.** اگر $\tau_y = 80\ MPa$ ، $c_1 = \frac{1}{3}$ باشد، $T_y = ?$



$$\tau_{max} = \frac{T}{{}^1/_3 ab^2} \rightarrow 80 \times 10^6 = \frac{T}{{}^1/_3 (3 \times 10^{-3})^2 \times 10\pi} \rightarrow T = 73\ Nm$$

- **نکته:** با مقایسه دو مثال قبل می بینیم تنش تسلیم در لوله جدارنازک در حالت بسته حدود ۳۸۰۰ و در حالت باز ۷۳ نیوتن‌متر است. یعنی لوله‌های جدارنازک بسته در برابر پیچش مقاومت بسیار بیشتری نشان می دهند و اغلب از آنها استفاده می‌شود.

نحوه محاسبه زاویه پیچش در لوله‌های جدارنازک:

$$\varphi = \frac{Tl}{c_2 a b^3 G}$$

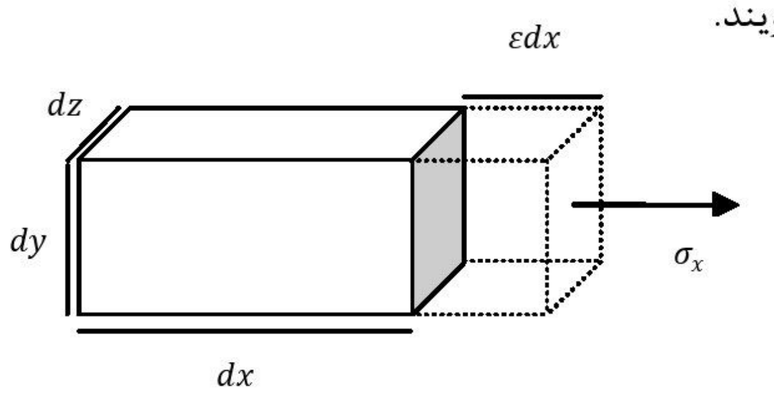
۱) **جدارنازک باز** (c_2 جز معلومات مسئله است):

این φ برای طولی از l است، که در آن ضخامت t تغییر نمی‌کند

۲) **جدارنازک بسته:**

برای بدست آوردن φ در این حالت از قضیه کار و انرژی کمک می گیریم. می‌دانیم در بخش الاستیک تنها انرژی مکانیکی از جنس پتانسیل است نه جنبشی چون مسئله را در حال تعادل بررسی می‌کنیم و حرکتی نداریم. به دلیل وجود نیرو و جابجایی در خود جسم کار داریم که به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می‌شود.

نکته: به ازای کرنش‌های داخل جسم کار انجام می‌شود که به آن کار داخلی می‌گویند.



کار داخلی در این المان = جابجایی $. F$

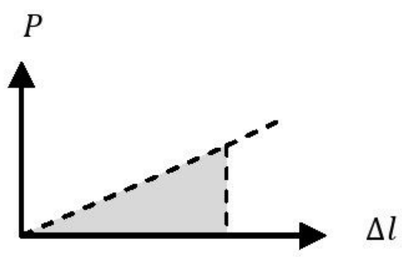
$$dW = \sigma_x A. \varepsilon_x dx = \sigma_x (dydz)\varepsilon_x dx = \sigma_x \varepsilon_x dxdydz$$

برای بدست آوردن کار داخلی از این عبارت روی حجم کل انتگرال می‌گیریم. این انتگرال باید برابر با کار خارجی باشد.

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma_x \varepsilon_x dxdydz = \frac{{\sigma_x}^2}{2E}\int_V dxdydz = \frac{{\sigma_x}^2}{2E} Al$$

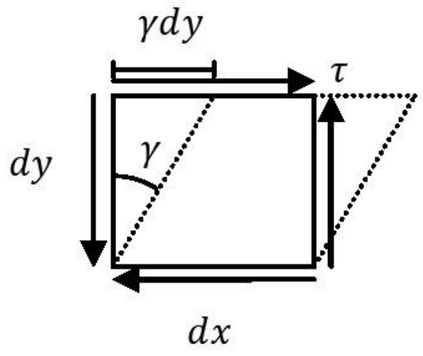
$$= \frac{1}{2}\frac{N^2 Al}{A^2 E} = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EA} = \frac{1}{2}P\Delta l$$

چون نیرو همیشه به صورت تدریجی وارد می‌شود، نمودارش به صورت زیر است:



$$W = \frac{1}{2}P\Delta l$$

اما تنش موثر در پیچش تنش برشی است:



کار انجام شده در این المان = جابجایی $. \frac{1}{2}F$

$$\frac{1}{2}\tau(dxdz).\gamma dy$$

$$\frac{1}{2}\tau\gamma dxdydz = \frac{1}{2}\frac{1}{G}\tau^2 dxdydz$$

$dA = tds$

$$u = \frac{1}{2}\frac{1}{G} l \int \tau^2 dydz = \frac{lf^2}{2G}\int_A \frac{dydz}{t^2} = \frac{lf^2}{2G}\int_S \frac{tds}{t^2}$$

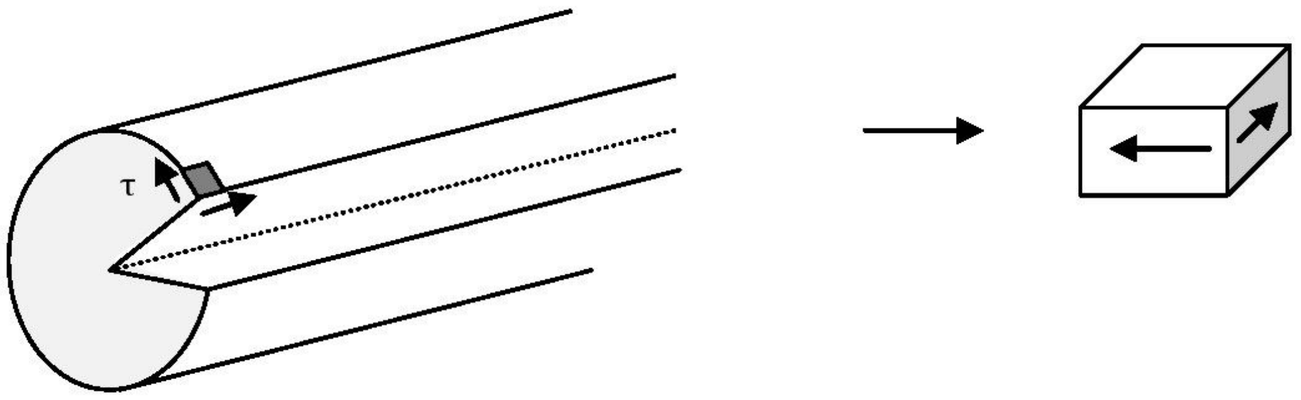
مقدار کار داخلی باید برابر با کار خارجی باشد:

کار خارجی = گشتاور × زاویه دوران در امتداد گشتاور $\longrightarrow$ $\frac{lT^2}{8{A_m}^2 G}\int_S \frac{ds}{t} = \frac{1}{2}T\varphi$

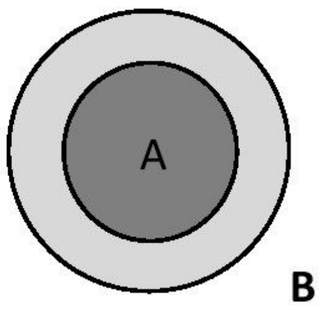
- **نکته:** اگر t ثابت باشد از انتگرال بیرون آمده و $\int_S ds$ برابر محیط جداره است.
- **نکته:** در هر سطحی که تنش برشی داشته باشیم حتماً تنش روی سطح عمود بر آن هم تنش وجود دارد که از نظر اندازه این دو تنش برشی با هم برابرند. در حالی که در تنش‌های عمودی این‌گونه نیست.

تنش عمودی :

تنش برشی:



- **نکته:** رفتار برخی از مصالح در جهت برشی و طولی یکسان است مانند فولاد و در برخی متفاوت است مانند چوب که در جهت طولی ضعیف‌تر است. این رفتار بستگی به میزان تنش مجاز طولی و تنش مجاز برشی دارد.
- **نکته:** به طور کلی در بحث پیچش فرض همیشه براین است که سطح مقطع ما تغییر شکل نمی‌دهد، یعنی اگر دایره است، بعد از پیچش هم دایره باقی می‌ماند.
- **نکته:** در میله‌های توپر با جنس متفاوت باید دقت کنیم که φ زاویه پیچش در هر دو برابر است ولی Tها متفاوت است.

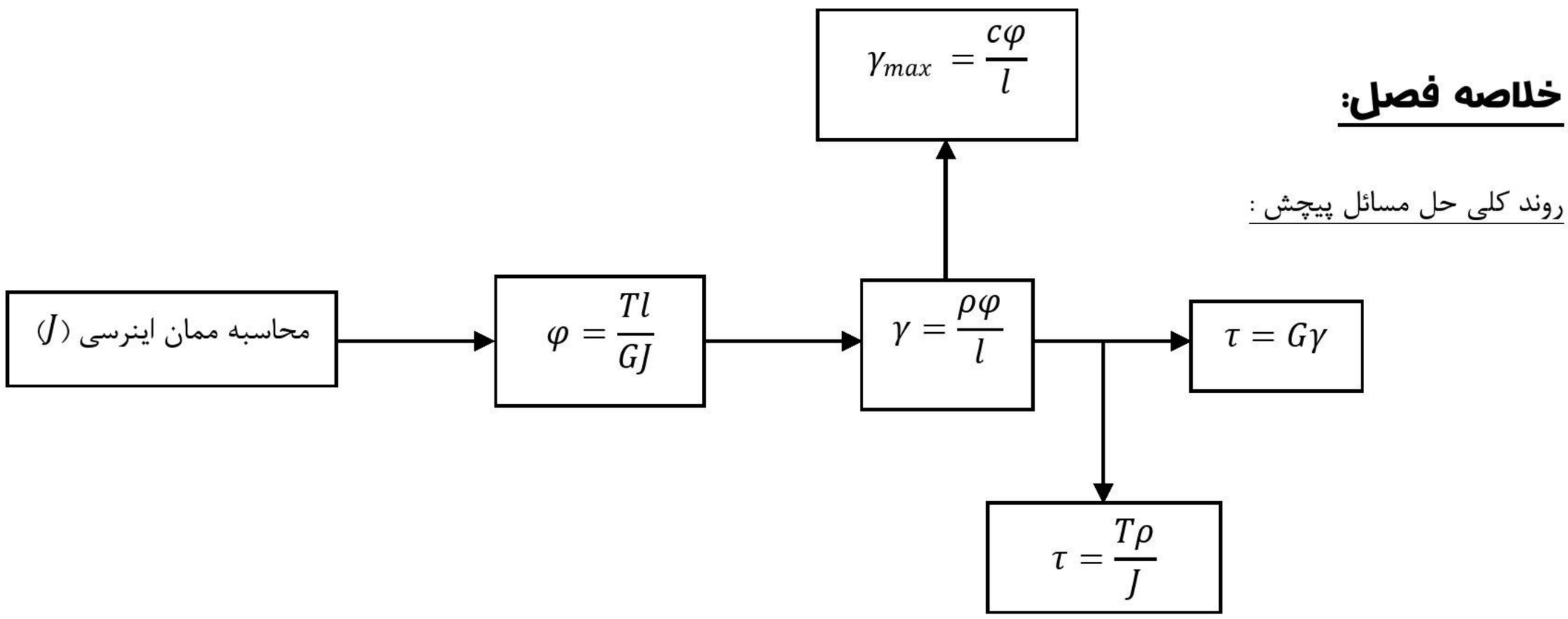


$$\tau_A = \frac{T_A R}{J_A}\ , \qquad \tau_B = \frac{T_B R}{J_B}$$

- **نکته:** دقت شود که در رابطه‌ی $\tau = G\gamma$ فقط در حالت الاستیک قابل استفاده است.

خلاصه فصل:

روند کلی حل مسائل پیچش :



نکته : ممان اینرسی مقاطع دایره‌ای توپر برابر با $J = \frac{\pi c^4}{2}$ است.

در مسائل چرخ و دنده :

$$\begin{cases} T_1 = \mathrm{FR}_1 \\ \mathrm{T}_2 = \mathrm{FR}_2 \end{cases} \rightarrow \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}$$

در مسائلی که وارد مرحله مومسان می‌شویم :

$$\begin{cases} T_{\mathrm{y}} = \frac{\pi \mathrm{c}^3}{2}\tau_{\mathrm{y}} & \text{میزان گشتاور هنگام شروع به تسلیم} \\ \mathrm{T_u} = \frac{2\pi \mathrm{c}^3}{3}\tau_{\mathrm{y}} & \text{ماکسیمم میزان گشتاور پیش از انهدام} \end{cases} , \quad T = \frac{4}{3}T_y\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_y}{c}\right)^3\right)$$

پیچش در عضوهای جدارنازک :

۱) بسته :

$$f = \tau t \rightarrow \text{جریان برش در طول کل جداره است} \rightarrow f = \frac{T}{2A_m} , \quad \tau = \frac{T}{2A_m t} , \quad \varphi = \frac{lT}{4{A_m}^2 G}\int \frac{ds}{t}$$

۲) باز (مجموعه‌ای از مستطیل‌ها) :

$$\tau_{max} = \frac{T}{\sum c_1 ab^2} , \quad \varphi = \frac{Tl}{c_2 ab^3 G}$$