وزارت علوم تحقیقات و فن‌آوری

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

دانشکده فنی شهید بهشتی کرج

نام درس:

مدارهای الکتریکی ۲

مولف و مدرس:

محمود محمدحسن

فصل هفتم

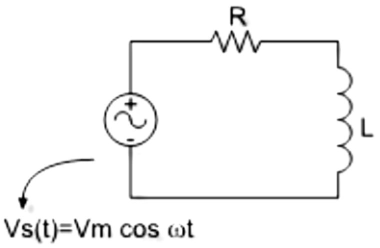
تحلیل حالت ماندگار سینوسی

پاسخ کامل توابع سینوسی پایدار :

۱- پاسخ طبیعی : مستقل از شکل تابع تحمیلی است و به نوع مدار , مقدار عناصر و شرایط اوّلیه بستگی دارد . برای محاسبهٔ پاسخ طبیعی , تمام توابع تحمیلی را صفر قرار می دهیم .

۲- پاسخ تحمیلی : دارای شکل ریاضی تابع تحمیلی است .

۳- پاسخ کامل : به مجموع پاسخ تحمیلی و پاسخ طبیعی پاسخ کامل گویند .



می خواهیم پاسخ $i(t)$, در حالت پایدار را به دست آوریم .

پاسخ تحمیلی + پاسخ طبیعی = پاسخ کامل مدار

$$-V_S + R\,i + L\,\frac{di}{dt} = 0$$

$$R\,i + L\,\frac{di}{dt} = V_m\,\cos\omega\,t$$

با حل معادلهٔ دیفرانسیل فوق نتیجه می شود :

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\,\omega)^2}}\cos\left(\omega\,t - ton^{-1}\,\frac{L\,\omega}{R}\right)$$

φ : زاویهٔ اختلاف فاز جریان از ولتاژ

$$\varphi = -ton^{-1}\,\frac{L\,\omega}{R}$$

X_L : مقاومت سلفی (القایی) برحسب اهم

$$|X_L| = L\,\omega$$

مقدار مؤثر :

مقدار مؤثر به مقدار جریانی گویند که اگر از یک مقاومت برای مدت مشخصی عبور کند , مقدار گرمایی را به وجود آورد که جریان دائم در همان مدت زمان می تواند همان گرما را تولید کند و به آن effective و یا ($root\ \ mean\ \ squar = rms$)گویند به طوری که در حالت کلّی :

$$y_{ems} = y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} y^2(t)\, dt}$$

برای مقدار مؤثر ولتاژ از رابطهٔ :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} V^2(t)\, dt}$$

و برای مقدار مؤثر جریان از رابطهٔ :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} i^2(t)\, dt}$$

استفاده می کنیم . البته معمولاً مقادیر مؤثر را در دورهٔ تناوب (پریود) محاسبه می کنند و در این صورت :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t)\, dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\, dt}$$

❊ اگر جریان هارمونیک باشد به طوری که :

$$i(t) = I_{m1} \sin(\omega t) + I_{m2} \sin(2\omega t) + I_{m3} \sin(3\omega t) + \cdots + I_{mn} \sin(n\,\omega t)$$

در این صورت مقدار جریان مؤثر برابر است با :

$$I_{eff} = \sqrt{I_{eff1}^2 + I_{eff2}^2 + I_{eff3}^2 + \cdots + I_{effn}^2}$$

که I_{eff1} مقدار موثر ناشی از هارمونیک i ام می باشد .

مثال ۱) اگر در یک باتری $V = k \quad (V)$ باشد , مطلوب است مقدار مؤثر آن :

حل)

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t)\, dt} = \sqrt{\int_0^T K^2\ dt}$$

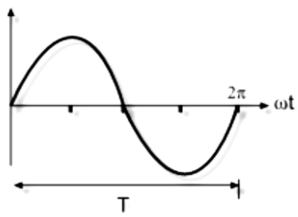
$$V_{eff} = k\sqrt{\frac{1}{T}\left(t\right)_0^T} = k\sqrt{\frac{1}{T}(T)} = k\sqrt{\frac{T}{T}}$$

$$V_{eff} = k\ \ (V)$$

نکته : در جریان متناوب , ولتمتر و آمپرمتر مقادیر مؤثر را نشان می دهند .

مثال ۲) مطلوب است مقدار مؤثر تابع شکل موج جریان زیر : $i(t)=I_m \sin\left(\omega t+\theta_i\right)$

حل) $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[I_m \sin\left(\omega t+\theta_i\right)^2\right]d\omega t}$



یادآوری :	$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

* چون حدود بر حسب ωt شد , پس تغییر متغییر $t \longrightarrow \omega t$ می دهیم تا کار راحتتر شود .

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2\left(\frac{1-\cos 2\left(\omega t+\theta\right)}{2}\right)d\omega t}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos s(\omega t+\theta)}{2}\right]d\omega t}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\left[\frac{\omega t}{2}-\frac{\sin 2(\omega t+\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{2}-0} = \frac{I_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \Rightarrow I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

نتیجه : اگر $i(t)=I_m \sin\left(\omega t+\theta_i\right)$ و یا $i(t)=I_m \cos\left(\omega t+\theta_i\right)$ باشد آنگاه :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,I_m}$$

مقدار متوسط :

مقدار متوسط یا میانگین جریان ، به مقدار بار الکتریکی منتقل شده به مدار در یک بازه زمانی گفته می شود .

برای تعیین مقدار متوسط (Average) از رابطهٔ زیر استفاده می شود که آن سطح زیر منحنی تابع مفروض در بازه زمانی مشخص است .

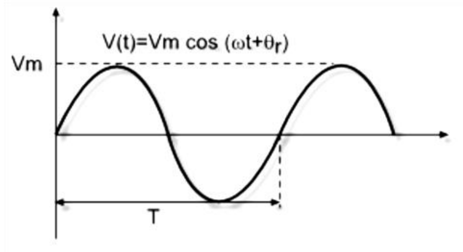
$$y_{ave} = \frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2} y(t)\,dt$$

معمولاً برای تعیین مقدار متوسط ولتاژ یا جریان متناوب آنرا در یک دورهٔ تناوب به دست می آورند , یعنی :

$$V_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt \qquad (V)$$

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \qquad (A)$$

مثال ۳) مطلوب است تعیین مقدار متوسط شکل موج زیر :



حل) $T=2\pi$ و به جای t تغییر متغییر به ωt می دهیم :

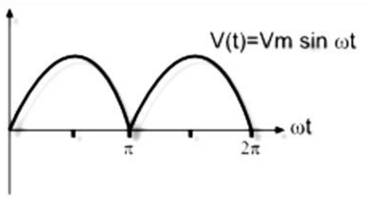
$$V_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_m\cos\left(\omega t+\theta_V\right)d\left(\omega t\right)$$

$$V_{av}=\frac{V_m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\omega t+\theta_V\right)d\left(\omega t\right)=\frac{V_m}{2\pi}\left[\sin\left(\omega t+\theta_V\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$V_{av}=\frac{V_m}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi+\theta_V\right)-\sin\left(0+\theta_V\right)\right]$$

$$V_{av}=\frac{V_m}{2\pi}\left[\sin\theta_V-\sin\theta_V\right]\Rightarrow V_{av}=0$$

مثال ۴) مطلوب است , تعیین مقدار متوسط شکل موج زیر :



$$V_{av}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_m\sin\left(\omega t\right)\cdot d\left(\omega t\right)=\frac{V_m}{\pi}\left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{V_m}{\pi}\left(-1-1\right)$$

$$V_{av}=\frac{2}{\pi}V_m \quad\Rightarrow\quad V_{av}=0.636\,V_m$$

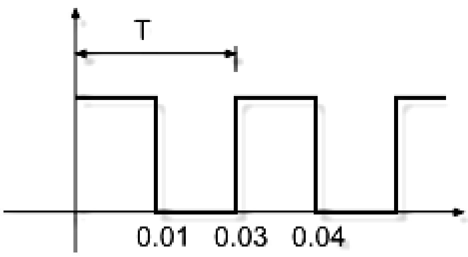
$$V_{eff}=\frac{1}{\sqrt{2}}V_m \quad\Rightarrow\quad V_{eff}=0.707\,V_m$$

ضریب هندسی :

ضریب هندسی یا ضریب شکل ، نسبت مقدار موثر به مقدار متوسط گفته می شود طبق رابطه ذیل :

$$F=\frac{\text{مقدار موثر}}{\text{مقدار متوسط}}=\frac{y_{eff}}{y_{av}}$$

مثال ۵)



$$y=\begin{cases}10 & 0<t<0.01(s)\\ 0 & 0.01<t<0.03(s)\end{cases}$$

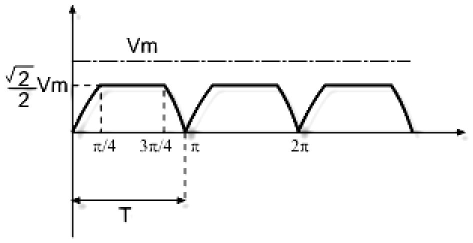
$$y_{av}=\frac{1}{0.03}\times 10\left[\,t\,\right]_0^{0.01}=\frac{10}{0.03}\left(0.01-0\right)=\frac{10}{3}=3.33$$

$$y_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y_{(t)}^2\,dt}=\sqrt{\frac{1}{0.03}\left[\int_0^{0.01}10^2\,dt+\int_{0.01}^{0.03}0\,dx\right]}$$

$$y_{rms}=\sqrt{\frac{1000}{0.03}\left[\left(t\right)_0^{0.01}+0\right]}=\sqrt{\frac{100}{0.03}\left(0.01-0\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{100}{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}=5.77\ \Rightarrow\ y_{rms}=5.77$$

مثال ۶) در شکل زیر مطلوب است تعیین مقدار مؤثر و متوسط :



$$V=\begin{cases}V=V_m\sin\omega t & 0<\omega t<\frac{\pi}{4}\\ V=V_m\sin\omega t & \frac{\pi}{4}<\omega t<\frac{3\pi}{4}\\ V=V_m\sin\omega t & \frac{3\pi}{4}<\omega t<\pi\end{cases}$$

$$V_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T V(t).dt$$

$$V_{av}=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}V_m\sin\omega t\,d\left(\omega t\right)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}V_m\,d\omega t+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}v_m\sin\omega t\cdot d\omega t\right]$$

$$V_{av}=\frac{V_m}{\pi}\left[-\cos\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\cos\omega t\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\right]$$

$$V_{av}=\frac{V_m}{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$V_{av}=0.54V_m$$

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_{(t)}^2\,dt}\ \Rightarrow V_{rms}^2=\frac{1}{T}\int_0^T V_{(t)}^2\,dt$$

$$V_{rms}^2=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}V_m^2\sin^2\left(\omega t\right)d\left(\omega t\right)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}V_m\right)^2d\omega t+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}V_m^2\sin^2\omega t\cdot d\omega t\right]$$

$$V_{rms}^2=\frac{V_m^2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\omega t\cdot d\omega t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}d\ \omega t+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin^2\omega t\cdot d\omega t\right]$$

$$\left(V_{rms}\right)^2=0.341V_{V_m}^2\quad\Rightarrow V_{rms}=0.58V_1$$

$$F=\frac{V_{rms}}{V_{av}}=\frac{0.58V_m}{0.54V_m}=0.98$$

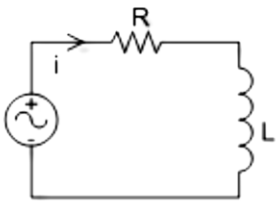
مفهومِ فیزور :

وقتی در یک فرکانس معینی , صحبت از یک ولتاژ یا جریان سینوسی می کنیم , برای مشخص کردن آن , به دو کمیتِ دامنه و زاویه دامنه و زاویهٔ فاز نیاز داریم . حال اگر بخواهیم این جریان و ولتاژ را به صورت کمیت مختلط نشان دهیم :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$
$$i(t) = I_m \, e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (L\,\omega)^2}}$$

* اگر I_m و φ , در یک فرکانس معین مشخص باشند , پس $i(t)$ مشخص است .

در شکل زیر KVL را می نویسیم :



Ve=Vm cos ωt

$$-V_e + V_R + V_L = 0 \Rightarrow -V_e + R\,i + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow R\,i + L\frac{di}{dt} = V_e$$

*چون :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I_m \, e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$V_e(t) = V_m \cos(\omega t) = V_m \, e^{j(\omega t)}$$

مقادیر $i(t)$ و $V(t)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل فوق قرار می دهیم :

$$R\left[I_m \, e^{j(\omega t + \varphi)}\right] + L\frac{d}{dt}\left[I_m \, e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = V_m \, e^{j(\omega t)}$$
$$R\,I_m \;{}^{j(\omega t + \varphi)} + I_m \, L \cdot (j\,\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = V_m \, e^{j(\omega t)}$$

$$R\,I_m \, e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} + I_m \cdot L \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} . e^{j\varphi} = V_m \, e^{j\omega t}$$
$$e^{j\omega t}\left[R + j\,L\,\omega\right] I_m \, e^{j\varphi} = V_m \, e^{j\omega t}$$
$$\Rightarrow \boxed{(R + jL\,\omega)\, I_m \, e^{j\varphi} = V_m}$$

پس :

$$\begin{cases} V(t) = V_m e^{j(\omega t + 0)} \\ i(t) = I_m \, e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

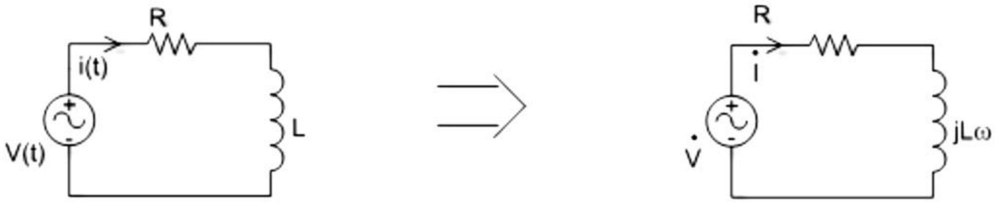
* یادآوری

$$V_e = V_m \, e^0 = V_m \angle 0 \longrightarrow \left(e^0 = 1\right)$$
$$\dot{I} = I_m \, e^{j\varphi} = I_m \angle \varphi$$

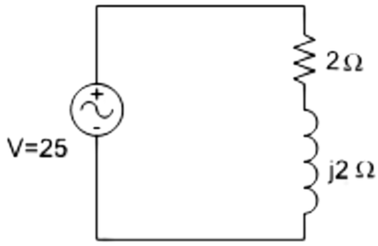
* برای نمایش کمیت های فیزوری که مقادیر مختلط اند , بالای کمیت فیزور از نقطه (دات) استفاده می کنیم .

نتیجهٔ : مداری که شرح آن گذشت را می توان از حوزهٔ زمان (t)به حوزهٔ فرکانس (ω) تبدیل نمود .

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \\ V(t) = V_m \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \dot{I} = I_m \angle \varphi \\ \dot{V} = V_m \angle 0 \end{array} \right.$$



مثال ۷) در مدار شکل زیر مطلوب است مقدار جریانِ مدار :

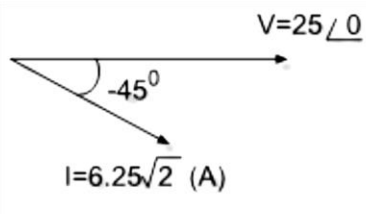


$$\dot{Z} = 2 + j2\ (\Omega)$$

$$\dot{Z} = \sqrt{2^2 + 2^2} \angle \tan^{-1}\frac{2}{2} = \sqrt{8} \angle \tan^{-1} 1 = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ\ (\Omega)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{25\angle 0}{2 + j2} = \frac{25\angle 0}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ}$$

$$\dot{I} = 6.25\sqrt{2} \angle -45^\circ \quad (A)$$



برای تبدیل $f(t)$ به $\dot{F}$ با تبدیل حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس به شرح زیر عمل می کنیم :

۱- کمیت $f(t)$ باید به صورت تابع کسینوسی باشد , پس اگر عبارت فوق سینوسی بود به طبق رابطه زیر به کسینوس تبدیل می کنیم.

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$$

۲- سعی می کنیم دامنهٔ حقیقی را در فاز دخالت دهیم :

مثال ۸)

$$V(t) = 100 \cos(400t - 30^\circ)$$

$$\dot{V} = 100 \angle -30^\circ$$

مثال ۹)

$$i(t) = 5 \sin(377t + 150^\circ)$$

$$i(t) = 5 \cos(377t + 150^\circ - 90^\circ)$$

$$\dot{I} = 5 \angle 60^\circ$$

برای تبدیل $\dot{F}$ به $F(t)$, یا تبدیل حوزهٔ فرکانس به حوزهٔ زمان به شرح زیر عمل می کنیم .

مثال ۱۰)

$$\dot{I} = 2\angle -30^\circ (A)$$
$$i(t) = 2\cos\left(\omega t - 30^\circ\right) \quad (A)$$

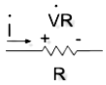
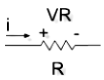
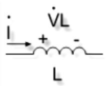
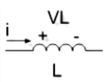
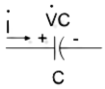
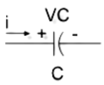
مثال ۱۱)

$$\dot{V} = \angle 100^\circ \quad (V)$$
$$\omega = 300$$
$$V(t) = \cos\left(300t + 100\right) \quad (V)$$

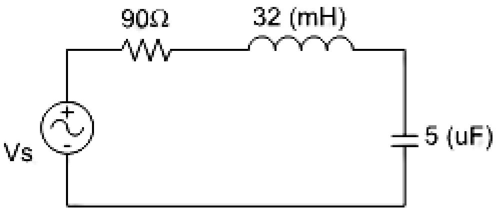
نکته : چون $\dot{Z}$ (امپدانس) از جنس مقاومت است بنابراین کلیهٔ قوانینی که بر مقاومت حاکم است , بر امپدانس نیز حکم فرماست . باید اشاره کرد که واحد کلیهٔ المانها در حوزهٔ فرکانس) Ω (, بوده و می توان آنها را مانند یک مقاومت معمولی در نظر گرفت , همچنین X_L راکتانس سلفی و X_C راکتانس خازنی می باشد .

* با توجه به مطالبی که گذشت , برای تحلیل مدارهای AC , می بایست ابتدا مدار را از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس تبدیل کرد و سپس یک مدار DC با توجّه به روشهای موجود آنرا تحلیل نمود . به عبارت دیگر کلیهٔ قوانینی که در DC بیان شد در AC , در حوزهٔ فرکانس نیز صادق است .

روابط فیزوری R و L و C :

فیزور (حوزهٔ فرکانس)		حوزهٔ زمان		عنصر	
$\dot{Z} = \dfrac{\dot{V}}{\dot{I}}$	$\dot{V} = R\,\dot{I}$		$V = R\,i$		مقاومت R
$\dot{X}_L = j\,L\,\omega$ $\dot{X}_L = j\,X_L$	$\dot{V} = \left(j\,\omega\,L\right)\dot{I}$		$V = L\,\dfrac{di}{dt}$		سلف L
$X_C = -j\,\dfrac{1}{\omega\,C}$ $X_C = -j\,X_C$	$\dot{V} = \dfrac{1}{j\,\omega\,C}\,\dot{I}$ $\dot{V} = -j\,\dfrac{1}{\omega\,C}\,\dot{I}$		$V = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$		خازن C

مثال ۱۲) در مدار شکل زیر جریان کلّ مدار $i(t)$ را به دست آورید .



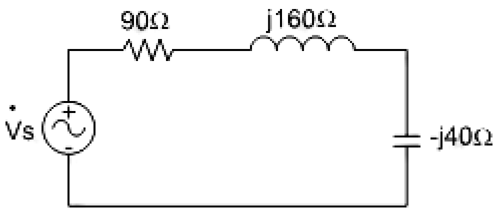
$$v_S(t) = 750\cos\left(5000\,t + 30°\right)$$

حل) مدار را به حوزهٔ فرکانس تبدیل می کنیم .

$$\dot{X}_L = j\,\omega\,L = j \times 5000 \times \left(32 \times 10^{-3}\right) = j160\ \ (\Omega)$$

$$\dot{X}_C = -j\,\frac{1}{\omega\,C} = -j \times \frac{1}{5000 \times 5 \times 10^{-6}} = -j40\ \ (\Omega)$$

$$\dot{V} = 750\angle 30°\ \ (V)$$

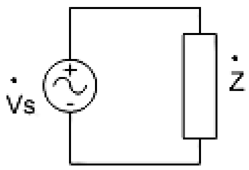


$$\dot{V}_S = 750\angle 30°$$

$$\dot{Z} = R + j\,X_L - j\,X_C$$

$$\dot{Z} = 90 + j160 - j40$$

$$\dot{Z} = 90 + j120 = 150\angle 53.13°$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{750\angle 30°}{150\angle 53.13°}$$

$$\dot{I} = 5\angle -23.13°\ \ (A)$$

$$i(t) = 5\cos\left(5000t - 23.13°\right)\ \ (A)$$

مثال ۱۳) نمودار فازور مطابق مقاومت ظاهری و ولتاژ و جریان زیر را رسم نمائید و سپس ثابت های مدار را تعیین کنید .

$$V(t) = 150\sin\left(5000\,t + 45°\right)$$

$$i(t) = 3\sin\left(5000\,t - 15°\right)$$

حل) در حالت کلّی $F(t) = F_m\cos\left(\omega\,t + \varphi\right)$ که مقدار F_m را مقدار ماکزیمم گویند . می دانیم که مقدار مؤثر برابر است با F_{eef} :

$$F_{eef} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = 0.707\ F_m$$

در مثال فوق :

$$V_m = 150 \Rightarrow V_{eef} = \frac{150}{\sqrt{2}} = 106\ (V)$$

$$I_m = 3 \quad \Rightarrow I_{eef} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12\ (A)$$

$$\begin{cases} \dot{V} = V_{eef} \angle \theta_r \\ \dot{I} = I_{eef} \angle \theta_r \end{cases}$$

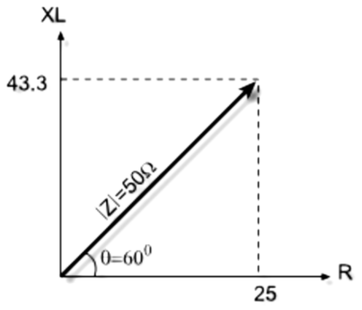
$$\dot{V} = 106\angle(45-90) = 106\angle -45°(V)$$

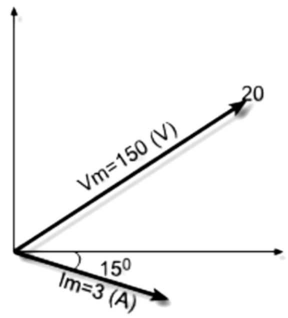
$$\dot{I} = 2.12\angle -105\ (A)$$

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_e}{\dot{I}_e} = \frac{106\angle -45°}{2.12\angle -105} = 50\angle 60° \Rightarrow \begin{cases} R = |Z| \cos\theta_Z = 50 \cos 60° = 25\ (\Omega) \\ X = |Z| \sin\theta_Z = 50 \sin 60° = 43.3\ (\Omega) \end{cases}$$

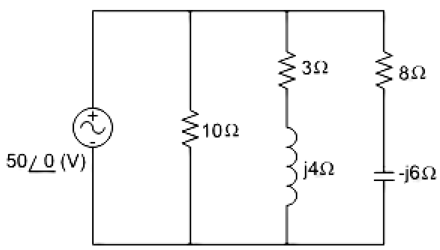
$$Z = 50\angle 60° = 25 + j43.3\ (\Omega)$$

$$X_L = 43.3 \Rightarrow L\,\omega = 43.3 \Rightarrow L = \frac{43.3}{5000} \Rightarrow L = 8.66\ (mH)$$





مثال ۱۴) جریان کل و مقاومت ظاهری معادل مدار موازی شکل زیر را پیدا کنید .



$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_T} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{8-j6}$$

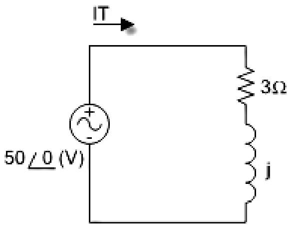
تذکر

$$\frac{1}{a+jb} \xrightarrow{\text{گویا مي کنیم}} \frac{1(a-jb)}{(a+jb)(a-jb)}$$

$$\frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{a^2-(jb)^2} = \boxed{\frac{a-jb}{a^2+b^2}}$$

ادامهٔ حل مسئله :

$$\frac{1}{Z_T}=0.1+\frac{3-j^4}{(3)^2+(4)^2}+\frac{8+j6}{(8)^2+(6)^2}$$
$$\frac{1}{Z_T}=0.1+\frac{3}{25}-j\frac{4}{25}+\frac{8}{100}+j\frac{6}{100}$$
$$\frac{1}{Z_T}=(0.1+0.12+0.08)+j(-0.16+0.06)$$
$$\frac{1}{Z_T}=0.3-j0.1$$
$$Z_T=\frac{1}{0.3-j0.1}=\frac{0.3+j0.1}{(0.3)^2+(0.1)^2}=\frac{0.3+j0.1}{0.09+0.01}=\frac{0.3+j0.1}{0.1}$$
$$Z_T=3+j=3.16\angle 18.45^\circ\ \ (\Omega)$$



$$I_T=\frac{V}{Z_T}=\frac{50\angle 0}{3.16\angle 18.45^\circ}$$
$$I_T=15.8\angle -18.45^\circ\ (A)$$

مثال ۱۵) مقدار جریان های حقیقی (واته) و غیر حقیقی (دواته) در مثال قبل را به دست آورید .

حل) جریان کل مدار $I_T=15.8\angle -18.45^\circ$ آمپر , کافی است به فرم دکارتی تبدیل شود .

$$I_T=15-j5$$
$$I_W=15(A)$$
$$I_d=-5(A)$$

نکته : در حالت کلّی :

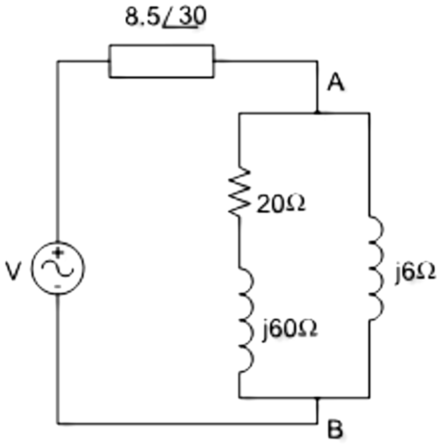
$$I=I_W+jI_d=I_T\angle\theta_i$$

$$Z=R+jX=Z\angle\theta_z$$
$$\theta_z=\theta_V-\theta_i$$

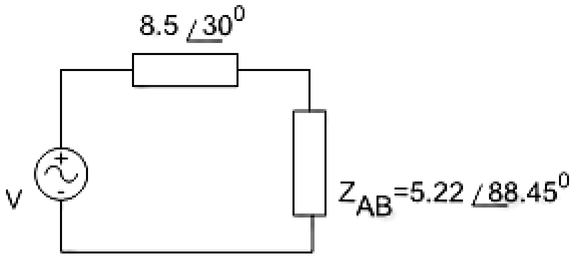
❋ اگر X و θ_z و $-I_d$ باشد , پس جریان پس فاز است . (سلفی)

❋ اگر $-X$ و $-\theta_z$ و I_d باشد , پس جریان پیش فاز است . (خازنی)

مثال ۱۶) در مدار شکل زیر مقدار مؤثر ولتاژ دو سر قسمت موازی (AB) , 50 ولت می باشد، مقدار ولتاژ موثر کل را محاسبه کنید .



$$Z_{AB} = \frac{Z_1\, Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j6)(20+j60)}{j6+(20+j60)}$$
$$Z_{AB} = 5.52\angle 88.45$$

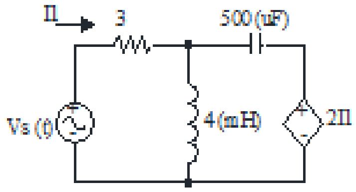


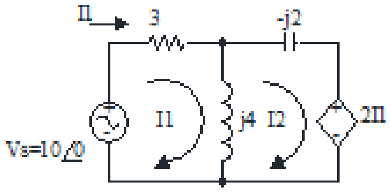
$$V_{AB} = \frac{Z_{AB}}{Z_3 + Z_{AB}} \cdot V \;\Rightarrow V = \frac{Z_3 + Z_{AB}}{Z_{AB}}\, V_{AB}$$
$$Z_{eq} = Z_3 + Z_{AB} = 8.5\angle 30° + 5.52\angle 88.45°$$
$$Z_{eq} = 7.5 + j9.77 = 12.3\angle 52.4° (\Omega)$$
$$V = \frac{12.3\angle 52.4°}{5.52\angle 88.45°} \times 50\angle 0 \;\Rightarrow V = 111.5\angle -36° \; (V)$$

روش حلقه در حوزه فرکانس :

مثال ۱۷) در مدار شکل زیر جریان $I_1(t)$ را به دست آورید ؟ اگر $V_s(t)=10\cos(1000t)$ باشد .

حل) : ابتدا مدار را به حوزه فرکانس برده ، پس از به دست آوردن جریان در انتها به حوزه زمان بر می گردانیم .





$$V_s(t)=10\cos(1000t)(V)$$
$$V_{s(\max)}=10\angle 0°(V)$$
$$\omega=1000\ (rad/s)$$
$$X_L=j\,L\,\omega=j\times 4\times 10^{-3}\times 1000$$
$$X_L=j4(\Omega)$$
$$X_C=-j\,\frac{1}{\omega C}=-j\,\frac{1}{1000\times 500\times 10^{-6}}$$
$$X_C=-j2(\Omega)$$

$$\begin{cases}-10+3I_1+j4\left(I_1-I_2\right)=0\\ 2I_1+j4\left(I_2-I_1\right)-j2\,I_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(3+j4)\,I_1-j4\,I_2=10\\ (2-j4)\,I_1+j2\,I_2=0\end{cases}\ 2$$

$$\begin{cases}(3+j4)\,I_1-j4\,I_2=10\\ (4-j8)\,I_1+j4\,I_2=0\end{cases}$$

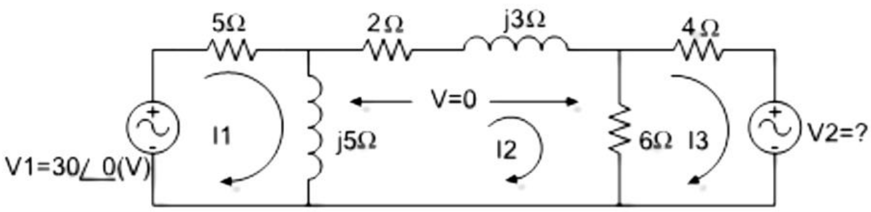
$$(7-j4)\,I_1=10\angle 0$$

$$I=\frac{10\angle 0}{(7-j4)}=\frac{10\angle 0}{8\angle -29.7}\ \Rightarrow I_1=1.25\angle 29.7°\ (A)$$

$$i_1(t)=I_m\cos\left(\omega\,t+\varphi\right)$$

$$i_1(t)=1.25\cos\left(1000\,t+29.7°\right)(A)$$

مثال ۱۸) در مدار شکل زیر V_2 را طوری تعیین کنید , که جریان در مقاومت ظاهری $Z=2+j3$ صفر باشد . (یعنی از امپدانس فوق جریانی عبور نکند .)



$$\begin{cases} -30+(5+j5)\,I_1 - j5\,I_2 = 0 \\ -j5\,I_1 + (8+j8)\,I_2 - 6I_3 = 0 \\ V_2 + 10I_3 - 6I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5+j5)\,I_1 - j5\,I_2 + 0 = 30 \\ -j5\,I_1 + (8+j8)\,I_2 - 6\,I_3 = 0 \\ 0 - 6I_2 + 10I_3 = -V_2 \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta I_2 = 0$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0 & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -V_2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta I_2 = (5+j5)(0-6V_2) - 30\angle 0\,(-j5\times 10+0)+0$$

$$\Delta I_2 = -(30+j30)\,V_2 + j1500 = 0$$

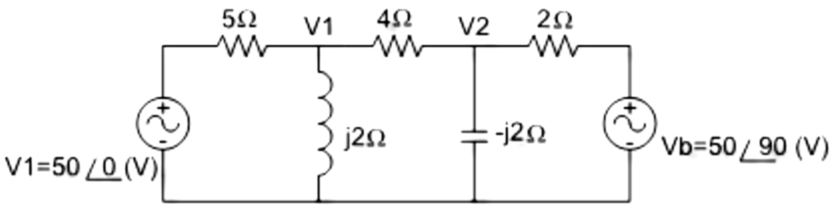
$$V_2 = \frac{j1500}{30+j30} = \frac{1500\angle 90^\circ}{30\sqrt{2}\angle 45^\circ}$$

$$V_2 = 25\sqrt{2}\angle 45^\circ (V)$$

فرض $I_2 = 0$

روش پتانسیل گره در حوزه فرکانس:

مثال ۱۹) در شکل زیر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 4 اهمی را از روش پتانسیل گره به دست آورید .



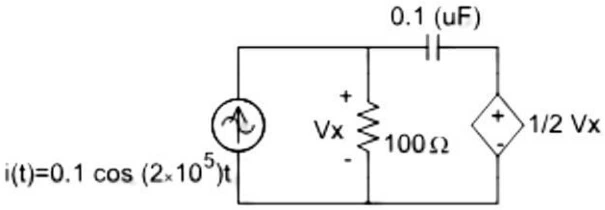
$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - 50\angle 0}{5} + \dfrac{V_1 - V_2}{4} + \dfrac{V_1}{j2} = 0 \\ \dfrac{V_2 - 50\angle 90}{2} + \dfrac{V_2}{-j2} + \dfrac{V_2 - V_1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2\,(V_1 - 50) + 0.25\,(V_1 - V_2) - 0.5J\,V_1 = 0 \\ 0.5\,(V_2 - j50) + 0.5\,V_2 + 0.25\,(V_2 - V_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.2\,V_1 - 10 + 0.25V_1 - 0.25V_2 - 0.5\,j\,V_1 = 0 \\ 0.5\,V_2 - j25 + 0.5\,j\,V_2 + 0.25\,V_2 - 0.25\,V_1 = 0 \end{cases}$$

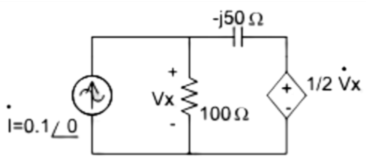
$$\begin{cases} V_1 = 24.7\angle 72.25^\circ\ (V) \\ V_2 = 33.6\angle 53.75^\circ\ (V) \end{cases}$$

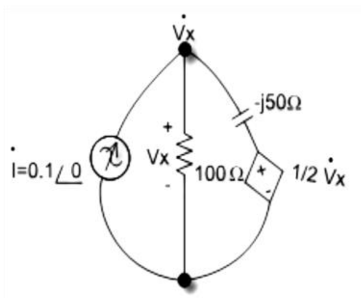
$$\Delta V_{4\Omega} = V_2 - V_1 = 33.6\angle 53.75\,° - 24.7\angle 72.25°$$
$$\Delta V_{4\Omega} = (19.87 + j27) - (7.53 + j23.5)$$
$$\Delta V_{4\Omega} = 12.34 + j3.5 = 12.83\angle 15.84°\ (V)$$

مثال ۲۰) در مدار زیر $V_x(t)$ را پیدا کنید .



حل) مقادیر را به حوزهٔ فرکانس تبدیل می کنیم و با استفاده از تحلیل گره :





$$-0.1 + \frac{\dot{V}_x}{100} + \frac{\dot{V}_x - \frac{1}{2}\dot{V}_x}{-j50} = 0$$
$$\dot{V}_x = 5\sqrt{2}\angle -45° \quad (V)$$
$$v_x(t) = 5\sqrt{2}\,\cos\left(2\times 10^5 t - 45°\right) \quad (V)$$

معادل تونن و نورتن در محدودهٔ فرکانس :

در اینجا مانند مدارات DC عمل می کنیم , ولی به جای تعیین R_{th} , Z_{th} را تعیین می کنیم .

خلاصهٔ اعمالی که در تبدیل تونن و نورتن باید انجام دهیم , عبارتند از :

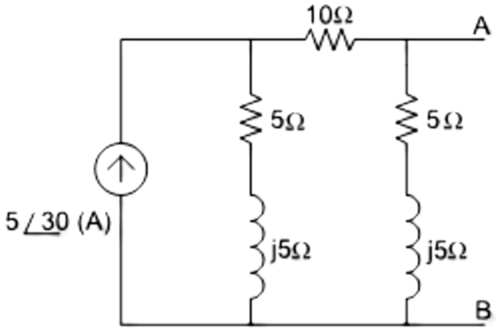
۱- مقادیر تمام عناصر در محدودهٔ فرکانس جداگانه محاسبه و مقدار منابع به صورت فیزور نوشته شود .

۲- رسم مجدد مدار در محدودهٔ فرکانس .

۳- اِعمال قوانین و قواعد خوانده شده به مدار .

۴- در صورتی که مسئله خواسته باشد که یک پارامتری در محدودهٔ زمان باشد باید در انتهای مسئله از حالت فیزور به محدودهٔ زمان تبدیل کنیم ولی اگر نخواسته بود در همان حالت فیزور رها می کنیم .

مثال ۲۱) مطلوب است تعیین معادل تونن مدار شکل زیر از دو سر AB .

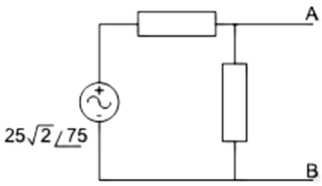


۱- منابع را بی اثر می کنیم .

$$Z_T = \frac{Z_1\,Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(15+j5)(5+j5)}{(15+j5)+(5+j5)} = \frac{50+j100}{20+j10}$$
$$Z_T = 4 + j3 = 5\angle 36.87^\circ \quad (\Omega)$$

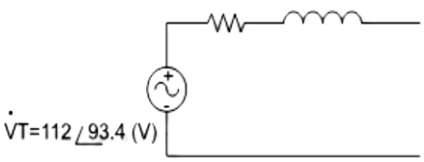
۲- برای تعیین V_{oc} می دانیم : $V_{oc} = V_{AB} = V_{5+j5}$

از تبدیل منبع جریان به ولتاژ : $V = (5\angle 30)(5+j5) = 25\sqrt{2}\angle 75^\circ \quad (V)$

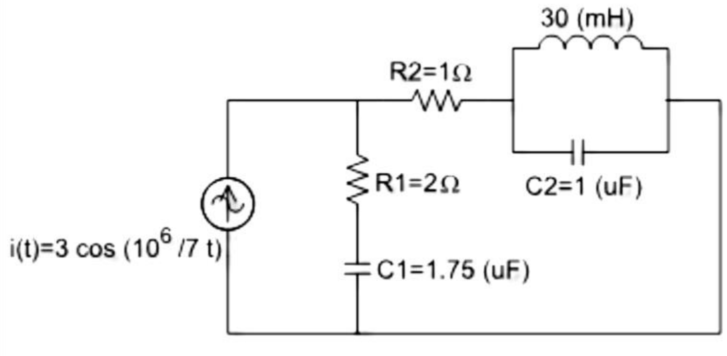


از تقسیم ولتاژ :

$$\dot{V}_T = \frac{5+j5}{(5+j5)+(15+j5)} \times 25\sqrt{2}\angle 75^\circ$$
$$\dot{V} = 112\angle 93.4^\circ \quad (V)$$



مثال ۲۲) مطلوب است تعیین معادل نورتن مداری که از دو سر خازن C_2 دیده می شود .

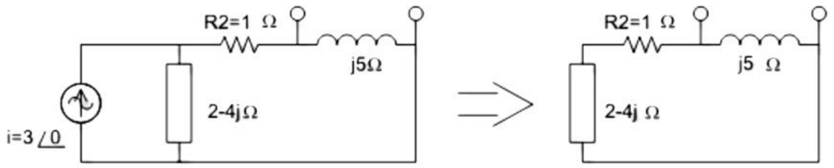


حل) تمام منابع اکتیو مستقل را غیر فعال می کنیم و مقاومت ظاهری مدار را از دیدگاه خازن C_2 به دست می آوریم .

$$X_L = L\,\omega = 35\times10^{-6}\times\frac{10^6}{7} = 5(\Omega)$$

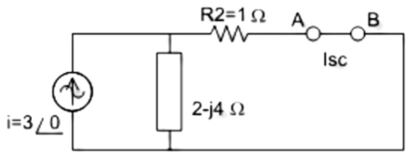
$$X_{C1} = \frac{1}{C\,\omega} = \frac{1}{\left(\frac{10^6}{7}\right)\times1.75\times10^6} = 4(\Omega)$$

$$Z_1 = 2-4j(\Omega)$$



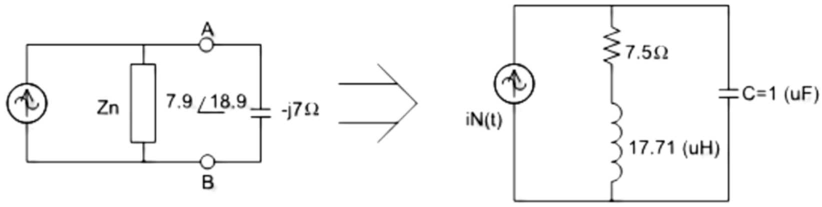
$$Z_T = \frac{(3-j4)(j5)}{(3-j4)+j5} \Rightarrow Z_T = 7.5+j2.53 = 7.9\angle18.9^\circ \quad (\Omega)$$

تعیین جریان اتّصال کوتاه دو سر AB :



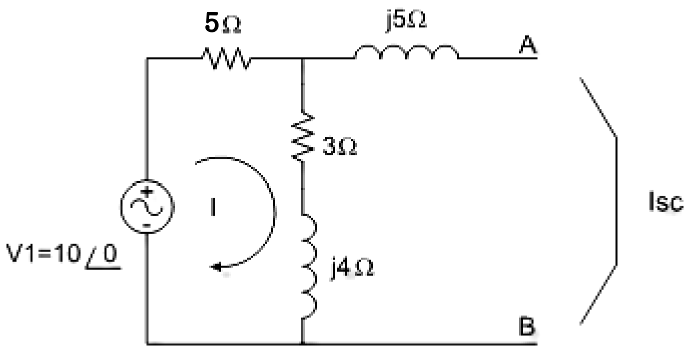
از روش تقسیم جریان استفاده می کنیم .

$$I_{sc} = \frac{2-j4}{3-j4}\times3\angle0 \Rightarrow I_{sc} = 2.63\angle-10.5^\circ \quad (A)$$



$$i_N(t) = 2.63 \cos\left(\left(\frac{10^6}{7}\right)(t) - 10.5°\right) \quad (A)$$

مثال ۲۳) مدار معادل تونن و نورتن شکل زیر را به دست آورید .

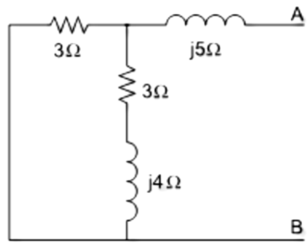


حل) برای معادل تونن ، ولتاژ شاخه وسط برابر ولتاژ بی باری خروجی است . پس با KCL جریان و سپس ولتاژش را به دست میآوریم

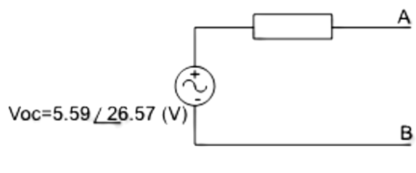
$$5i + 3i + j4\,i = 10\angle 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{10\angle 0}{8 + j4} = 1.118\angle -26.56 \quad (A)$$

$$V_{oc} = V_{AB} = I \cdot Z = (1.118\angle -26.56)(3 + j4) \quad \Rightarrow \quad V_{oc} = 5.59\angle 26.57° \ (V)$$

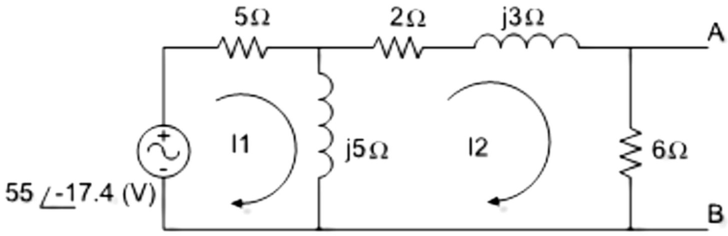
$$Z_{AB} = \frac{5\,(3 + j4)}{5 + (3 + j4)} + j5 = 2.5 + j6.25 \qquad \Rightarrow \quad Z_{AB} = 6.73\angle 68.19° \ (\Omega)$$



$$Z_T = \frac{(3 + j4)(j5)}{(3 + j4) + (j5)} + 5 = 5.83 + j2.5 = 6.35\angle 23.2 \ (\Omega)$$
$$I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{10\angle 0}{6.35\angle 23.2} = 1.575\angle -23.2 \ (A)$$
$$I_{SC} = \frac{(1.575\angle -23.2)(3 + j4)}{(3 + j4) + (j5)} \Rightarrow I_{SC} = 0.83\angle -41.65° \ (A)$$



مثال ۲۴) مدار معادل تونن و نورتن شکل زیر را به دست آورید .



حل) معادل تونن :

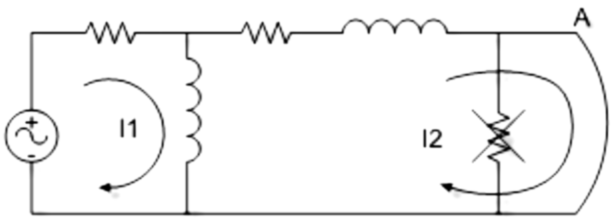
$$\begin{cases} 5I_1 + j5(I_1 - I_2) = 55\angle -17.4 \\ 6I_2 + (2+j3)\, I_2 + j5\,(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5+j5)\, I_1 - j5\, I_2 = 55\angle -17.4 \\ -j5\, I_1 + (8+j8)\, I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = 3.33\angle 0 \;\Rightarrow V_{OC} = V_{AB} = I_2 \cdot 6 \;\Rightarrow V_{OC} = 20\angle 0$$

$$Z_{AB} = \frac{\left\{ \left[\dfrac{(5)(j5)}{(5)+(j5)} \right] + [2+j3] \right\} \times 6}{\left[\dfrac{(5)(j5)}{(5)+(j5)} \right] + [2+j3] + 6} \;\Rightarrow Z_{AB} = 3.31 + j1.41 \quad (\Omega)$$

معادل نورتن :



مقدار امپدانس را قبلاً به دست آوردیم ، در اینجا فقط جریان اتصال کوتاه را به دست می آوریم :

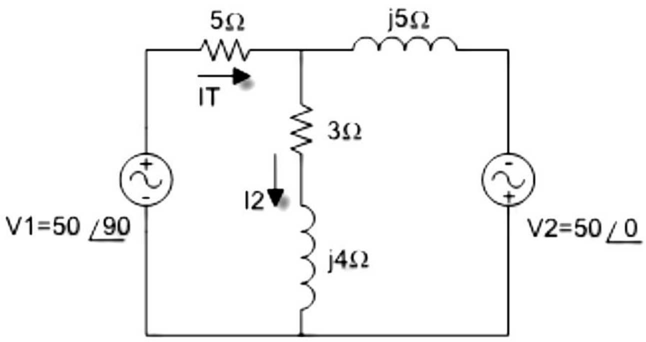
$$\begin{cases} 5I_1 + j5\,(I_1 - I_2) = 55.8\angle -17.4 \\ 2I_2 + j3\, I_2 + j5\,(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

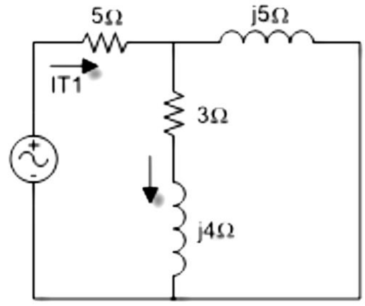
$$\begin{cases} I\,(5+j5) - j5\, I_2 = 55.81 \\ -j5\, I_1 + (2+j8)\, I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_{SC} = I_2 = 5.58\angle -23.14°(A)$$

جمع آثار در حوزه فرکانس :

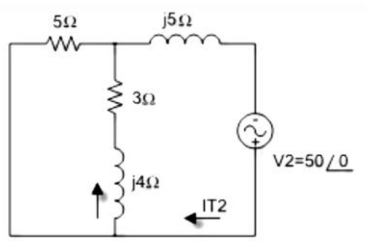
مثال ۲۵) با استفاده از قانون جمع آثار جریان را در مقاومت ظاهری $3 + j4$ به دست آورید .





$$Z_{T1} = \frac{(j5)(3+j4)}{(j5)+(3+j4)} + 5$$
$$Z_{T1} = 5.83 + j2.5 = 6.35\angle 23.2\ (\Omega)$$
$$I_{T1} = \frac{V_1}{Z_{T1}} = \frac{50\angle 90}{5.83+j2.5} = \frac{50\angle 90}{6.35\angle 23.2}$$
$$I_{T1} = 7.87\angle 66.8\ (A)$$
$$I_1 = \frac{(7.87\angle 66.8)(j5)}{(3+j4)+(j5)}$$
$$I_1 = 4.15\angle 85.3^\circ\ (A)$$

از راه توزیع جریان



$$Z_{T2} = \frac{(5)(3+j4)}{(5)+(3+j4)} + j5$$
$$Z_{T2} = 2.5 + j6.25 = 6.74\angle 68.2^\circ\ (\Omega)$$
$$I_{T2} = \frac{50\angle 0}{6.74\angle 68.2} = 7.42\angle -68.2^\circ\ (A)$$
$$I_2 = \frac{5}{3+j4+5} \times 7.42\angle -68.2 = 4.14\angle -94.76^\circ\ (\Omega)$$
$$I = I_1 - I_2 = 4.15\angle 85.3 - 4.14\angle -94.76$$
$$I = 8.29\angle 85.27\ (A)$$

فصل هشتم

تحلیل توانی مدارهای AC

قدرت لحظه ای :

$$P(t)=V(t)\cdot i(t)\quad \begin{cases} V(t)=V_m\ \cos\left(\omega\, t+\theta_v\right) \\ i(t)=I_m\ \cos\left(\omega\, t+\theta_i\right) \end{cases}$$

$$P(t)=V_m\ \cos\left(\omega\, t+\theta_v\right)\cdot I_m\ \cos\left(\omega\, t+\theta_i\right)$$

❋ یاد آوری :

$$\cos\, x\cos\, y=\frac{1}{2}\left[\ \cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right]$$

❋ در اینجا :

$$\cos\left(\omega\, t+\theta_v\right)\cdot\cos\left(\omega\, t+\theta_i\right)=\frac{1}{2}\left[\ \cos\left(2\omega\, t+\theta_v+\theta_i\right)+\cos(\theta_v+\theta)\ \right]$$

$$P(t)=\frac{V_m\ I_m}{2}\left[\ \cos\left(2\omega\, t+\theta_v+\theta_i\right)+\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)\ \right]$$

R براي $\longrightarrow\ P(t)=R\, i^2(t)=\dfrac{V^2(t)}{R}$

L براي $\longrightarrow\ P(t)=V(t)\cdot i(t)=L\, i\,\dfrac{di}{dt}=\frac{1}{L}\, V\int_0^t V\, dt$

C براي $\longrightarrow\ P(t)=V(t)\cdot i(t)=C\, V\,\dfrac{dV}{dt}=\frac{1}{C}\, i\int_0^t i\, dt$

قدرت متوسط :

$$P\ \overset{\text{طبق تعریف}}{\underset{=}{\Delta}}\ \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}P\ (t)\, dt$$

$$\left.\begin{aligned} V(t)&=V_m\ \cos\left(\omega\, t+\varphi\right) \\ i(t)&=I_m\ \cos\left(\omega\, t+\alpha-\theta\right) \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} \alpha&=\theta_v \\ \alpha-\theta&=\theta_i \end{aligned}$$

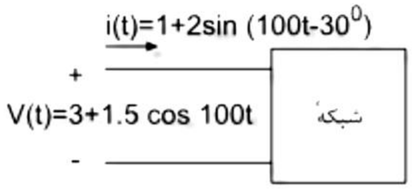
$$P_{av}=\frac{V_m\ I_m}{2}\cos\varphi$$

❋نکته : اگر جریان از مجموع چند جریان با فرکانس های مختلف باشد :

$$i(t)=I_{m1}\ \cos\,\omega_1\ t+I_{m2}\cos\,\omega_2\ t+\cdots+I_{mn}\ \cos\,\omega_n\ t$$

$$P_{av}=\frac{1}{2}\left(I_{m1}^2+I_{m2}^2+I_{m3}^2+\cdots+I_{mn}^2\right)\cdot R$$

مثال ۱) قدرت تحویل شده به شبکهٔ زیر را به دست آورید :



$$P(t)=V(t)\cdot i(t)=\left[3+1.5\cos 100\,t\right]\left[1+2\sin\left(100\,t-30°\right)\right]$$
$$P(t)=3+1.5\cos 100\,t+6\sin\left(100t-30°\right)+3\sin\left(100\,t-30°\right)\cos 100\,t$$
$$2\sin A\cos B=\sin\left(A+B\right)+\sin\left(A-B\right)$$
$$P(t)=3+1.5\cos 100\,t+6\sin\left(100t-30°\right)+\frac{3}{2}\left[\sin\left(200\,t-30°\right)+\sin\left(-30°\right)\right]$$
$$P(t)=3+1.5\cos 100\,t+6\sin\left(100\,t-30°\right)+\frac{3}{2}\left[\sin\left(200\,t-30°\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$P(t)=2.25+1.5\cos 100\,t+6\sin\left(100\,t-30°\right)+\frac{3}{2}\sin\left(200\,t-30°\right)=P_{dc}+P_{ac}$$

$$P_{av}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2.25+1.5\cos 100t+6\sin\left(100t-30°\right)+\frac{3}{2}\sin\left(200t-30°\right)\right]dt\right\}$$
$$P_{av}=2.25+\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1.5\cos 100t+6\sin\left(100t-30°\right)+\frac{3}{2}\sin\left(200t-30°\right)\right]dt\right\}$$
$$P_{av}=2.25+\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1.5\cos 100t\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}6\sin\left(100t-30°\right)dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\sin\left(200t-30°\right)dt\right\}$$
$$P_{av}=2.25\ \ (w)$$

نکته : انتگرال مقدار متوسط در یک دوره تناوب صفر است .

قدرت ظاهری :

$$P_{av}=\frac{1}{2}V_m\ I_m\ \cos\left(\alpha-\beta\right)$$
$$P_{av}=V_e\ I_e\ \cos\theta$$

اگر V و L مقادیر dc و یا همفاز باشند :

$$\cos\theta=1$$
$$P_{av}=V_e\cdot I_e$$

که در حقیقت رابطهٔ فوق توان ظاهری می باشد نه مصرفی که آنرا با S نمایش می دهیم و واحد آن ولت آمپر $(V.A)$ است .

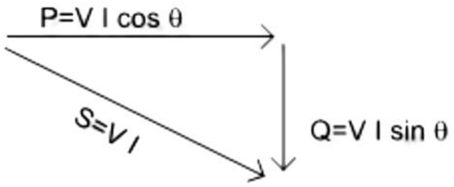
$$S=V_e\cdot I_e$$

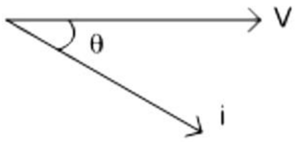
ضریب قدرت : Power Factor

نسبت توان حقیقی به ظاهری را ضریب قدرت گویند .

$$P\cdot F=\frac{P_{av}}{S}$$
$$S=V_e\cdot I_e$$
$$P_{av}=V_e\cdot I_e\cdot\cos\theta$$
$$P_{av}=S\cdot\cos\theta\ \Rightarrow\boxed{\cos\theta=\frac{P_{av}}{S}}$$
$$P\cdot F=\frac{P_{av}}{S}=\cos\theta$$

θ:زاویهٔ پیش افتادگی V نسبت به i است :





Q:توان راکتیو یا کور می باشد که در واقع مصرف نمی شود بلکه در شبکه سر گردان است و باعث کاهش کارآیی شبکه می شود .

$P\,F=1\Rightarrow$ $\theta=0$ * بار اهمي خالص

$P\,F=0\Rightarrow$ $\theta=+90$ * بار سلفي خالص ضریب قدرت پس فاز (Lead)

$\theta=-90$ * بار خازني خالص ضریب قدرت پیش فاز (Lag)

پس $0\le P\cdot F\le 1$ می باشد . یعنی در شبکه های عملی ضریب قدرت بین 1 و 0 قرار دارند .

نتیجه :

وقتی از اصطلاحات پس فاز یا پیش فاز صحبت شود , در واقع از عقب افتادگی یا پیش افتادگی i نسبت به V صحبت می شود .

نکته : از آن جا که $\theta=(\theta_v-\theta_i)$ می باشد پس :

در ضریب قدرت تاخیری یا پس فاز، بار سلفی است که $\theta>0$ و $Q>0$ است.

در ضریب قدرت تقدمی یا پیش فاز، بار خازنی است که $\theta<0$ و $Q<0$ است.

قدرت مختلط : Complex Power

اگر جریانی که از بار می گذرد $\dot{I}_e = I_e\angle\theta_i$ و ولتاژی که به بار می دهیم $\dot{V}_e = V_e\angle\theta_v$ باشند ، در این صورت قدرت مختلط به صورت زیر تعریف می شود :

$$\dot{P} = \dot{V}_e\ \dot{I}_e^* \longrightarrow \text{(مزدوج)}$$

$$\dot{P} = P_a + jQ$$

$\dot{P}$: قدرت مختلط (V.A)

$\left|\dot{P}\right| = S$: قدرت ظاهری (V.A)

P_a : قدرت حقیقی (اکتیو) (W)

Q : قدرت غیر واقعی (راکتیو) (V.A.R)

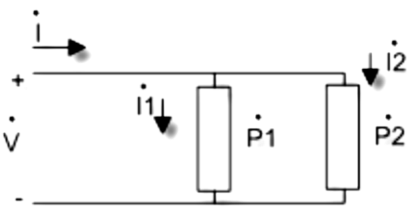
$$\left|\dot{P}\right| = S = \sqrt{P_a^2 + Q^2} = V_e \cdot I_e$$

$$\dot{P} = P_a + jQ = S\angle\theta$$

$$\theta = \theta_v - \theta_i = \cos^{-1}\left(P \cdot F\right)$$

قدرت مختلط چند بار :

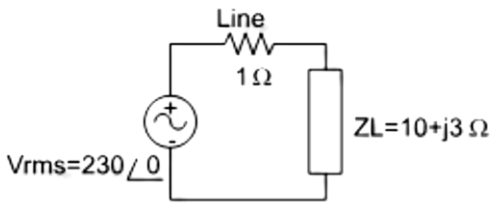
اگر چند مصرف کننده را به هم اتصال دهیم در این صورت قدرت مختلط کل برابر با مجموع هر یک از قدرت ها می باشد .



$$\dot{P} = \sum_{j=1}^{n}\dot{P}_j = \dot{P}_1 + \dot{P}_2 + \dot{P}_3 + \cdots + \dot{P}_n$$

$$\dot{V}\ \dot{I}^* = \sum_{j=1}^{n}\dot{V}_j\ \dot{I}_j^* = \dot{V}_1\ \dot{I}_1^* + \dot{V}_2\ \dot{I}_2^* + \dot{V}_3\ \dot{I}_3^* + \cdots + \dot{V}_n\ \dot{I}_n^*$$

مثال ۲) در مدار زیر اگر $Z_L = 10 + j3(\Omega)$ باشد , مقادیر زیر را حساب کنید



الف) قدرت متوسط تحویل داده شده به بار

ب) قدرت متوسط جذب شده توسط خط

ج) قدرت ظاهری تأمین شده توسط مدار

د) ضریب قدرت بار

ه) ضریب قدرت منبع

P_a بار $= I_e^2\ R = (20.173)^2 \times 10 = 4070(w)$

P_a ظاهري $= I_e^2\ r = (20.173)^2 \times 1 = 407(w$

$S = V_e\ I_e = 230 \times 20.173 = 4640.25(V.A)$

$P \cdot F$ بار $= \dfrac{P_a \text{ بار}}{S \text{ بار}}$

$\dot{S}$ بار $= V_e$ بار $\cdot I_e^*$ بار

$\dot{V}_e$ بار $= \dot{I}_e \cdot \dot{Z}_L = 20.173\angle -15.25 \times (10 + j3)$

$\dot{V}_e$ بار $= 210.63\angle 1.45°(V)$

$\dot{S}$ بار $= 210.63\angle 1.45° \times 20.173\angle 15.25 = 4249.5\angle 16.7$

S بار $= 4249.5(V.A)$

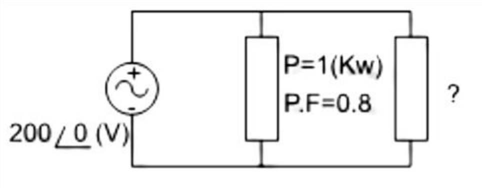
$P \cdot F = \cos 16.7° = 0.958$ پس فاز

روش دیگر $P \cdot F = \dfrac{4070}{4249.5} = 09.958$ پس فاز

$P \cdot F$ (منبع کل $= \dfrac{P \text{ منبع}}{S \text{ منبع}} = \dfrac{P_a \text{ منبع} + P_a \text{ خط}}{S \text{ منبع}} = \dfrac{4070 + 407}{230 \times 20.173}$

$P \cdot F$ منبع $= 0.965$ پس فاز

مثال ۳) مشترکی دارای موتور القائی با قدرت 1 کیلو وات با $P \cdot F$ برابر 0.8 پس فاز , $P \cdot F$ را به 0.95 برساند , چه باری باید با موتور موازی ببندند . اگر ولتاژ 200 ولت باشد ؟ بار را حساب کنید ؟



$\dot{P}_1 = V_e\ \dot{I}_e \angle(\theta v - \theta i) = |S| \angle \theta$

$\dot{P} = \dfrac{P_a}{P \cdot F} \angle \cos^{-1}(P \cdot F)$

$\dot{P}_1 = \dfrac{1000}{0.8} \angle \cos^{-1} 0.8 = 1250\angle 37°\ \ (VA) \quad \Rightarrow \quad \dot{P}_1 = 1000 + j750\ \ (V.A)$

در حالت نهایی $P = 1KW$ و $P\,F = 0.95$ سپس :

$$\dot{P} = \frac{1000}{0.95}\angle\cos^{-1} 0.95 = 1052.6\angle 18.2^\circ \quad (V.A)$$

$$\dot{P} = 1000 + j329 \quad (V.A)$$

$$P_2 = (1000 + j329) - (1000 + j750)$$

$$P_2 = -421j = 421\angle -90^\circ \ (VA)$$

چون $P_2 = -Q\,j$ می باشد ، به علت علامت منفی Q پس بار اضافه شده خازن است که مقدار راکتیو آن برابر است :

$$Q = 421\,(VAR)$$

$$P_2 = \dot{V}_e\,\dot{I}_e^* \Rightarrow \dot{I}_e^* = \frac{-421j}{200\angle 0} = -j2.105 \quad (A)$$

$$\dot{I}_e = j2.105 = 2.105\angle 90^\circ \quad (A)$$

$$\dot{Z}_e^* = \frac{\dot{V}_e}{\dot{I}_e} = \frac{200\angle 0}{2.105\angle 90^\circ} = -j95 \quad (\Omega)$$

$$X_C = 95\,(\Omega)$$

اگر $F = 50(HZ)$:

$$\dot{X}_C = \frac{-j}{2\pi\,F\,C} \Rightarrow -j95 = \frac{-j}{2\pi \times 50C}$$

$$C = 33.5(\mu F)$$

مشخصات خازن
$$\left\|\begin{array}{l} Q = 421\ (VAR) \\ V = 200\ (V) \\ C = 33.5(\mu F) \end{array}\right.$$

نکته : از مثال فوق نتیجه می شود :

۱- کارآیی شبکه بهبود پیدا کرد , یعنی قبلاً تأسیساتِ ملزوم , بر اساس 1250 ولت آمپر نصب گردیده , امّا با اصلاح ضریب قدرت , نیاز به 1052.6 ولت آمپر تأسیسات نیاز است (کابل ها , کلیدها , ترانس شبکه ,...)

۲- مقدار قدرت مصرفی) P_a (ثابت می ماند , یعنی با اصلاح ضریب قدرت توان اکتیو مصرف نمی شود و هزینه های مصرفی را در پی نخواهد داشت .

۳- با اصلاح ضریب قدرت , توان راکتیو کاهش یافت , اداره ی برق بابت توان راکتیو اگر ضریب قدرت کمتر از 0.95 باشد وجه دریافت می دارد . که با اصلاح ضریب قدرت این مبلغ قابل صرفه جویی است .

$$\dot{P} = \dot{P}_1 + \dot{P}_2 \Rightarrow \dot{P}_2 = \dot{P} - \dot{P}_1$$

مثال ۴) در مثال قبل اگر ضریب قدرت به 1 برسد , مسئله را تکرار کنید ؟

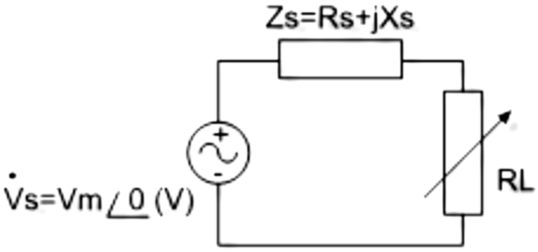
$$\dot{P} = \frac{1000}{1}\angle\cos^{-1} 1 = 1000\angle 0 \quad (V.A)$$

$$\dot{P}_2 = \dot{P} - \dot{P}_1 = 1000 - (1000 + j750) \Rightarrow P_2 = -750 \quad (V.A)$$

$$Q = 750 \quad (VAR)$$

قضیهٔ انتقال قدرت ماکزیمم (MPTL) :

حالت اول :



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{(R_S + R_L) + jX_S}$$

$$I_m = \left|\dot{I}\right| = \frac{V_m}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + X_S^2}}$$

$$P_a = \frac{1}{2} R_L \ I_m^2 = \frac{1}{2} \times \frac{R_L \ V_m^2}{(R_S + R_L)^2 + X_S^2}$$

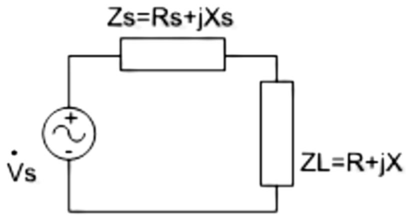
یک ماکزیمم وجود دارد که با مشتق گیری $\frac{dP_a}{dR_L} = 0$ به دست می آید . یعنی مشتق P_a بر حسب R_L را به دست می آوریم . مشتق را برابر صفر گرفته مقدار مقاومت معادل بار را در این حالت به دست می آوریم .

$$R_L = \left|\dot{Z}_S\right| = \sqrt{R_2^2 + X_S^2}$$

در اینصورت :

$$\boxed{P_{a(\max)} = \frac{1}{4} \frac{V_m^2}{R_L + R_S} = \frac{1}{2} \frac{V_e^2}{R_L + R_S}}$$

حالت دوّم :



$$I_m = \left|\dot{I}\right| = \frac{V_m}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}}$$

$$P_a = \frac{1}{2} R_L \ I_m^2 = \frac{1}{2} \times \frac{R_L \ V_m^2}{(R_S + R)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

$$\frac{dP_a}{dR_L} = 0$$

$$\dot{Z}_L = \dot{Z}_S^* \Rightarrow R + jX = R_S - jX_S$$

$$\begin{cases} R = R_S \\ jX = -jX_S \end{cases}$$

Z_T امپدانس کل مدار :

$$\dot{Z}_T = \dot{Z}_S + \dot{Z}_L$$

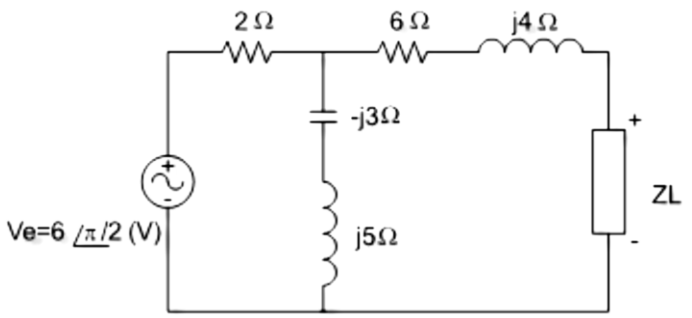
$$\dot{Z}_T = (R_S + \cancel{jX_S}) + (R_S - \cancel{jX_S})$$

$$\dot{Z}_T = 2R_S = 2R$$

در این صورت :

$$\boxed{P_{a(\max)} = \frac{1}{8}\frac{V_m^2}{R_L} = \frac{1}{4}\frac{V_e^2}{R_L}}$$

مثال ۵) Z_L را طوری تعیین کنید که توان مصرف شده در آن ماکزیمم باشد و سپس توان ماکزیمم را تعیین کنید .



حل) معادل تونن مدار را به دست می آوریم .

$$Z_S = \left[\, 2 \,||\, (j5 - j3) \,\right] + (6 + j4)$$

$$Z_S = \frac{2 \times j2}{2 + j2} + 6 + j4 = \left(\frac{j4}{j4 + j2} \times \frac{2 - j2}{2 - j2} \right) + (6 + j4)$$

$$Z_S = \underbrace{\frac{8 + j8}{8}}_{1 + j} + 6 + j4 \Rightarrow Z_S = 7 + j5(\Omega)$$

$$V_{OC} = V_{(j5 - j3)} = \frac{j2}{2 + j2} \times 6\angle 90^\circ = \frac{2\angle 90}{2\sqrt{2}\angle 45} \times 6\angle 90^\circ$$

$$V_{OC} = \underbrace{3\sqrt{2}}_{V_e}\angle 135^\circ (V)$$

شرط $MPTL$:

$$Z_L = Z_S^*$$

$$Z_L = 7 - j5(\Omega)$$

$$P_{a(\max)} = \frac{1}{4} \times \frac{V_e^2}{R} = \frac{1}{4} \times \frac{(3\sqrt{2})^2}{7} = \frac{18}{28}(w)$$

یا

$$P_{a(\max)} = \frac{1}{8} \times \frac{V_m^2}{R}$$

فصل نهم

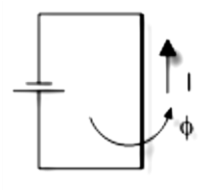
القاء متقابل

نیروی الکتروموتوری :

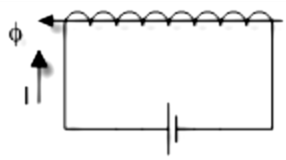
این نیرو در اثر گردش مغناطیس در سیم و یا سیم بندی در مغناطیس ایجاد می شود .

قانون آمپر :

اگر از یک سیمِ هادی , جریانی عبور کند , اطراف آن سیم میدان مغناطیسی ایجاد می شود که توسط قانون دست راست , جهت میدان مغناطیسی تعیین می گردد .



چنانچه به جای یک سیم راست از تعدادی سیم به صورت سیم پیچ استفاده کنیم , در اینصورت می توانیم مغناطیس قوی تری داشته باشیم .



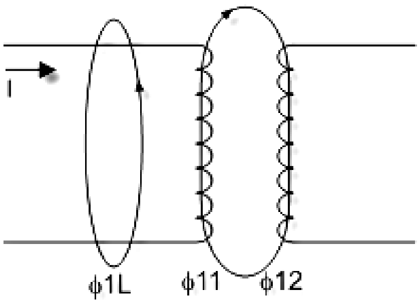
تزویج :

در برق دو نوع توزیع داریم :

۱- تزویج رسانایی

۲- تزویج الکترومغناطیسی

در تزویج رسانایی هادی ها به طور مستقیم به هم وصل می شوند , امّا در تزویج الکترومغناطیسی خطوط قوای مغناطیسی به وسیلهٔ یک هادی , قطع شده و در آن ولتاژ القاء می کنند .



Φ_{11}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ اوّل , قطع شده توسط سیم پیچ اوّل

Φ_{12}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ اوّل , قطع شده توسط سیم پیچ دوّم

Φ_{1L}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ اوّل , که نشت می شود .

Φ_{22}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ دوّم , قطع شده توسط سیم پیچ دوّم

Φ_{21}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ دوّم , قطع شده توسط سیم پیچ اوّل

Φ_{2L}: خطوط قوای ایجاد شده توسط سیم پیچ دوّم که نشت می شود .

$$\Phi_1 = \Phi_{1L} + \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

Φ_1: کل فوران تولید شده توسط سیم پیچ اوّل

Φ_2: کل فوران تولید شده توسط سیم پیچ دوّم

k: ضریب تزویج (ضریب کوپلینگ)

$$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2}$$

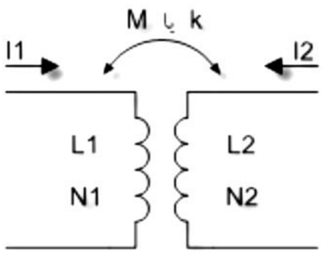
L: ضریب خود القاء :

$$V_L = L\,\frac{di}{dt} = N\,\frac{d\Phi}{dt}$$

M: ضریب القاء متقابل :

$$\begin{cases} V_2 = M\,\dfrac{di_1}{dt} \\ V_1 = M\,\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$



مثال ۱) در یک ترانس با دو پیچک تزویج شده از پیچکِ یک , جریان به شدّت 5 آمپر از آن می گذرد , شارهای متناظر Φ_{11} و Φ_{12} به ترتیب 0.2 میلی وبر و 0.4 میلی وبر هستند . چنانچه تعداد دور پیچک ها $N_1 = 500$ و $N_2 = 1500$ باشد , مطلوب است تعیین L_1 و L_2 و k و M .

تذکر : Φ_{11} جزء شار نشتی می باشد و فقط Φ_{12} و Φ_{21} مفیدند .

حل)

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = 0.2 + 0.4 = 0.6(mvb)$$

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{500 \times 0.6 \times 10^{-3}}{5} = 0.06(H)$$

$$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{0.4}{0.6} = 0.664$$

$$M = \frac{N_2\, \Phi_{12}}{I_1} = \frac{1500 \times 0.4 \times 10^{-3}}{5} = 0.12(H)$$

$$M = k\sqrt{L_1\, L_2} \Rightarrow L_2 = \left(\frac{M}{k}\right)^2 \frac{1}{L} = \left(\frac{0.12}{0.664}\right)^2 \times \frac{1}{0.06}$$

$$\Rightarrow L_2 = 0.539(H)$$

تذکر : برای تعیین خودالقایی با داشتن فوران و جریان ملاحظه می شود که :

$$V_1 = L_1 \frac{di}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

$$L_1 di = N_1 d\Phi_1$$

در جریان متناوب که فوران و جریان تغییر می کنند ، رابطه فوق تبدیل به معادله

$$L_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{di_1}$$

در جریان پیوسته که فوران و جریان تغییر نمی کنند ، رابطه فوق تبدیل به معادله

$$\boxed{L_1 = N_1 \frac{\Phi_1}{i_1}}$$

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$M\, di_1 = N_2\, d\Phi_{12}$$

در جریان متناوب

$$\boxed{M = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{di_2}}$$

در جریان مستقیم

$$\boxed{M = N_2 \frac{\Phi_{12}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2}}$$

مثال ۲) دو پیچک تزویج شده $L_1 = 0.8$ هانری و $L_1 = 0.2$ هانری , دارای ضریب تزویج 0.9 هستند , ضریب القاء متقابل M و نسبت دورهای $\frac{N_1}{N_2}$ را پیدا کنید .

$$M = k\sqrt{L_1\ L_2} \Rightarrow M = 0.9\sqrt{0.8\times 0.2} \Rightarrow M = 0.36\ (H)$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{0.8}{0.2}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 2$$

مثال ۳) دو پیچک تزویج شده با ضرایب خود القاء $L_1 = 0.5(H)$ و $L_1 = 2(H)$ دارای ضریب تزویجی معادل 0.05 هستند , پیچک دو , شامل ۱۰۰۰ دور سیم است , اگر جریان در پیچکِ یک , برابر $I_1 = 5\sin 400t$ باشد , ولتاژ در پیچکِ دو , و همچنین حداکثر مقدار شاری که توسط سیم پیچ اوّل ایجاد می شود را تعیین کنید .

حل)

$$V_2 = M\ \frac{di_1}{dt}$$

$$M = k\sqrt{L_i\ L_2} = 0.05\sqrt{2\times 0.5} = 0.05(H)$$

$$V_2 = 0.05\frac{d}{dt}\left(5\sin 400t\right) \Rightarrow V_2 = 0.05\times 5\times 400\cos 400t$$

$$V_2 = 100\cos 400t(V)$$

$$V_2 = N_2\ \frac{d\Phi_{12}}{\mathrm{dt}}$$

$$\int \frac{V_2}{N_1}\ dt = \int d\Phi_{12} \Rightarrow \Phi_{12} = \frac{1}{N_2}\int V_2\ dt$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{1000}\int 100\cos 400t \Rightarrow \Phi_{12} = 0.25\sin 400t\ \ (mwb)$$

$$\Phi_{12\max} = 0.25$$

$$\Phi_{1\max} = \frac{0.25}{0.05} \Rightarrow \Phi_{1\max} = 5\ (mwb)$$

* روش دوم

$$V_2 = M\ \frac{di}{dt} = N_2\ \frac{d\Phi_{12}}{dt} \Rightarrow \int M\ di_1 = \int N_2\ d\Phi_{12}$$

$$\Rightarrow M\int di_1 = N_2\int d\Phi_{12} \Rightarrow M\ i_1 = N_2\ \Phi_{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{12} = \frac{M\ i_1}{N_2}}$$

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_{12}}{k} = \frac{M\ i_1}{k\ N_2} = \frac{\cancel{k}\sqrt{L_1\ L_2}}{\cancel{k}N_2}\ i_1$$

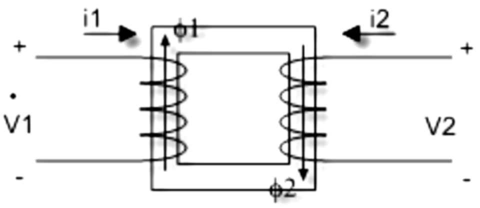
$$\boxed{\Phi_1 = \frac{\sqrt{L_1\ L_2}}{N_2}\ i_1}$$

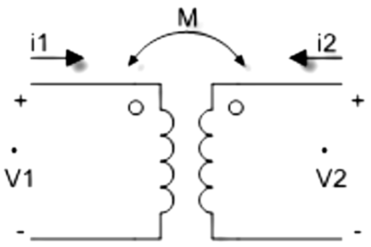
$$\Phi_{1\max} = \frac{\sqrt{2\times 0.5}}{1000}\times 5 \Rightarrow \Phi_{1\max} = 5\ (mwb)$$

مدارهای با القاء متقابل :

در اثر عبور جریان در هر سیم پیچ ، در سیم پیچ دیگر جریانی القاء می شود . این جریان نیز ایجاد نیروی محرکه می کند . در اینجا از KVL ولتاژهای مدار را به دست می آوریم .

نمونه ۱ :





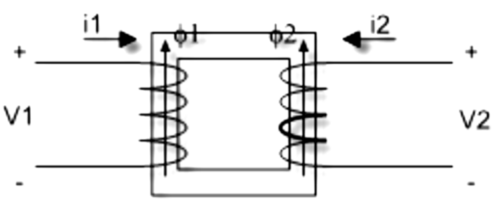
$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \pm M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

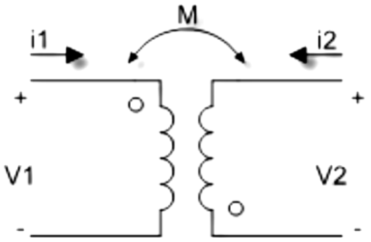
روش تعیین القاء متقابل :

اگر سهم (فلِش) هر دو جریان به سر نقطه دار سیم پیچ های اوّلیه و ثانویه وارد یا خارج شود , علامت القاء متقابل و خود القاء هم علامتند . اگر سهم یکی از جریانها (اوّلیه و ثانویه) به سر نقطه دار یک سیم پیچ نزدیک و دیگری از سر نقطه دار سیم پیچ خارج گردد, علامت القاء متقابل و خود القاء دارای علامت مخالفند .

براي شكل بالا $\rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$

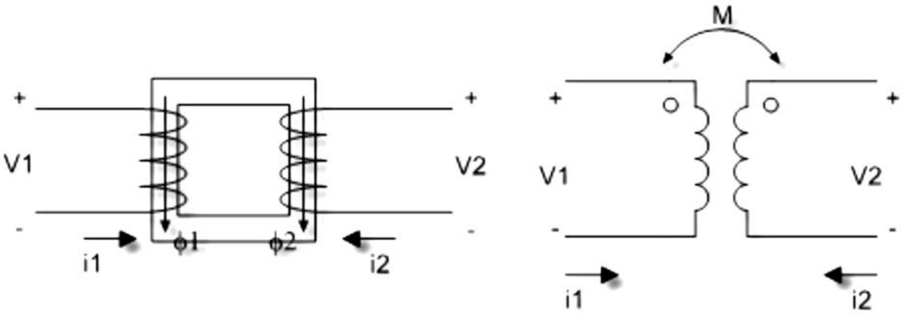
نمونه ۲ :





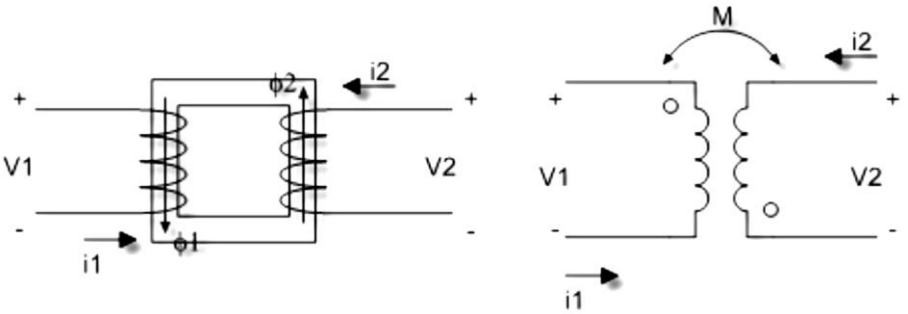
$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

نمونه ۳ :



$$\begin{cases} V_1 = -L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

نمونه ۴ :



$$\begin{cases} V_1 = -L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

تذکر : اگر $S = j\omega$ به عنوان فرکانس مختلط تعریف شود , پس برای سلف $X_L = j\omega L = S L$ و برای خازن $X_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{S C}$

* در حوزهٔ زمان داشتیم :

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \pm M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

در حوزه های مختلف مقادیر ولتاژ ها عبارتند از :

❊ حوزهٔ زمان $$V_L = L_1 \frac{di}{dt}$$

❊ حوزهٔ فرکانس $$\dot{V}_L = (j\,\omega\,L)\,\dot{I}$$

❊ حوزهٔ فرکانس مختلط $$\dot{V}_L = S\,L\,\dot{I}$$

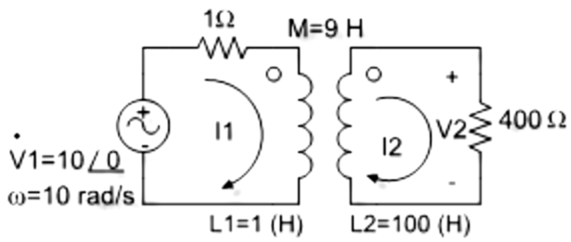
پس معادلات ولتاژها در حوزه های مختلف عبارتند از :

❊ در حوزهٔ فرکانس :
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\,\omega\,L_1\,\dot{I}_1 \pm j\,\omega\,M\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\,\omega\,L_2\,\dot{I}_2 \pm j\,\omega\,M\,\dot{I}_1 \end{cases}$$

❊ در حوزهٔ فرکانس مختلط :
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = S\,L_1\,\dot{I}_1 \pm S\,M\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = S\,L_2\,\dot{I}_2 \pm S\,M\,\dot{I}_1 \end{cases}$$

❊ در روابط بالا مقدار اولیه جریان صفر فرض شده : $$i_1(0) = i_2(0) = 0$$

مثال ۴) در مدار زیر مطلوب است , نسبت تبدیل ترانس .



حل) نسبت تبدیل یعنی $\frac{V_2}{V_1} = ?$

از KCL , مدار را حل می کنیم , یعنی جهت دلخواهی برای جریان (اوّلیه و ثانویه) تعیین می کنیم .

$$\begin{cases} -V_1 + 1I_1 + j\,\omega\,L_1\;I_1 \pm j\,\omega\,M\;I_2 = 0 \\ 400I_2 + j\,\omega\,L_2\;I_2 \pm j\,\omega\,M\;I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 + I_1 + j10\;I_1 - j90\;I_2 = 0 \\ 400I_2 + j1000\;I_2 - j90\;I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + j10)\,I_1 - j90\;I_2 = 10 \\ (400 + j100)\,I_2 - j90\;I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{400 + j1000}{j90}\,I_2 \\ (1 + j10)\left(\dfrac{400 + j1000}{j90}\right) I_2 - j10\;I_2 \qquad\qquad (1) \end{cases}$$

$$1) \Rightarrow \qquad \left[\frac{(400 - 10000) + j(1000 + 4000)}{j90} - j90\right] I_2 = 10$$

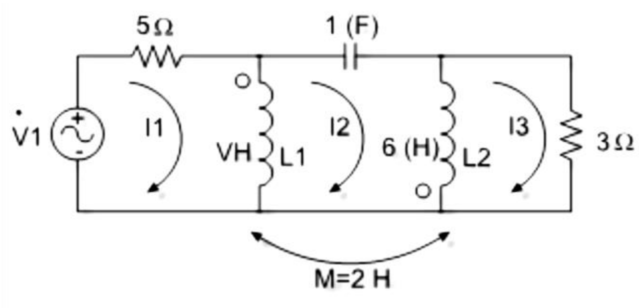
$$\frac{-9600 + j5000 + (90)^2}{j90}\;I_2 = 0$$

$$(-1500 + j5000)\,I_2 = 900\angle 90^\circ$$

$$I_2 = \frac{j900}{-1500 + j5000} = \frac{j9}{-15 + j50}$$

$$I_2 = 0.1724\angle -16.7^\circ \;\; (A)$$
$$V_2 = 400I_2 = 68.96\angle 163.3^\circ \quad (V)$$

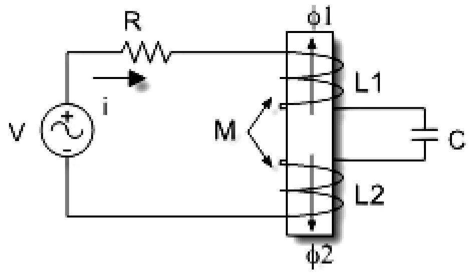
مثال ۵) در مدار زیر معادلات جریان حلقه ها را در حوزۀ فرکانس مختلط) S (بنویسید .



حل) چون مقدار ω را نداریم , پس بهتر است مسئله در حوزۀ S حل شود .

$$L\,1)\;\; -\dot{V}_1+5I_1+S\,L_1\left(I_1-I_2\right)+S\,M\left(I_3-I_2\right)=0$$
$$L\,2)\;\; \frac{I_2}{S\,C}+S\,L_2\left(I_2-I_3\right)+S\,M\left(I_2-I_1\right)+S\,L_1\left(I_2-I_1\right)+S\,M\left(I_2-I_3\right)=0$$
$$L\,3)\;\; 3I_3+S\,L_2\left(I_3-I_2\right)+S\,M\left(I_1-I_2\right)=0$$
$$\begin{cases} -\dot{V}_1+5I_1+7S\left(I_1-I_2\right)+2S\left(I_3-I_2\right)=0 \\ \dfrac{1}{S}\,I_2+6S\left(I_2-I_3\right)+2S\left(I_2-I_1\right)+7S\left(I_2-I_1\right)+2S\left(I_2-I_3\right)=0 \\ 3I_3+6S\left(I_3-I_2\right)+2\left(I_1-I_2\right)=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(5+7S\right)I_1-9S\,I_2+2S\,I_3=7 \\ -9S\,I_1+\left(17S+\dfrac{1}{S}\right)I_2-8S\,I_3=0 \\ 2S\,I_1-8S\,I_2+\left(3+6S\right)I_2=0 \end{cases}$$

مثال ۶) قانون ولتاژهای کیرشهف را برای مدار تزویج شدهٔ زیر به کار برید و معادلهٔ آنرا به شکل لحظه ای و در حوزهٔ فرکانس و فرکانس مختلط بنویسید .



$$C=\frac{1}{j\,\omega\,C}=-j\,\frac{1}{\omega\,C}$$

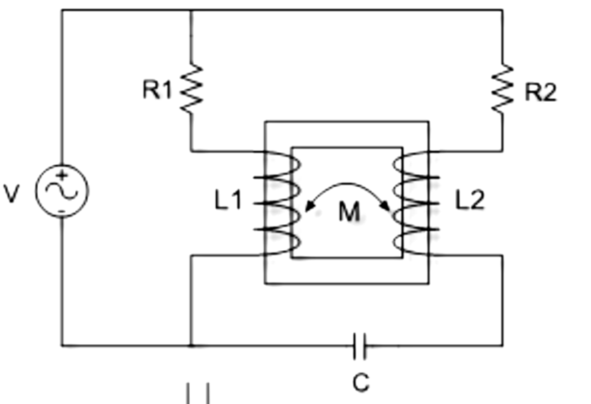
$$R\,i=L_1\,\frac{di}{dt}-M\,\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt+L_2\,\frac{di}{dt}-M\,\frac{di}{dt}-V=0$$
$$\Rightarrow R\,i+\left(L_1+L_2-2M\right)\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}\int i\,dt-V=0$$
$$\Rightarrow R\,i+j\,\omega\,L_1\,i-j\,\omega\,M\,i-j\,\frac{1}{\omega\,C}\,i+j\,\omega\,L_2\,i-j\omega\,M\,i-V=0$$
$$\Rightarrow \left[R+j\left(\omega\,L_1-2\omega\,M+\omega\,L_2-\frac{1}{\omega\,C}\right)\right]i=V$$

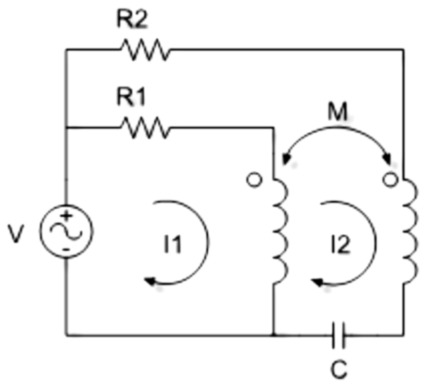
❈ در حوزهٔ فرکانس

$$\left[R+j\omega\,L_1-2\,j\omega\,M+j\omega\,L_2+\frac{1}{j\omega\,C}\right]i=V$$
$$\Rightarrow \left[R+S\left(L_1+L_2-2M\right)+\frac{1}{S\,C}\right]i=V$$

❈ در حوزهٔ فرکانس مختلط

مثال ۷) در شکل زیر مدار مغناطیسی را به مدار الکتریکی تبدیل کرده , سپس با اِعمال KVL , معادلات را بنویسید .(در حوزه ی فرکانس)

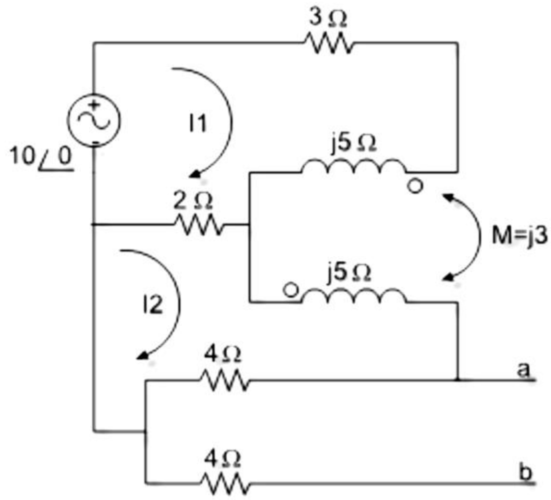




$$\begin{cases} -V + R_1 (I_1 - I_2) + j\omega L_1 (I_1 - I_2) + j\,\omega\, M\, I_2 = 0 \\ R_1 (I_2 - I_1) + R_2\, I_2 + j\,\omega\, L_2\, I_2 + j\,\omega\, M\, (I_1 - I_2) + j\,\omega\, L_1 (I_2 - I_1) - j\,\omega\, M\, I_2 - \dfrac{j}{\omega C} I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R_1 + j\,\omega\, L_1) I_1 - [R_1 + j\,\omega (L_1 - M)] I_2 = V \\ -[\, R_1 - j\,\omega (L_1 - M)] I_1 + \left[\, R_2 + j\omega \left[\, (l_1 + L_2 - 2M) - \dfrac{1}{\omega C} \,\right] \right] I_2 = 0 \end{cases}$$

مثال ۸) در شبکهٔ تزویج شدهٔ زیر ولتاژ مابین ترمینالهای a و b را محاسبه کنید .



$$\begin{cases} -10+3I_1+j5I_1+j3I_2+2\left(I_1-I_2\right)=0 \\ 2\left(I_2-I_1\right)+j5\,I_2+j3\,I_1+4I_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(5+j5\right)I_1+\left(-2+j3\right)I_2=10 \\ \left(-2+j3\right)I_1+\left(6+j5\right)I_2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad I_1=-\frac{6+j5}{-2+j3}\,I_2$$

$$\left[-\left(5+j5\right)\left(\frac{6+j5}{-2+j3}\right)+\left(-2+j3\right)\right]I_2=10$$

$$\Rightarrow I_2=0.532\angle -137.8\ \left(A\right)$$

$$V_{ab}=4\,I_2$$

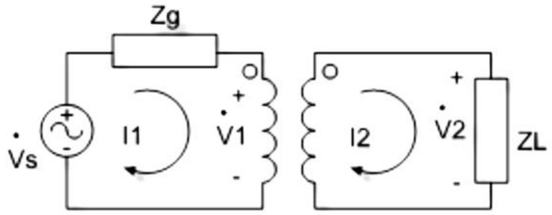
$$V_{ab}=2.128\angle -137.8\ \left(V\right)$$

ترانس با ضریب تزویج واحد (ایده آل) : k=1

در این ترانس , مقاومتهای القایی اوّلیه و ثانویه نسبت به امپدانس های دو سر ترانس بسیار بزرگ است و سیم ها روی هستهٔ آهنی پیچیده می شوند . در این ترانس , پارامتر جدیدی به نام نسبتِ تعداد دور (a) وجود دارد . به قسمی که :

$$a=\frac{N_2}{N_1}=\sqrt{\frac{L_2}{l_1}}$$

محاسبهٔ امپدانس ورودی ترانس ایده آل :



$$\begin{cases} -\dot{V}_S + \left(Z_G + j\,\omega\,L_1\right) I_1 - j\,\omega\,M\;I_2 = 0 \\ \left(Z_L + j\,\omega\,L_2\right) I_2 - j\,\omega\,M I_1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad I_2 = \dfrac{j\omega\,M}{Z_L + j\,\omega\,L_2}\,I_1 \end{cases}$$

$$k = 1 \;\rightarrow\; M = k\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{L_1\,L_2}$$

$$\dot{V}_S = \left(Z_g + j\,\omega\,L_1 + \frac{\omega^2\;M^2}{Z_L + j\,\omega\,L_2}\right) I_1$$

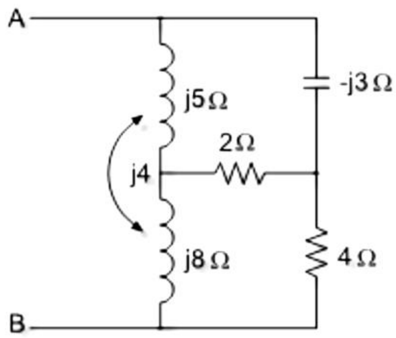
$$Z_{in} = \frac{\dot{V}_S}{I_1}$$

$$Z_{in} = Z_g + j\,\omega\,L_1 + \frac{\omega^2\;M^2}{Z_L + j\,\omega\,L_2}$$

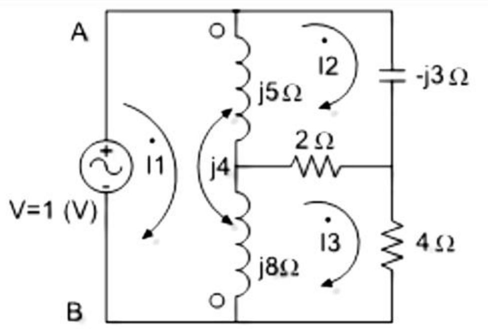
$$a = \sqrt{L_2 / L_1} \;\Rightarrow L_2 = L_1\;a^2$$

اگر $L_1 \rightarrow \infty \;\Rightarrow Z_{in} = Z_g + \dfrac{Z_L}{a^2}$

مثال ۹) امپدانس دو سر AB مدار زیر را به دست آورید ؟



حل) یک منبع ۱ ولتی به دو سر AB اِعمال کرده و سپس $Z_{in} = \dfrac{V}{I_1}$ را به دست می آوریم .



$$\begin{cases} (j5+j8)\dot{I}_1 - j5\,\dot{I}_2 - j8\,\dot{I}_3 - j4\left(\dot{I}_1-\dot{I}_3\right) - j4\left(\dot{I}_1-\dot{I}_2\right) = 1 \\ (-j3+2+j5)\dot{I}_2 - 2\dot{I}_3 - j5\,\dot{I}_1 - j4\left(\dot{I}_3-\dot{I}_1\right) = 0 \\ (2+4+j8)\dot{I}_3 - 2\dot{I}_2 - j8\,\dot{I}_1 - j4\left(\dot{I}_2-\dot{I}_1\right) = 0 \end{cases}$$

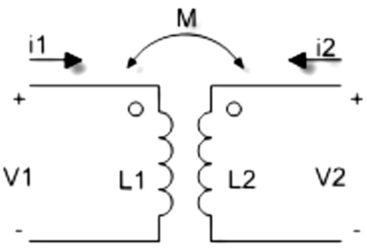
* گاهی بهتر است به جای منبع ۱ ولتی , از منبع $\underline{j}$ ولتی استفاده کنیم (یعنی $90°$)

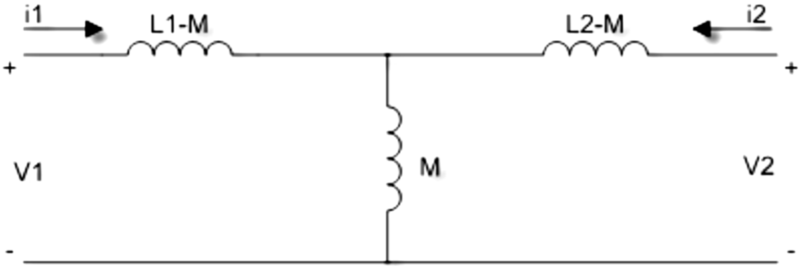
$$\begin{cases} j5\,\dot{I}_1 - j\,\dot{I}_2 - j4\,\dot{I}_3 = j \quad \Rightarrow \quad 5I_1 - I_2 - 4I_3 = 1 \\ -j\,\dot{I}_1 + (2+j2)\dot{I}_2 - (2+j4)\dot{I}_3 = 0 \\ -j4\,\dot{I}_1 - (2+j4)\dot{I}_2 + (6+j8)\dot{I}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = 0.077 + j0.103 \ (A)$$

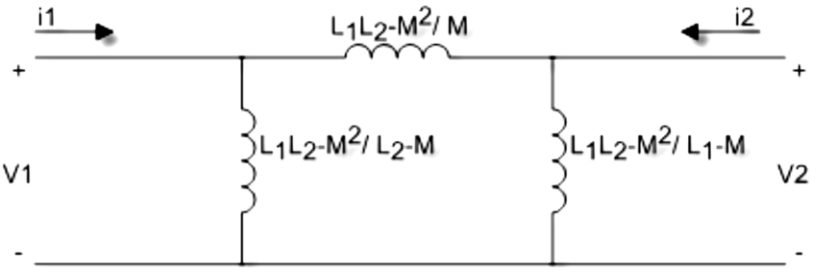
$$Z_{in} = \frac{\dot{V}}{I_1} = \frac{j}{0.077+j0.103} \qquad \Rightarrow \qquad Z_{in} = 6.23 + j4.65 \ (\Omega)$$

معادل π و T ترانس خطی :



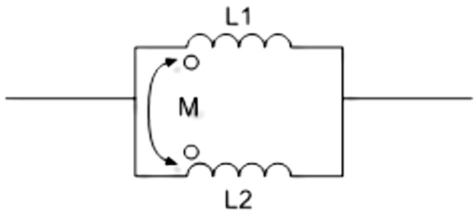


* معادل T

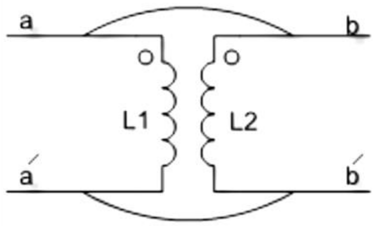


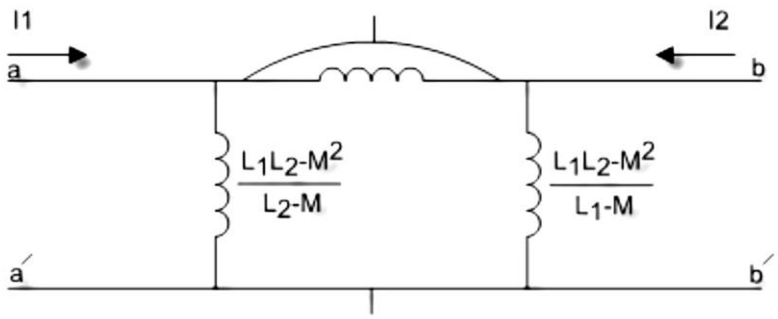
❊ معادل π

مثال ۱۰) مطلوب است تعیین القاگری معادلِ دو القاءگر موازی L_1 و L_2 مطابق شکل زیر :



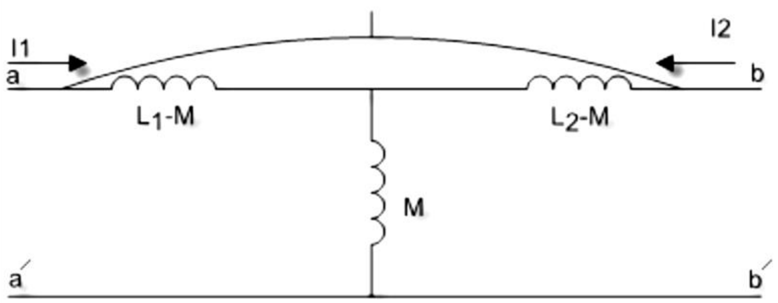
حل) با استفاده از معادل π مدار :





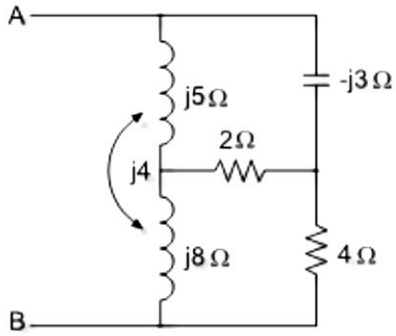
$$L_T = \frac{\dfrac{L_1\,L_2 - M^2}{L_2 - M} \times \dfrac{L_1\,L_2 - M^2}{L_1 - M}}{\dfrac{L_1\,L_2 - M^2}{L_2 - M} + \dfrac{L_1\,L_2 - M^2}{L_1 - M}} \;\Rightarrow\; L_T = \frac{L_1\,L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

روش دوّم : با استفاده از معادل T :

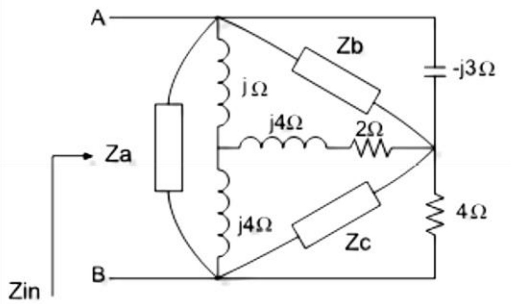


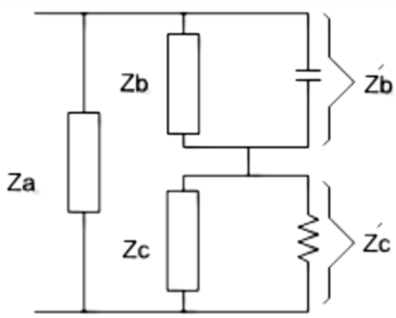
$$L_T=\frac{(L_1-M)(L_2-M)}{L_1+L_2-2M}+M \Rightarrow \boxed{L_T=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}}$$

مثال ۱۱) امپدانس دو سر AB مدار زیر را به دست آورید .



حل) با استفاده از معادل T :





$$Z_a=\frac{Z_1\ Z_2+Z_1\ Z_3+Z_2\ Z_3}{Z_1}=\frac{Z_T}{Z_1}$$

$$Z_T=(2+j4)(j4)+(2+j4)(j)+j\ (j4)$$

$$\Rightarrow Z_T=-24-j10=26\angle 157.4°$$

$$\begin{cases} Z_a=-0.4+j5.8=5.81\angle 94°(\Omega) \\ Z_b=2.5+j6=6.5\angle 67.38°(\Omega) \\ Z_c=10+j24=26\angle 67.38°(\Omega) \end{cases}$$

$$Z_b'=Z_b \parallel -j3=1.475-j4.77=5\angle -72.8°\ (\Omega)$$

$$Z_c'=Z_c \parallel 4=3.71+j0.5=3.74\angle 7.63°\ (\Omega)$$

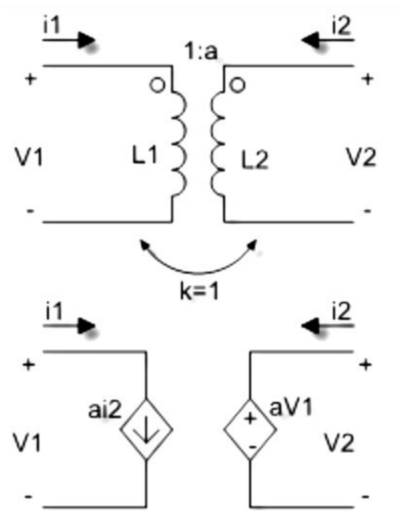
$$Z_a'=Z_b'+Z_c'=5.185-j4.27=6.72\angle -39.5°\ (\Omega)$$

$$Z=Z_a \parallel Z_a'$$

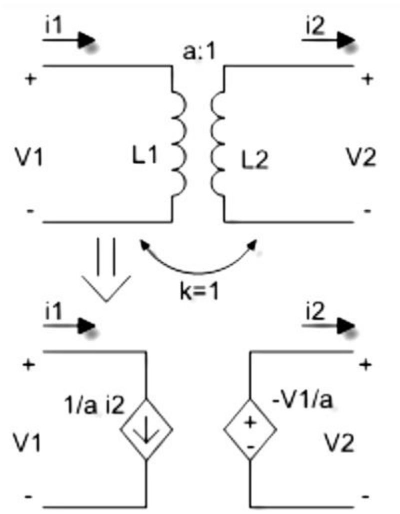
$$Z=6.23+j4.65\ (\Omega)$$

مدار معادل ترانس ایده آل :

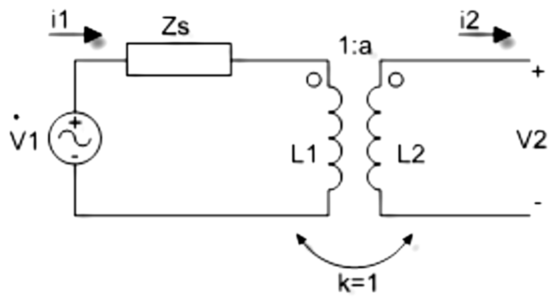
در این ترانس $k = 1$ است , با استفاده از این , مدار معادل ترانسفورماتور را حذف کرده و مدار موجود به یک مدار الکتریکی معمولی بدون ترانس , تبدیل می شود و با استفاده از قضایای خوانده شده در مدار , حل می کنیم .



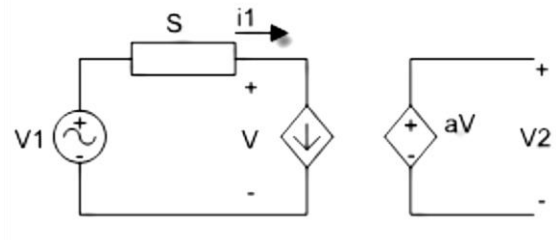
مثال ۱۲) مطلوب است مدار معادل ترانس ایده آل شکل زیر :



مثال ۱۳) مطلوب است معادلِ تونن مدار شکل زیر از دو سر خروجی :



حل) معادل تونن مدار فوق :

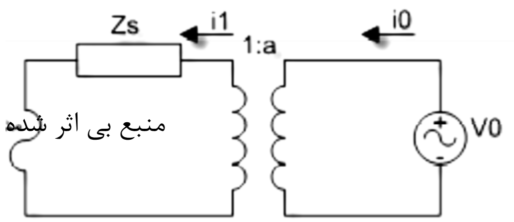


$I_2 = 0 \rightarrow I_1 = 0$

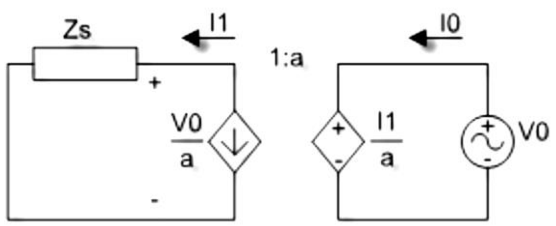
$V \quad V_1$

$V_{oc} = V_2 = a\,V = a\,V_1$

* چون مدار منبع ندارد پس یک منبع V_0 اضافه می کنیم .



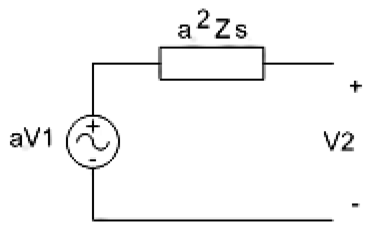
مدار معادل شکل فوق عبارتست از :



$$I_1 = \frac{\frac{V_0}{a}}{Z_S}$$

$$I_0 = \frac{I_1}{a} = \frac{V_0}{a^2\ Z_S}$$

$$Z_{th} = \frac{V_0}{I_0} = a^2\ Z_{th} \longrightarrow Z_{th} = a^2\ Z_S$$



فصل دهم

مدارهای تشدید یا رزنانس (مدارهای همنوا) :

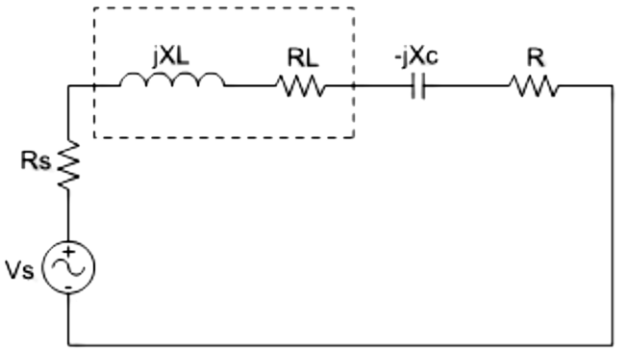
همانطور که مشاهده شد , عکس العمل سلف و خازن متناسب با فرکانس مدار می باشد , بنابراین ترکیب همزمان سلف و خازن باعث می شود پاسخ مدار تابعی از فرکانس گردد , بنابراین در فرکانس خاصّی پاسخ مدار به گونه ای است که مدار از خود خواصیت اهمی خالص نشان می دهد , در اینحالت پاسخ مدار بیشینه (ماکزیمم) می شود , از این خاصیت در مدارهای هماهنگ و فیلترها در الکترونیک و مدارهای رادیویی و مخابراتی به کرّات استفاده می شود .
وقتی پاسخ مدار بیشینه (ماکزیمم) باشد , گوییم مدار در حالت تشدید یا رزنانس است .

خواص مدارهای تشدید :

۱ - پاسخ مدار بیشینه است .
۲ - مدار خاصیت اهمی دارد .
۳ - ولتاژ و جریان کل با همدیگر هم فازند .
۴ - قدرت راکتیو کل مدار صفر است .
۵ - قدرت ظاهری کل مدار با قدرت حقیقی برابر است .
۶ - ضریب قدرت واحد است .

مدار رزنانس سری :

مدار RLC سری را به منبع ولتاژ سینوسی وصل می کنیم , برای اینکه مدار در حالت رزنانس شود باید مدار خاصّیت اهمی خالص داشته باشد , پس در کلیهٔ مدارهای رزنانس (اعم از سری – موازی - سری و موازی) همواره مقدار موهومی را مساوی صفر قرار می دهیم , شرایط به وجود آمده , شرایطی است که حالت مدار در تشدید است . مثلاً در مدارهای RLC سری داریم :



R_S : مقاومت داخلی منبع ولتاژ
R_L : مقاومت داخلی سلف
R : مقاومت مدار

مدار معادل تبدیل می شود به :

$$R_T = R_S + R_L + R$$

امپدانس کل را به دست می آوریم : $Z_T = R_T + j\left(X_L - X_C\right)$

موهومی را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$X_L - X_C = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = X_C}$$

$$\underset{\text{سری}}{\omega_S} = 2\pi\ F_S \longrightarrow \boxed{F_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}}$$

همچنین از معادلهٔ امپدانس مشاهده می شود :

$$Z = R_T$$

ملاحظه می شود امپدانس مقداری حقیقی است , یعنی امپدانس در حالت تشدید , مقداری اهمی خالص است . حال جریان کل مدار را به دست می آوریم :

$$I = \frac{V\angle 0}{Z} = \frac{V\angle 0}{R}$$

ضریب شایستگی : Quality Factor

نسبت قدرتِ راکتیوِ القاءگر یا خازن به قدرتِ متوسط را ضریب شایستگی گویند و آنرا با Q_S برای مدارات سری نشان می دهند . ضریب شایستگی کمیتی است بدون واحدِ اندازه گیری و مقدار آن هیچ گاه نباید کمتر از واحد شود , معمولاً برای متقارن شدن منحنی امپدانس بر حسب فرکانس و یا جریان بر حسب فرکانس $Q_S \geq 10$ در نظر گرفته می شود , بنابراین طبق تعریفِ بیان شده خواهیم داشت :

$$Q_S = \frac{P_r}{P} = \frac{\cancel{I}^2\ X_L}{\cancel{I}^2\ R} = \frac{\cancel{I}^2\ X_C}{\cancel{I}^2\ R}$$

$$Q_S = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} \xrightarrow{\text{در حالت کلّی } X_L=X_C=X} \boxed{Q_S = \frac{X}{R}}$$

$$Q_S = \frac{\omega_S\ L}{R_T}$$ ❋ در مدار RL سری :

$$Q_S = \frac{1}{\omega_S\ C\ R_T}$$ ❋ در مدار RC سری :

$$Q_S = \frac{\omega_S\ L}{R_T}$$ ❋ با توجه به رابطه :

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

$$Q_S = \frac{\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\ L}{R_T} \Rightarrow \boxed{Q_S = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

فرمول فوق از $Q_S = \dfrac{1}{\omega_S\ C\ R_T}$ نیز قابل نتیجه است .

توجه شود که ضریب کیفیت با توجّه به رابطهٔ زیر قابل تعریف می شود :

$$Q_S = 2\pi\ \frac{\text{ماکزیمم انرژي ذخیره شده}}{\text{کل انرژي تلف شده در یک پریود}}$$

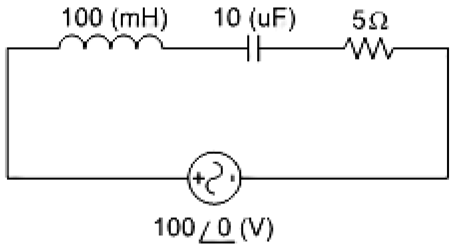
رابطهٔ ولتاژها در مدار همنوای سری :

$$Q_S = \frac{P_r}{P} = \frac{\cancel{I}V_L}{\cancel{I}V} = \frac{\cancel{I}V_C}{\cancel{I}V}$$

$$\left|\dot{V}_L\right| = \left|\dot{V}_C\right| = Q\,|\,V\,|$$

از معادلهٔ ولتاژها مشاهده می شود چنانچه $Q_S > 1$ باشد در حالت رزنانس ولتاژ دو سر سلف و خازن از ولتاژِ کلّ مدار نیز بیشتر می شود , از این خاصّیت , اولاً در چند برابر کننده های ولتاژ استفاده می شود , ثانیاً در هنگام کار با اینگونه مدارها باید مراقب بود که ولتاژ زیاد دو سر سلف یا خازن خطرساز نشود .

مثال ۱) در مدار زیر در چه فرکانسی مدار رزنانس است , همچنین مقدار ضریب کیفیت را به دست آورده , سپس ولتاژ دو سر سلف یا خازن را تعیین کنید .



$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-1}\times 10^{-5}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}}$$

$$\Rightarrow \omega_S = \frac{1}{10^{-3}} = 1000(\tfrac{rad}{S})$$

$$\omega_S = 2\pi\,F_S \;\Rightarrow\; F_S = \frac{\omega_S}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} \qquad \Rightarrow \quad F_S = 159(HZ)$$

$$Q_S = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \;\Rightarrow Q_S = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{10^{-1}}{10^{-5}}} = \frac{1}{5}\sqrt{10^{3}} = \frac{1}{5}\times 10^{2} \quad\Rightarrow\quad Q_S = 20$$

$$|V_L| = |V_C| = Q_S|V\,| = 20\times 100 \qquad \Rightarrow \quad |V_L| = |V_C| = 2000\ \ (V)$$

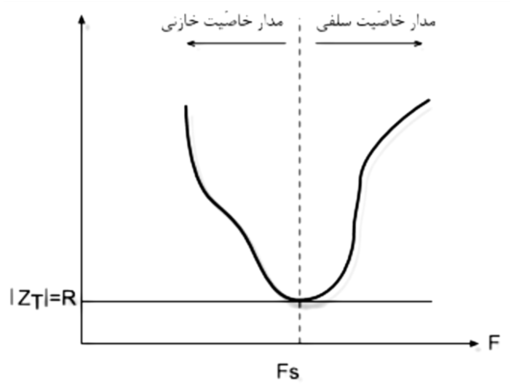
منحنی امپدانس بر حسب فرکانس Z=f(F):

$$\dot{Z}_T = R + j\left(X_L - X_C\right)$$

$$Z_T = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}\;\;\angle \tan^{-1}\frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\begin{cases} |Z_T| = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{X_L - X_C}{R} \end{cases}$$

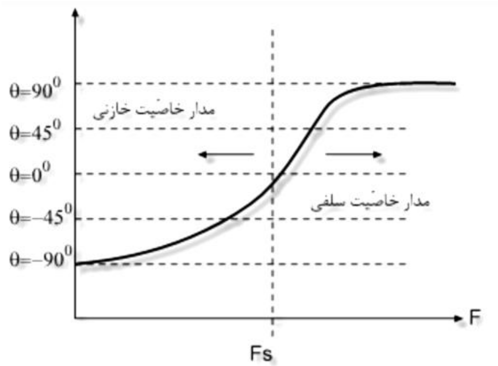
$$F = F_S \;\Rightarrow \left|\begin{array}{l} X_L = X_C \;\Rightarrow |Z_T| = R \\ \theta = 0 \;\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \\ \tan\theta = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$



در فرکانس های کمتر از رزنانس چون $X_L = \omega_S\,L$ و $X_C = \dfrac{1}{\omega_S\,C}$, پس اثر خازنی مدار بیشتر از اثر سلفی آن است و در فرکانس های بزرگتر از رزنانس اثر سلفی مدار بیشتر از اثر خازنی آن می باشد .

منحنی زاویه اختلاف فاز بر حسب فرکانس $\theta=f(F)$

با توجه به رابطه $\theta=\tan^{-1}\dfrac{X_L-X_C}{R}$ و با اعمال $X_L=\omega_S\,L$ و $X_C=\dfrac{1}{\omega_S\,C}$ منحنی **$\theta=f(F)$** عبارت است از :



قابلیت گزینش :

در مدار RLC سری داریم :

$$\dot{Z}=R+j\left(X_L-X_C\right)=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}\ \angle\tan^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}$$

مقدار جریان را حساب می کنیم :

$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}=\frac{V\angle 0}{\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}\ \angle\tan^{-1}\dfrac{X_L-X_C}{R}}$$

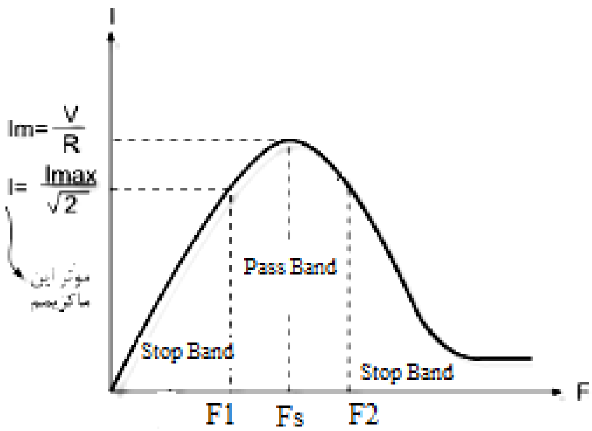
$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}}\ \angle-\tan^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}$$

به جای X_L و X_C , مقادیر مساوی آن ها را قرار می دهیم و مقدار عددی I به دست می آید .

$$I=\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(2\pi\ F\ L-\dfrac{1}{2\pi\ F\ C}\right)^2}}$$

حال نمودار $I=f(F)$ را رسم می کنیم . البته مشاهده می شود , مقدار I به ازاء :

$$F_S=\frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C}}$$



$B\cdot W=F_2-F_1$ پهنای باند

اگر جریان $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ یا $0.707 I_m$ شود , در اینصورت توان نصف خواهد شد . فرکانس متناظر با این جریان را چنانچه در منحنی مشاهده می شود با F_1 و F_2 نشان داده , به فرکانس قطع پائین و بالا و یا فرکانس های قدرت معرّفی می شوند .

فاصلهٔ بین F_1 و F_2 پهنای باند می نامند و آنرا با $B.W$ (Band Width) نمایش داده و واحد اندازه گیری آن HZ می باشد .

بنابراین :

$$B.W = F_2 - F_1$$

معمولاً مقادیر بین فرکانس های F_1 و F_2 مورد پذیرش بوده و به عنوان باند عبور (Pass Band) معرّفی می شوند . خارج از این فرکانس ها باند توقف (Stop Band) می باشد .

$$\begin{aligned} & B.W = F_2 - F_1 \\ & F_r \cong \frac{F_1 + F_2}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_1 = F_S - \frac{1}{2} B.W \\ F_2 = F_S + \frac{1}{2} B.W \end{cases}$$

$$\boxed{B.W = \frac{F_S}{Q_S} = \frac{R}{2\pi L} = F_2 - F_1}$$

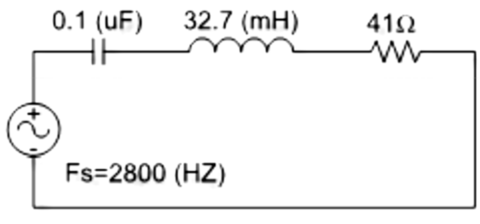
$$Q_S = \frac{F_S}{F_2 - F_1}$$

مثال ۲) در مدار همنوایی سری $F_S = 2800(HZ)$ است . در صورتی که $C = 0.1(\mu F)$ و $B.W = 200(HZ)$ باشد , R و L را حساب کنید ؟

$$B.W = \frac{F_S}{Q_S} \Rightarrow Q_S = \frac{F_S}{B.W} = \frac{2800}{200} = 14$$

$$F_S = \frac{1}{2\pi \sqrt{L\,C}} \Rightarrow L = 32.7(mH)$$

$$B.W = \frac{R}{2\pi L} \Rightarrow R = 41(\Omega)$$

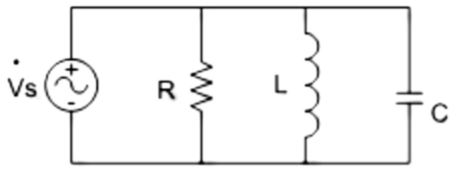


مثال ۳) در مثال قبل مقادیر F_1 و F_2 را نیز به دست آورید ؟

$$F_1 = F_S - \frac{1}{2} B.W = 2800 - \frac{200}{2} = 2700(HZ)$$

$$F_2 = F_S + \frac{1}{2} B.W = 2800 + \frac{200}{2} = 2900(HZ)$$

مدار همنوایی موازی :



از مقاومت اهمی القاءگر فعلاً صرف نظر شده است :

مقدار ادمیتانس را به دست می آوریم ,

$$\dot{y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-j\,\omega C} + \frac{1}{j\,\omega L} = \frac{1}{R} + \frac{-j}{-X_C} + \frac{-j}{X_L}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$

شرط همنوایی (تشدید) این است که مقدار موهومی صفر شود , پس :

$$\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_L} \quad \Rightarrow \quad X_L = X_C$$

$$\omega_P \cdot L = \frac{1}{\omega_P \cdot C} \quad \Rightarrow \quad \omega_P = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

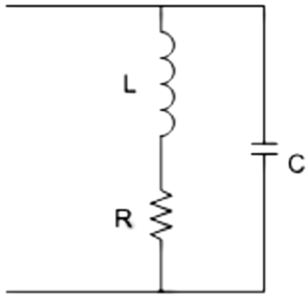
$$F_P = \frac{1}{2\pi\,\sqrt{L \cdot C}}$$

که در روابط , ω_P و F_P مشابه ω_S و F_S هستند .

مدارهای همنوایی مرکب :

در کلیهٔ مدارهایی که شامل مقاومت , $Q_P = \dfrac{R}{X_{L_P}} = \dfrac{R}{X_{C_P}}$ سلف و خازن می باشند , برای تعیین فرکانس همنوایی , مقدار امپدانس یا ادمیتانس را تعیین کرده و سپس مقدار موهومی را صفر در نظر می گیریم . معادله به دست آمده از شرط فوق , شرط تشدید یا همنوایی می باشد , در بین مدارهایی که موجود است , دو مدار مطرح را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم .

مثال ۴) شکل زیر مانند LC موازی است , امّا از اثر مقاومت سلف صرف نظر نشده است , چنانچه مقاومتی نیز با مدار موازی شود , تأثیری در نتیجه فرکانسِ رزنانس نخواهد داشت .



$$\dot{Z} = \dot{Z}_L \parallel \dot{Z}_C \quad \Rightarrow \quad \dot{Z} = \left(R + jX_L\right) \parallel \left(- jX_C\right)$$

$$\dot{Z} = \frac{\left(R + jX_L\right)\left(- jX_C\right)}{R + j\left(X_L - X_C\right)} = \frac{X_L\ X_C - jX_C\ R}{R + j\left(X_L - X_C\right)}$$

مخرج را گویا می کنیم :

$$\dot{Z} = \frac{X_L\ X_C - jX_C\ R}{R + j\left(X_L - X_C\right)} \times \frac{R - j\left(X_L - X_C\right)}{R - j\left(X_L - X_C\right)}$$

$$\dot{Z} = \frac{X_L\ X_C\ R - X_C\ R\left(X_L - X_C\right) - j\left[X_C\ R^2 + X_L\ X_C\ \ X_L - X_C\right]}{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

$$\Rightarrow X_C\ R^2 + X_L\ X_C\ \left(X_L - X_C\right) = 0$$

* از دو طرف X_C را حذف کرده و داریم :

$$R^2 = X_L\left(X_C - X_L\right)$$

$$\Rightarrow R^2 + X_L^2 - X_L\ X_C = 0$$

$$\Rightarrow R^2 + X_L^2 = X_L\ X_C$$

$$\Rightarrow \boxed{X_C = \frac{R^2 + X_L^2}{X_L}}$$

* به جای $X_C = \frac{1}{\omega_r\ C}$ و $X_L = \omega_r\ L$ قرار می دهیم :

$$\frac{R^2 + \left(\omega_r\ L\right)^2}{\omega_r\ L} = \frac{1}{\omega_r\ C}$$

* با حذف ω_r در مخرج :

$$R^2 + \left(\omega_r\ L\right)^2 = \frac{L}{C}$$

$$\left(L\ \omega_r\right)^2 = \frac{L}{C} - R^2$$

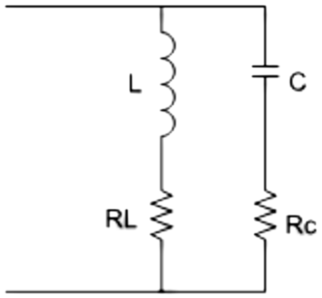
$$\omega_r^2 = \frac{\frac{L}{C} - R^2}{L^2} \ \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2}$$

$$F_r = \frac{1}{2\pi\ L}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2}$$

$$\boxed{\omega_r = \omega_S\ \sqrt{1 - \frac{C}{L}\ R_L^2}}$$

$$\boxed{F_r = F_S\ \sqrt{1 - \frac{C}{L}\ R^2}}$$

مثال ۵) در حالت کلی مدارات RLC موازی می خواهیم فرکانس تشدید را به دست آوریم :



بهتر است از راه ادمی‌تانس مدار را حل کنی‌م :

$$\dot{y} = \frac{1}{R_C - jX_C} + \frac{1}{R_L + jX_L} = \frac{1}{R_C - j\dfrac{1}{\omega C}} + \frac{1}{R_L + j\,\omega L}$$

$$\dot{y} = \frac{R_C + jX_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$\dot{y} = \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{-X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

موهومی را صفر می گیریم :

$$\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{-X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right) = 0$$

شرط همنوایی در این نوع مدار عبارت است از :

$$\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

به جای $X_L = \omega_r\ L$ و $X_C = \dfrac{1}{\omega_r\ C}$ قرار می دهیم :

$$\frac{R_C^2 + \left(\dfrac{1}{\omega_r\ C}\right)^2}{\dfrac{1}{\omega_r\ C}} = \frac{R_L^2 + (\omega_r\ L)^2}{\omega_r\ L}$$

$$\frac{R_C^2\ \omega_r^2\ C^2 + 1}{\omega_r\ C} = \frac{R_L^2 + \omega_r^2\ L^2}{\omega_r\ L}$$

از طرف مخرج ها , ω_r را حذف کرده , سپس معادله را ساده می کنیم :

$$L\,C^2\ R_C^2\ \omega_r^2 + L = C\ R_L^2 + L^2\ C\ \omega_r^2$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \frac{C\ R_L^2 - L}{L\,C^2\ R_C^2 - L^2\ C} = \frac{L - C\ R_L^2}{L^2\ C - L\,C^2\ R_L^2}$$

از ضرایب C در صورت و از $L\,C^2$ در مخرج فاکتور می گیریم :

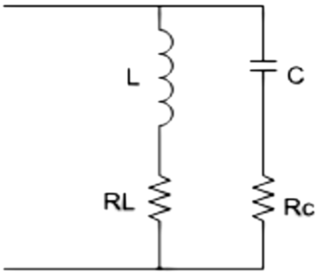
$$\omega_r^2 = \frac{C\left(\frac{L}{C} - R_L^2\right)}{L\,C^2\left(\frac{1}{C} - R_C^2\right)} = \frac{1}{L\,C}\left[\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}\right]$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}}$$

$$\boxed{\omega_r = \omega_S \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}}}$$

$$\boxed{F_r = F_S \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}}}$$

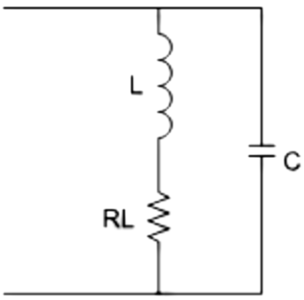
نکات : با توجه به شکل و معادلات ۱ و ۲ مشاهده می شود که :



$$\frac{R_L^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R_C^2 + X_C^2}{X_C} \qquad \text{معادله ۱}$$

$$F_r = F_S \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}} \qquad \text{معادله ۲}$$

۱) اگر در مدار خازنی از R_C صرفنظر شود , پس در دو معادله ۱ و ۲ باید $R_C = 0$ قرار دهیم . مدار تبدیل می شود به :

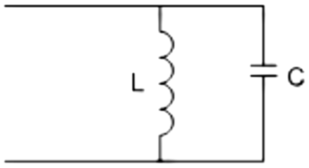


$$\frac{R_L^2 + X_L^2}{X_L} = X_C$$

$$F_r = F_S \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C}}}$$

$$F_r = F_S \sqrt{1 - \frac{C}{L} R_L^2}$$

۲) اگر در مدار خازنی از R_C و در مدار سلفی از R_L صرفنظر شود , پس در معادلات 1 و 2 باید $R_C = 0$ و $R_L = 0$ قرار دهیم . مدار تبدیل می شود به :

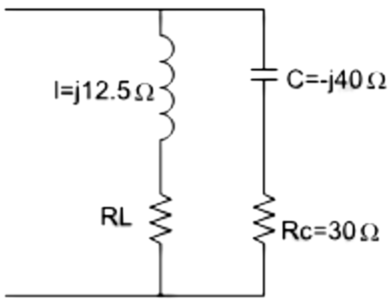


$$X_L = X_C$$

$$F_r = F_S \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{\frac{L}{C}}} \Rightarrow F_r = F_S$$

که همان شکل حالت مدار همنوایی موازی است .

مثال ۶) در مدار شکل زیر مقدار R_L لازم برای همنوایی شبکه را تعیین کنید ؟ (با استفاده از امپدانس)



حل) امپدانس مدار را تعیین می کنیم :

$$Y = \frac{1}{R_L + j12.5} + \frac{1}{30 - j40}$$

$$Y = \frac{R_L - j12.5}{R_L^2 + 12.5^2} + \frac{30 + j40}{30^2 + 40^2}$$

$$Y = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 12.5^2} + \frac{30}{2500}\right) + j\left(\frac{40}{2500} - \frac{12.5}{R_L^2 + 12.5^2}\right)$$

* شرط همنوایی آن است که، مقدار موهومی صفر گردد .

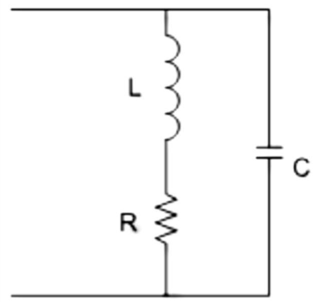
$$\frac{1}{62.5} = \frac{12.5}{R_L^2 + 12.5^2}$$

$$\Rightarrow R_L^2 + 12.5^2 = 781.25$$

$$R_L^2 = 625$$

$$R_{\text{»}} = 25(\Omega)$$

مثال۷) در مدار شکل زیر در چه فرکانسی جریان کل مدار به مقدار R وابسته نیست ؟



حل : بهتر است از راه ادمیتانس مدار را حل کنیم :

$$\dot{y} = \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R + jX_L} = \frac{1}{-j\,\frac{1}{\omega C}} + \frac{1}{R + j\,\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\,\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\dot{y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

مقدار ادمیتانس را تعیین می کنیم چون جریان مدار وابسته به آن می باشد .

$$y = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2}$$

$$y^2 = \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + (\omega C)^2 + \left(\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 - 2\omega C\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$y^2 = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2} + (\omega C)^2 - 2\omega C\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1 - 2\,\omega^2\,LC}{R^2 + (\omega L)^2} + (\omega C)^2}$$

جمله اول عبارت داخل رادیکال وابسته به مقاومت است . اگر آنرا صفر بگیریم ، در این صورت

$$\frac{1 - 2\,\omega^2\,LC}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$

$$1 - 2\,\omega^2\,LC = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2\omega C}$$

مقدار فرکانس وابسته به جریان مستقل از مقاومت برابر است با :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_S$$

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}F_S$$

در این صورت مقدار ادمیتانس ، امپدانس کل برابر است با :

$$y = \omega C \quad \Rightarrow \quad Z = X_C$$

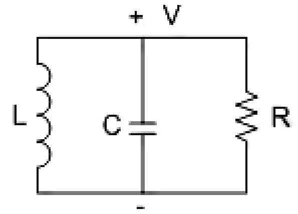
فصل یازدهم

فرکانس مختلط و مدارات درجه دوم RLC :

فرکانس $S=\delta+j\omega$ که در آن ω فرکانس رادیانی و δ فرکانس نپری می باشد . در اینصورت S را فرکانس مختلط گویند .

علّت پیدایش :

چنانچه مدار RLC سری یا موازی یا هر شبکهٔ دیگر مورد بررّسی قرار گیرد , مثلاً در مدار RLC موازی جهت تعیین X , اگر KCL بزنیم :



$$i_R+i_C+i_L=0$$
$$\frac{v}{R}+C\,\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}\int v\,dt=0$$

برای حلّ معادلهٔ دیفرانسیل فوق یکبار مشتق می گیریم :

$$\frac{1}{R}\,\frac{dv}{dt}+C\,\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{L}\,v=0$$

معادلهٔ دیفرانسیل فوق را مرتّب می کنیم :

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\,\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}\,v=0$$

برای حل معادلهٔ فوق از اپراتور کمکی S استفاده می کنیم :

$$\frac{d}{dt}=S$$

$$S^2+\frac{1}{RC}\,S+\frac{1}{LC}=0 \qquad (1)$$

با حل معادلهٔ درجهٔ 2 فوق :

$$S=\frac{-\frac{1}{RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-4\frac{1}{LC}}}{2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$\left|\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{1}{2RC}\\[2ex] \omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\end{array}\right.$$

$$S=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$
$$If\quad \omega_0>\alpha\quad\Rightarrow\quad \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

$$\Rightarrow S=-\alpha\pm j\,\omega_d\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}S_1=-\alpha+j\omega_d\\ S_2=-\alpha-j\omega_d\end{array}\right.$$

پس S فرکانس مختلط است .

با توجّه به مقادیر به دست آمده برای S جواب معادلهٔ دیفرانسیل (1) عبارت است از :

$$v(t) = A_1\, e^{S_1 t} + A_2\, e^{S_2 t} \qquad (2)$$

که A_1 و A_2 مقادیر ثابت می باشند .

چون مقادیر S مختلط است , بنابراین جواب (2) را می توان به فرم زیر نوشت :

$$v(t) = A_1 \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

$$v(t) = \left(A_1\, e^{j\omega_d t} + A_2\, e^{-j\omega_d t}\right) e^{-\alpha t} \qquad (3)$$

بنا بر $\sin$ و $\cos$ و ارتباط آنها با توابع نمایی به فرم معادلات نمایی:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

سپس می توانیم برای معادلهٔ (3) قرار دهیم :

$$v(t) = \left[\, A_1 \cos(\omega_d\, t) + A_2 \sin(\omega_d\, t)\, \right] e^{-\alpha t}$$

خلاصه :

۱-

$$If \quad \therefore \quad \alpha < \omega_0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$Then \quad \therefore \quad S = -\alpha \pm j\omega_d$$

که S فرکانس مختلط است ، پس در اینحالت :

$$v(t) = \left[A_1 \cos(\omega_d\, t) + A_2 \sin(\omega_d\, t)\right] e^{-\alpha t}$$

۲ - اگر $\alpha > \omega_0$ باشد , S دارای دو ریشهٔ حقیقی است به طوری که :

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

پس جواب معادلهٔ دیفرانسیل به فرم عمومی زیر است :

$$v(t) = A_1\, e^{S_1 t} + A_2\, e^{S_2 t}$$

در اینحالت S فرکانس مختلط نیست , بلکه یک مقدار حقیقی محض است .

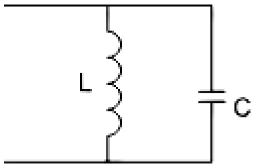
۳ - اگر $\alpha = \omega_0$ باشد , S دارای ریشهٔ حقیقی مضاعف است , به طوری که :

$$S = -\alpha$$

$$v(t) = \left(A_1 + A_2\, t\right) e^{-\alpha t}$$

۴ - اگر $\alpha = 0$ باشد , یعنی مدار فقط LC باشد (مقاومت اهمی موازی بی نهایت است) .

$$\alpha = \frac{1}{2R\,C} = 0 \;\Rightarrow R \to \infty$$

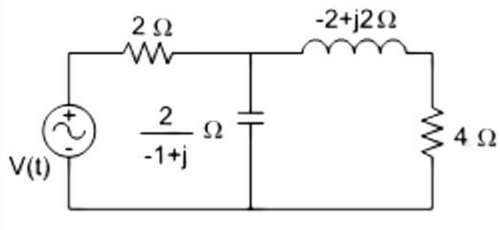


$$S = \pm j\omega_d$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \;\Rightarrow \omega_d = \omega_0$$
$$S = \pm j\omega_d = \pm j\omega_0$$
$$\left| \begin{array}{l} S_1 = j\omega_d = j\omega_0 \\ S_2 = -j\omega_d = -j\omega_0 \end{array} \right.$$

❋ در اینصورت S را فرکانس موهومی گویند .

$$v(t) = A_1 \cos\left(\omega_d\, t\right) + A_2 \sin\left(\omega_d\, t\right)$$

مثال ۱) در مدار شکل زیر اگر $v(t) = 4e^{-t}\cos t$ باشد , آنگاه $i\,(\;)$ را به دست آورید .



تذکر : امپدانس سلفی به صورت $\dot{X}_L = S\,L$ و امپدانس خازن به فرم $\dot{X}_C = \frac{1}{S\,C}$ تعریف می شود , بنابراین :

$$\dot{X}_L = S\,L = -2 + j2$$
$$\dot{X}_C = \frac{1}{S\,C} = \frac{2}{-1+j}$$

❋ همچنین با توجّه به معادلهٔ ولتاژ که :

$$S = -\alpha + j\omega_d$$

اگر معادله ولتاژ با S هم ارز قرار گیرند , پس :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \omega_d = 1 \end{array} \right. \Rightarrow S = -1 + j$$

زیرا :

$$v(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_d\, t + \varphi\right)$$
$$v(t) = \left(A_1 \cos\omega_d\, t + A_2 \sin\omega_d\, t\right)e^{-\alpha t}$$

پس مقادیر L و C نیز به دست می آیند .

$$\dot{X}_L = -2 + j2 = 2\left(-1+j\right) = 2S \;\Rightarrow L = 2(H)$$
$$\dot{X}_C = \frac{2}{-1+j} = \frac{1}{0.5\left(-1+j\right)} = \frac{1}{0.5S} \;\Rightarrow C = 0.5(F)$$

حل مسئله :

$$I = \frac{V}{Z}$$

$$Z_T = 2 + \left[\frac{2}{-1+j} \,||\, \left[(-2+j2)+4\right]\right] = 2 + \left[\frac{2}{-1+j} \,||\, (2+j2)\right]$$

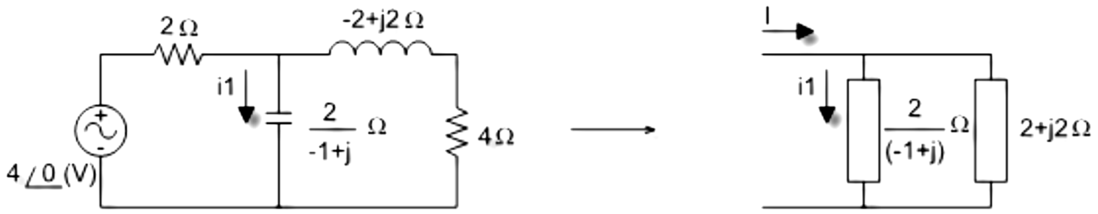
$$Z_T = 2 + \frac{\frac{2}{-1+j} \times 2 + j2}{\frac{2}{-1+j} + 2 + j2} \Rightarrow Z_T = 2 + \frac{\frac{4+j4}{-1+j}}{\frac{2+(-2-j2+j2-2)}{-1+j}}$$

$$Z_T = 2 + \frac{4+j4}{-2} = 2 + (-2-j2)$$

$$Z_T = -j2(\Omega)$$

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{4\angle 0}{2\angle -90} \Rightarrow I = 2\angle 90°$$

مثال ۲) جریان i_1 در شکل زیر چقدر است ؟



حل) از تقسیم جریان :

$$I_1 = \frac{2+j2}{(2+j2) + \frac{2}{-1+j}} \times 2\angle 90°$$

$$I_1 = \frac{(2+j2)}{\frac{-\cancel{2} - j2 - 2 + \cancel{2}}{-1+j}} \times 2\angle 90°$$

$$I_1 = \frac{(2+j2)(-1+j)}{-2} \times 2\angle 90°$$

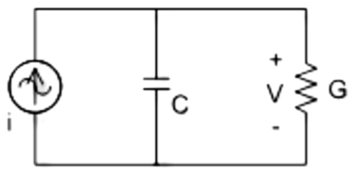
$$I_1 = \frac{-4}{-2} \times 2\angle 90° \longrightarrow I_1 = 4\angle 90°$$

$$i_1(t) = 4e^{-t} \cos(t+90) \longrightarrow \boxed{i_1(t) = -4e^{-t} \sin t}$$

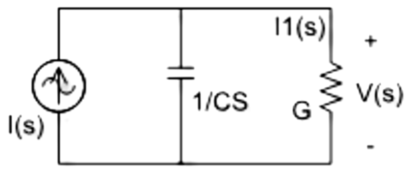
تابع شبکه : Network Function

نسبت تابع پاسخ به تابع تحریک را تابع شبکه گویند .معمولاً تابع شبکه را با $H(S)$ نمایش می دهند . تابع شبکه در حوزهٔ فرکانس مختلط تعریف می شود .

مثال ۳) در مثال فوق تابع نزدیک جریان و $I(S)$ و تابع پاسخ ولتاژ $V(S)$ می باشد . مطلوب است $H(S)=\dfrac{V(S)}{I(S)}$



حل : مدار را به حوزه فرکانس مختلط می بریم ، سپس نسبت ولتاژ دو سر مقاومت به جریان ورودی را تعیین می کنیم :



$$I_1(S)=\frac{\frac{1}{CS}}{\frac{1}{G}+\frac{1}{CS}}\cdot I(S)=\frac{\frac{1}{CS}}{\frac{CS+G}{CS\,G}}\,I(S)$$

$$I_1(S)=\frac{G}{G+CS}\cdot I(S)$$

$$G=\frac{1}{R}$$

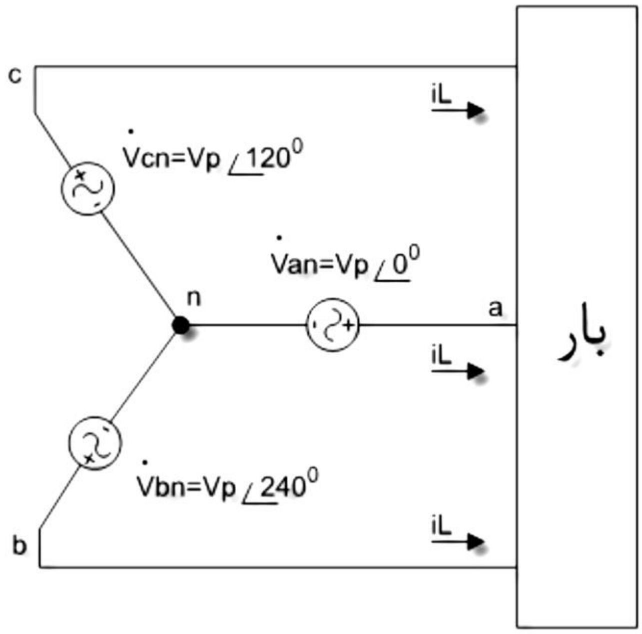
$$V(S)=\frac{I_1(S)}{G}=\frac{\frac{G}{G+CS}}{G}\cdot I(S)$$

$$V(S)=\frac{1}{G+CS}$$

$$\boxed{H(S)=\frac{V(S)}{I(S)}=\frac{1}{G+CS}}$$

فصل دوازدهم

سیستم های سه فازه :



$$|V_{an}|=|V_{bn}|=|V_{cn}|=V_P$$ ولتاژ فازي

* یکی از این ولتاژها به عنوان مبدأ (مبناء) انتخواب می شود :

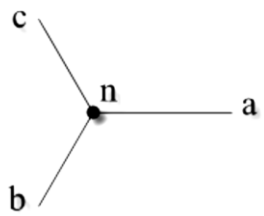
یا

$\dot{V}_{an}=V_P\angle 0$	$\dot{V}_{an}=V_P\angle 0$
$\dot{V}_{bn}=V_P\angle 240^\circ$	$\dot{V}_{bn}=V_p\angle -120^\circ$
$\dot{V}_{cn}=V_P\angle 120^\circ$	$\dot{V}_{cn}=V_P\angle -240^\circ$

* سیستم دستگاهی فوق را دستگاه سه فاز با توالی مثبت می نامند .

توالی فاز :

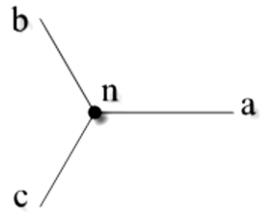
(توالی مثبت)



$$\begin{cases} V_{an} = V_P \angle 0 \\ V_{bn} = V_p \angle -120° \\ V_{cn} = V_P \angle 120° \end{cases} \qquad \begin{cases} a\ b\ c \\ b\ c\ a \\ c\ a\ b \end{cases}$$

ترتیب گذاشتن خود ولتاژ فازی از یک نقطهٔ ثابت در جهت نا ساعتگرد (جهت مثلثاتی) را توالی فاز می نامند .

(توالی منفی)



$$\begin{cases} V_{an} = V_P \angle 0 \\ V_{bn} = V_p \angle 120° \\ V_{cn} = V_P \angle -120° \end{cases}$$

مزایای سیستم سه فاز :

۱- از آنجا که بین هر یک از منابع $120°$ درجه اختلاف فاز وجود دارد , بنابراین قدرت لحظه ای در یک سیستم سه فازه هیچ گاه به صفر نمی رسد .

۲- در مدارات یکسوساز , ضربان یا رایپل موج یکسو شدهٔ سه فاز مکتر از تک فاز می باشد .

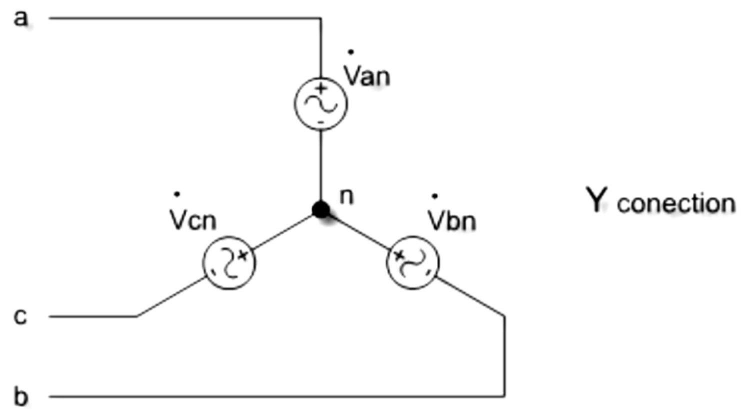
۳- راه اندازی موتورهای سه فاز توسّط میدان دوّار مغناطیسی در سیستم های تک فاز نیاز به سیم پیچ راه انداز دارد , در حالی که در سیستم های سه فاز , میدان دوّار با گشتاور خوبی موجود است .

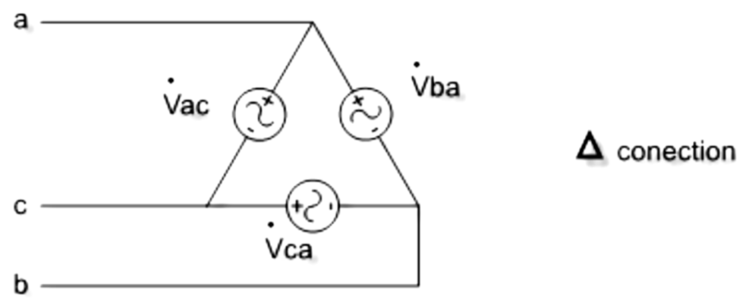
۴- تولید برق سه فاز از مجموع سه تا برق تکفاز با قدرت مشابه ارزانتر است .

۵- انتقال نیرو در برقِ سه فاز به علّت حذفِ سیم نول بسیار ارزانتر است .

منابع ولتاژ سه فاز :

منابع ولتاژ سه فاز عمدتاً به دو فرم ستاره (Y) و یا مثلث (Δ) می باشد .





بعضی از تعاریف :

۱- ولتاژ فازی : ولتاژ دو سر هر یک از منابع را ولتاژ فازی گویند و آنرا با V_P نشان می دهند .

۲- ولتاژ خطّی : ولتاژ بین هر دو خط انتقال را ولتاژ خطّی گویند و آنرا با V_L نشان می دهند .

۳- جریان فازی : جریان داخل هر یک از منابع را جریان فازی گویند و آنرا با I_P نشان می دهند .

۴- جریان خط : جریانی که از هر یک از خطوط انتقال عبور می کند را جریان خط گویند و آنرا با I_L نشان می دهند .

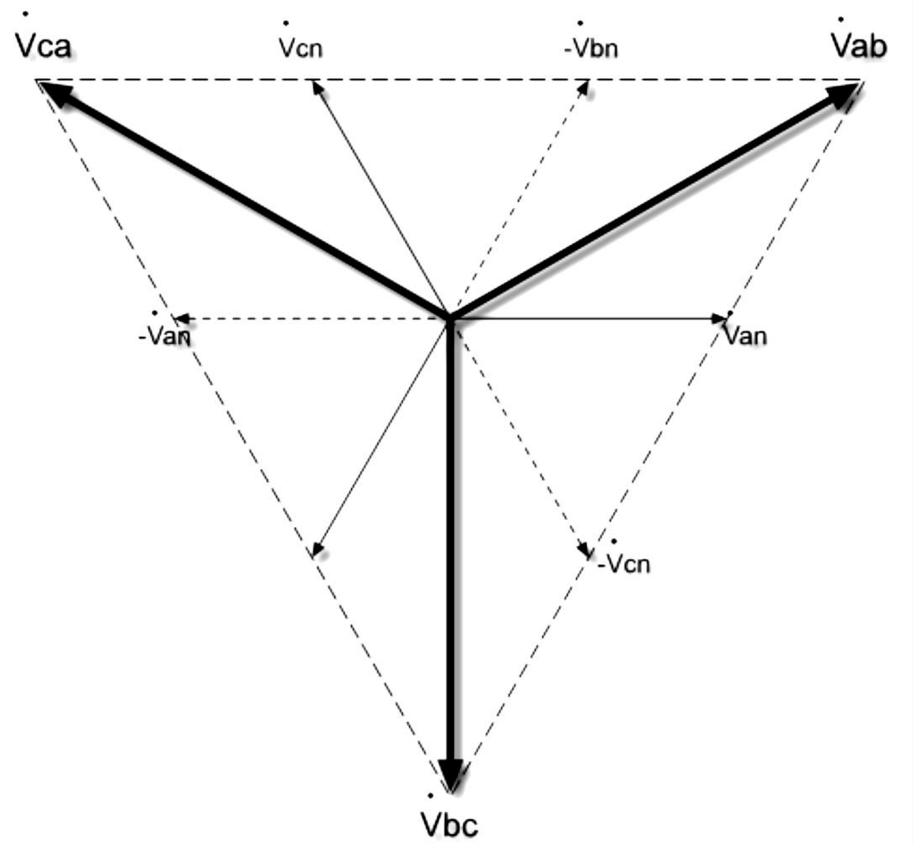
❋ در اتّصال ستاره , جریان های فازی و خطّی با هم برابر ولی ولتاژهای فازی و خطی به نسبت $\sqrt{3}$ می باشد , به طوری که :

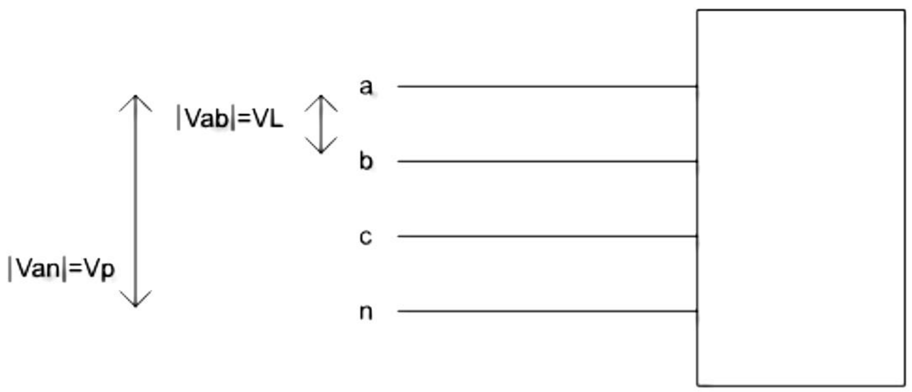
$$Y: \left| \begin{array}{l} I_L = I_P \\ V_L = \sqrt{3}\ V_P \end{array} \right.$$

$$\Delta: \left| \begin{array}{l} I_L = \sqrt{3}\ I_P \\ V_L = V_P \end{array} \right.$$

ولتاژ خط (Line Voltage) :

سیستم سه فازهٔ متعادل در توالی مثبت





$$\dot{V}_{ab}=\dot{V}_{an}-\dot{V}_{bn}=\dot{V}_{an}+\left(-\dot{V}_{bn}\right)$$

$$\begin{cases}\dot{V}_{ab}=\dot{V}_{an}-\dot{V}_{bn}\\ \dot{V}_{bc}=\dot{V}_{bn}-\dot{V}_{cn}\\ \dot{V}_{ca}=\dot{V}_{cn}-\dot{V}_{an}\end{cases}$$

اثبات :

نکته ۱) جمع ولتاژ های سه فاز صفر است :

$$\dot{V}_{ab}+\dot{V}_{bc}+\dot{V}_{ca}=0$$
$$\left(\cancel{\dot{V}_{an}}-\cancel{\dot{V}_{bn}}\right)+\left(\cancel{\dot{V}_{bn}}-\cancel{\dot{V}_{cn}}\right)+\left(\cancel{\dot{V}_{cn}}-\cancel{\dot{V}_{an}}\right)=0$$
$$\Rightarrow 0=0$$

نکته ۲) ولتاژ خطی $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فازی است :

$$V_L=\sqrt{3}V_P$$
$$\dot{V}_{ab}=\dot{V}_{an}-\dot{V}_{bn}=\dot{V}_{an}+\left(-\dot{V}_{bn}\right)$$
$$\dot{V}_{ab}=V_P\angle 0+V_P\angle 60^\circ$$
$$\dot{V}_{ab}=V_P+V_P\cos 60^\circ+jV_P\sin 60^\circ$$
$$\dot{V}_{ab}=V_P\left(1+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{V_2}{2}\left(3+j\sqrt{3}\right)$$
$$\dot{V}_{ab}=\frac{V_P}{2}\sqrt{3^2+3^2}\angle\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\dot{V}_{ab}=\sqrt{3}\,V_P\angle 30^\circ$$
$$V_L=\sqrt{3}\,V_P$$
$$\dot{V}_{ab}=V_L\angle 30^\circ$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که در سیستم سه فازه متعادل با توالی مثبت روابط زیر صادق است :

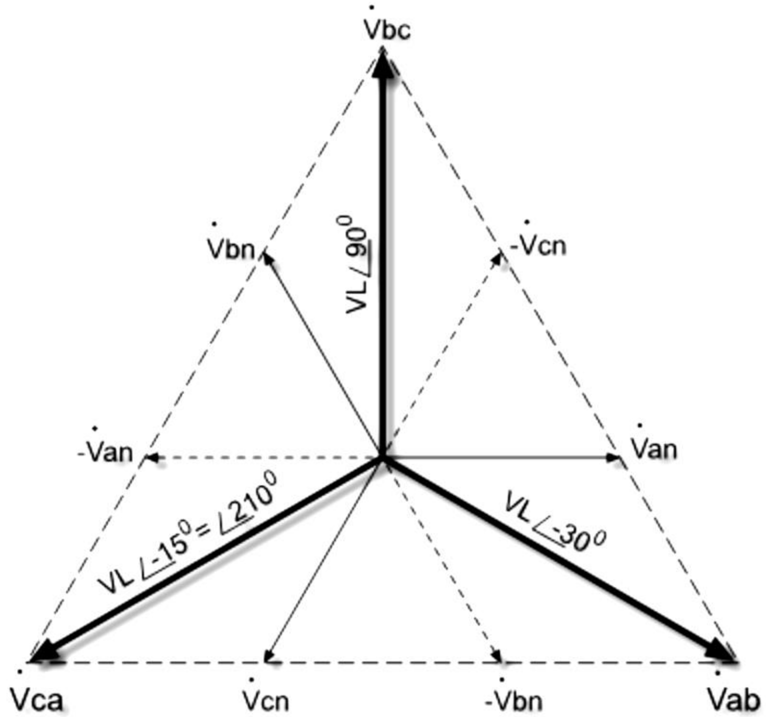
$$\begin{cases}\dot{V}_{ab}=V_L\angle 30^\circ\\ \dot{V}_{bc}=V_L\angle -90^\circ\\ \dot{V}_{ca}=V_L\angle -210^\circ\end{cases}$$

❊ به طوری که

$$V_L=\sqrt{3}V_P$$

❊ در سیستم سه فازه متعادل با توالی منفی نیز می توان نشان داد که :

اوّلاً : دیاگرام برداری ولتاژها مانند شکل زیر است .



ثانیاً : روابط ولتاژی ذیل نیز در سیستم سه فازه متعادل با توالی منفی صادق است .

$$\begin{cases} \dot{V}_{ab} = V_L\angle -30^\circ \\ \dot{V}_{bc} = V_L\angle 90^\circ \\ \dot{V}_{ca} = V_L\angle 210^\circ \end{cases}$$

نکته : برای حل سیستم های سه فازه ابتدا معادل تکفاز آنرا (برای هر فاز) تعیین کرده , سپس آنرا حل نموده و در نهایت برای سه فاز تعمیم می دهیم .

مثال ۱) مطلوب است تعیین جریان ها و ولتاژها و قدرت کل شبکه ای با اتّصال ستاره–ستاره در صورتی که $\dot{V}_{an} = 200\angle 0$ ولت و $\dot{Z}_P = 100\angle 60^\circ$ اهم باشد .

حل) $V_L = \sqrt{3}V_P = \sqrt{3}\times 200 = 346\ (V)$

$$\begin{cases} \dot{V}_{ab} = 346\angle 30^\circ \\ \dot{V}_{bc} = 346\angle -90^\circ \\ \dot{V}_{ca} = 346\angle -210^\circ \end{cases}$$

$$\dot{I}_{an} = \frac{\dot{V}_{an}}{\dot{Z}_P} = \frac{200\angle 0}{100\angle 60} = 2\angle -60°(A)$$

$$\dot{I}_{bn} = \frac{\dot{V}_{bn}}{\dot{Z}_P} = \frac{200\angle -120}{100\angle 60} = 2\angle -180°(A)$$

$$\dot{I}_{cn} = \frac{\dot{V}_{cn}}{\dot{Z}_p} = \frac{200\angle 120°}{100\angle 60°} = 2\angle 60°(A)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{an} = \dot{I}_a = 2\angle -60°(A) \\ \dot{I}_{bn} = \dot{I}_b = 2\angle -180°(A) \\ \dot{I}_{cn} = \dot{I}_c = 2\angle 60°(A) \end{cases}$$

❄ تعیین توان :

$$\dot{P} = \dot{V}\ \dot{I}^*$$

$$\dot{P}_{an} = 200\angle 0 \times 2\angle 60°$$

$$\dot{P}_{an} = 400\angle 60°$$

$$P_{an} = 400\cos 60° + j400\sin 60° = 200 + j346$$

براي هر فاز $\begin{cases} P_0 = 200(w) \\ Q_0 = 346(VAR) \\ S_0 = 400(VA) \end{cases}$

چون بار متعادل است :

$$P_T = 3P_P = 600(w) \qquad Q_T = 3Q_P = 1038(VAR)$$

$$S_T = 3S_2 = 1200(VA) \qquad P\cdot F = \cos 60° = 0.5$$

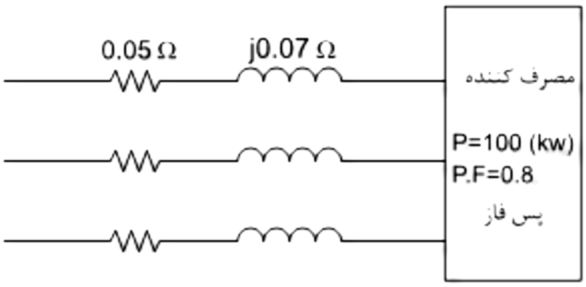
مثال ۲) برای انتقال قدرتِ $100(kW)$, با ضریب قدرت 0.8 پس فاز , از کابلی استفاده شده که امپدانس کابل $0.05 + j0.07$ می باشد . مطلوب است تعیین ولتاژی که به مصرف کننده می رسد , اگر $\dot{V}_{an} = 231\angle 0$ باشد .

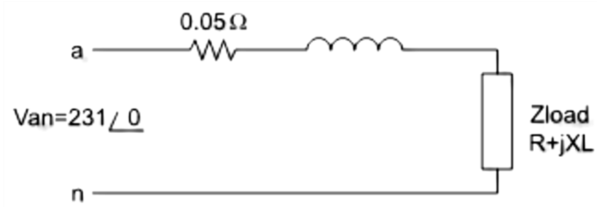
تذکر : در مصرف کننده های متعادل سه فاز نیازی به سیم نول نیست . در صورتی که از سیم نول استفاده کنیم , باید افت ولتاژ سیم نول در محاسبات منظور شود .

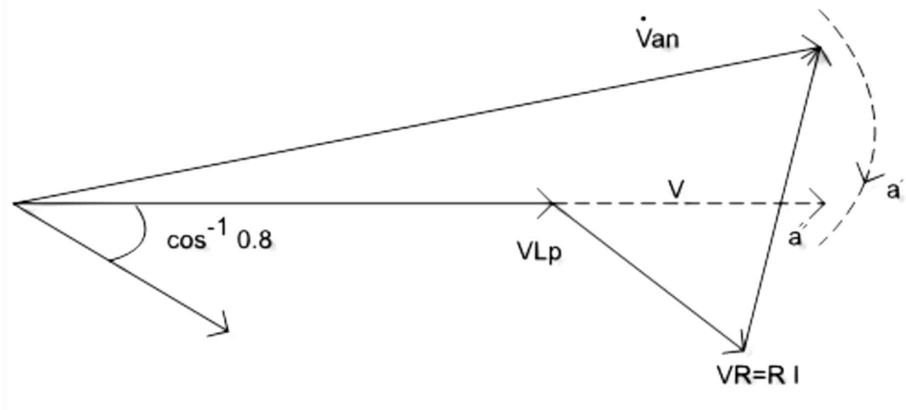
$$\dot{P} = \dot{V}\ \dot{I}^*$$

$$P = \sqrt{3}\, V_L\ I_L \cos\varphi$$

$$100000 = 3V_P \cdot I_P \times 0.8 \Rightarrow V_P\ I_P = 41666.7$$







$$\left|\dot{V}_{an}\right| = V_{a'n} \cong V_{a''n}$$

$$V_{an} = V_L + \Delta V$$

$$\Delta V = R\,I\cos\varphi + x\,I\sin\varphi$$

$$231 = V_L + \left(0.05\times 0.8 + 0.007 + 0.6\right) I$$

$$231 = V_L + 0.0442\,I$$

$$V_P\;I_P = 41666.7\;\Rightarrow\; I = \frac{41666.7}{V_P}$$

$$231 = V_P + 0.0442\times\frac{41666.7}{V_P}$$

$$231 = V_P + \frac{1841.7}{V_P}$$

$$V_P^2 - 231V_P + 1841.7 = 0$$

$$V_P = \frac{231}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{231}{2}\right)^2 - 1841.7}$$

$$V_P = 115.5 \pm 107 = 8.5(V) \longrightarrow V_P = \begin{cases} \rightarrow\; 222.7(V) \\ \rightarrow\; 8.3(V)\;\; \text{غ غ ق} \end{cases}$$

تذکر : جواب به دست آمده را می توانیم برای تعیین مقدار دقیق به کاربرد که عملاً می توان گفت همین ولتاژ با تقریب بسیار خوب پاسخ مسئله است .

مثال ۳) در تمرین قبل چنانچه بخواهیم به مصرف کننده ولتاژ 220 ولت برسد , ولتاژ ورودی شبکه چقدر خواهد بود ؟

$$P = 3V_P\ I_P \cos\varphi$$

$$I_P = \frac{P}{3V_P \cos\varphi} = \frac{100000}{3\times 220\times 0.8} \Rightarrow \quad I_P = 189.4\ (A)$$

$$\dot{I}_P = 189.4\angle -36.8^\circ\ (A)$$

$$\dot{Z}_P = \frac{\dot{V}_P}{\dot{I}_P} = \frac{220\angle 0}{189.4\angle -36.8}$$

$$\dot{Z}_P = 1.16\angle 36.8^\circ = 0.928 + j0.696\ (\Omega)$$

$$\begin{cases} R = 0.928(\Omega) \\ X_L = 0.696(\Omega) \end{cases}$$

$$V_{an} = Z_T\ I_P$$

$$Z_T = (0.05 + 0.928) + j(0.007 + 0.696)$$

$$Z_T = 0.978 + j0.703 = 1.204\angle 35.71^\circ(\Omega)$$

$$\dot{V}_{an} = 1.204\angle 35.71^\circ \times 189.4\angle -36.8^\circ(V)$$

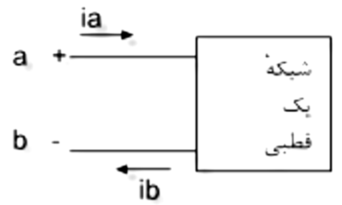
$$\dot{V}_{an} = 228.04\angle -1.16^\circ(V)$$

$$V_L = \sqrt{3}V_P$$

$$\boxed{V_L = 395(V)}$$

فصل سیزدهم

شبکهٔ دو قطبی :

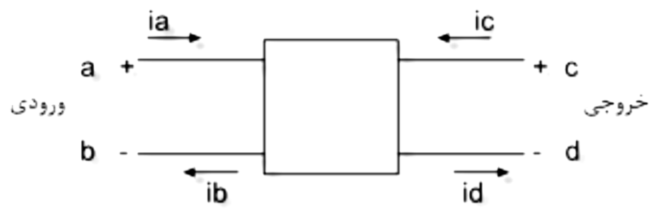


دو سر ترمینال که یک سیگنال می تواند از آن طریق به شبکه وارد یا از آن خارج گردد یک قطب یا One Port نامیده می شود و شبکه ای که فقط یک جفت از این دو سر را داشته باشد « شبکهٔ یک قطبی » One Port Network می نامند .

در شبکه های دو قطب Two Port , منابع دو بار باید بین سرهای نشان داده شده متّصل گردد .

مثلاً هیچ وسیله ای را نمی توان بین a و c با d و b متّصل نمود .

در شبکه های دو قطبی , فقط به V و I , سرهای شبکه تأکید دارد و به داخل شبکه کاری ندارد .



❋ برای شبکهٔ دو قطبی شرایط خاصی را قائل می شویم که عبارتند از :

۱- هیچ گونه انرژی ذخیره شدهٔ اوّلیه ای در شبکه وجود ندارد , به عبارت دیگر کلیهٔ شرایط اوّلیهٔ موجود صفر است .

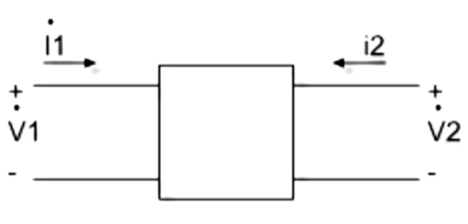
۲- هیچ گونه منابع مستقل ولتاژ یا جریان در شبکه موجود نبوده و تنها منابع وابسته می تواند در مدار وجود داشته باشد .

۳- برای هر قطب , جریان وارده برابر با جریان خارج شده از آن قطب است , یعنی به عبارتی $i_a = i_b$ و $i_c = i_d$ می باشد .

۴- همانطور که بیان شد , هیچ گونه اتّصالی ما بین سرهای ac , ad , bc و bd نمی بایست وجود داشته باشد .

❋ معمولاً برای هر شبکهٔ دو قطبی , شش پارامتر در نظر گرفته می شود که سه تا از مهمترین آنها عبارتند از پارامترهای امپدانس , ادمیتانس و هایبرید .

۱- پارامترهای ادمیتانس $\dot{Y}$:



طبق تعریف :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 + y_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

❋ y_{ij} پارامترهای ادمیتانس اتّصال کوتاه نامیده می شود .

y_{11} : ادمیتانس ورودی اتّصال کوتاه :

$$y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\Bigg|_{\dot{V}_2 = 0}$$

y_{12} : ادمیتانس انتقالی اتّصال کوتاه :

$$y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\Bigg|_{\dot{V}_1 = 0}$$

y_{21} : ادمیتانس انتقالی اتّصال کوتاه :

$$y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\Bigg|_{\dot{V}_2 = 0}$$

y_{22}:ادمیتانس خروجی اتّصال کوتاه :

$$y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\Bigg|_{\dot{V}_1 = 0}$$

* گاهی دو معادلهٔ فوق را به شکل زیر نشان می دهند .

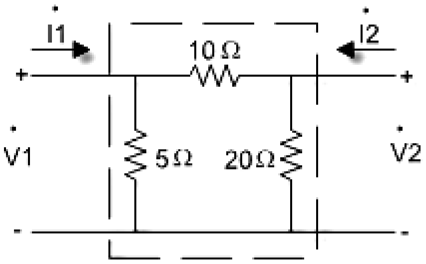
$$[\,I\,] = [\,y\,][\,V\,]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

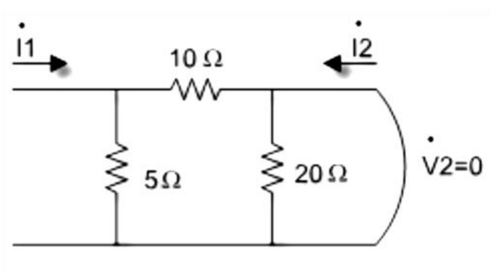
$$[y\,] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

* ماتریس ادمیتانس

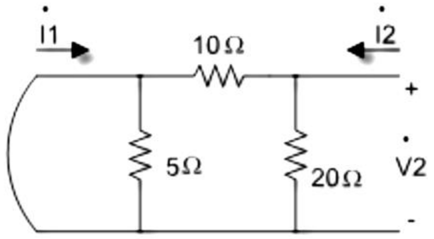
مثال ۱) مطلوب است تعیین پارامترهای ادمیتانس :



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11}\,\dot{V}_1 + y_{12}\,\dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 = y_{21}\,\dot{V}_1 + y_{22}\,\dot{V}_2 \end{cases}$$



$$y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\Bigg|_{\dot{V}_2 = 0} \qquad \Rightarrow \qquad y_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow y_{11} = 0.3(\upsilon)$$



$$y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\bigg|_{\dot{V}_1 = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{10} \Rightarrow y_{12} = \frac{I_1}{10} = -\frac{1}{10} = -0.1(\upsilon)$$

$$y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\bigg|_{\dot{V}_2 = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{I}_2 = \frac{-V_1}{10} \Rightarrow y_{21} = -0.1(\upsilon)$$

$$y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\bigg|_{\dot{V}_1 = 0} \qquad \Rightarrow \qquad y_{22} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \Rightarrow y_{22} = 0.15(\upsilon)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 0.3\dot{V}_1 - 0.1\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = -0.1\dot{V}_1 + 0.15\dot{V}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

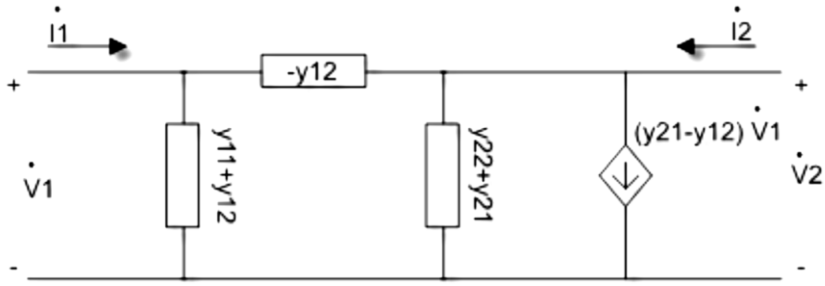
نکته : اگر $y_{12} = y_{21}$ باشد , مدار را دو جانبه گویند .
همچنین در حالت کلّی اگر $y_{ij} = y_{ji}$ باشد , مدار دو جانبه است .

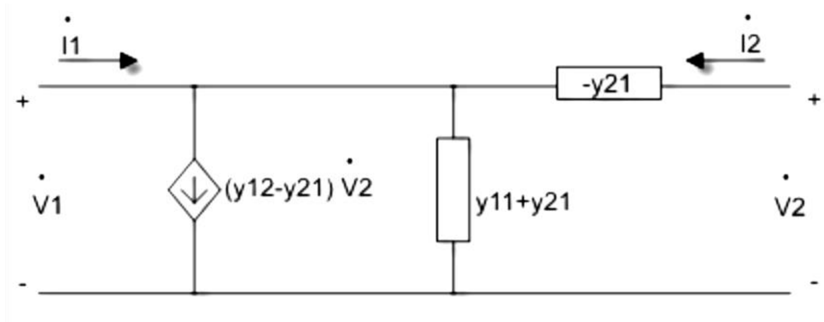
قضیهٔ مهم پاسخی :

در هر شبکهٔ غیر فعّالِ دو جانبه $y_{ij} = y_{ji}$, تعویض محل منبع ولتاژ ایده آل و آمپرمتر (که اوّلی مثلاً در شاخه y و دوّمی در شاخهٔ x مستقر است) با یکدیگر انحرافِ عقربهٔ آمپرمتر را تغییر نمی دهد .

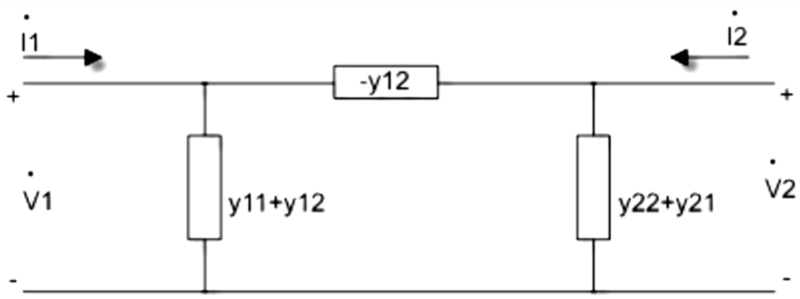
مدارات معادل شبکۀ دو قطبی :

پارامترهای ادمیتانس :

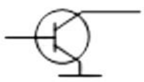


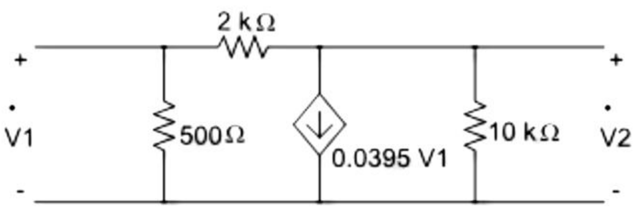


* در شبکۀ دو جانبه $y_{12} = y_{21}$ پس منبع وابسته حذف می گردد .



مثال ۲) مدار زیر معادل تقریبی ترانزیستور است که گرۀ پائینی امیتر , گرۀ سمت چپ بالایی بیس , گرۀ سمت راست بالایی کلکتور است . مشخّصات شبکه را به دست آورید .





حل) با مقایسهٔ مدار فوق با معادل شبکه دو قطبی مشاهده می شود که :

$$-y_{12}=\frac{1}{2k}\ \Rightarrow y_{12}=-0.5(mV)$$

$$y_{11}+y_{12}=\frac{1}{500}$$

$$y_{11}=\frac{1}{500}+0.5\ \Rightarrow \boxed{y_{11}=2.5(mV)}$$

$$y_{21}-y_{12}=0.0395$$

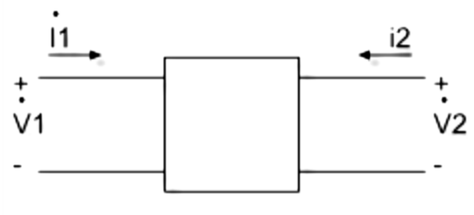
$$y_{21}=0.0395-0.0005$$

$$y_{21}=0.039=39(mV)$$

$$y_{22}+y_{21}=\frac{1}{10(k\Omega)}=0.1(mV)$$

$$y_{22}=0.1-(-0.5)=0.6(mA)$$

پارامترهای امپدانس (مدار باز) :

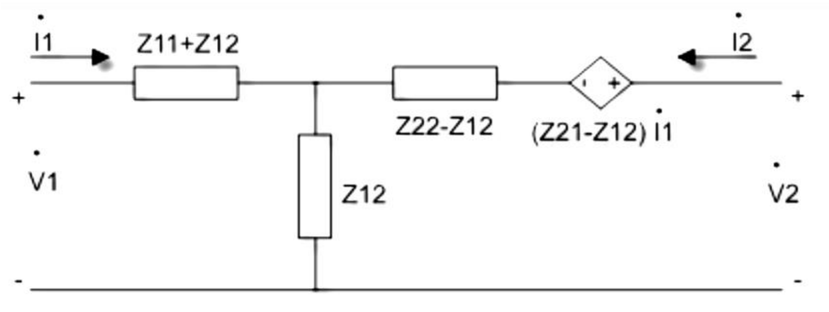


$$\begin{cases}\dot V_1=Z_{11}\,\dot I_1+Z_{12}\,\dot I_2\\ \dot V_2=Z_{21}\,\dot I_1+Z_{22}\,\dot I_2\end{cases}$$

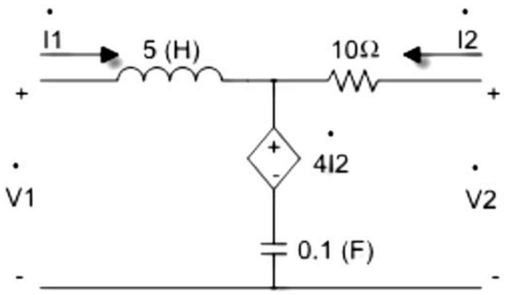
$$\begin{bmatrix}\dot V_1\\ \dot V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{bmatrix}$$

به ماتریس $[Z]$ پارامترهای امپدانس گویند . چون نسبت V به I می باشد , پس واحد آن Ω (اهم) است .

مدار معادل :



مثال ۳) در شکل زیر مطلوب است , تعیین پارامترهای Z شبکهٔ دو قطبی .

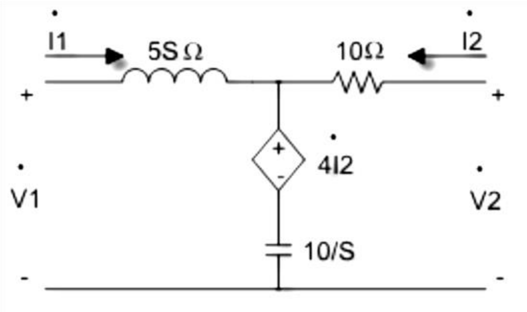


حل) مقادیر X_1 و X_2 چون فرکانس را نداریم پس مجبوریم $S = j\,\omega$ فرض نموده , در اصطلاح مدار را به حوزهٔ S ببریم .

$$\dot{X}_L = j\,\omega\,L = S\,L$$

$$\dot{X}_C = \frac{1}{j\,\omega\,C} = \frac{1}{S}$$

* شکل مدار در حوزهٔ S عبارت است از :



* معادلات پارامترهای امپدانس را می نویسیم :

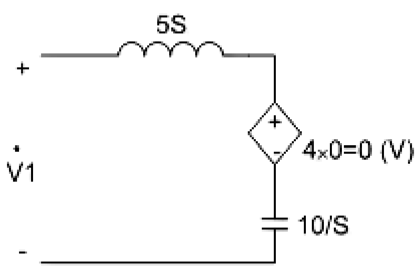
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Z_{11}\,\dot{I}_1 + Z_{12}\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = Z_{21}\,\dot{I}_1 + Z_{22}\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

* هر یک از امپدانس ها را محاسبه می کنیم :

۱- محاسبهٔ Z_{11} :

$$Z_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2 = 0}$$

* در این حالت شکل مدار مانند زیر است :

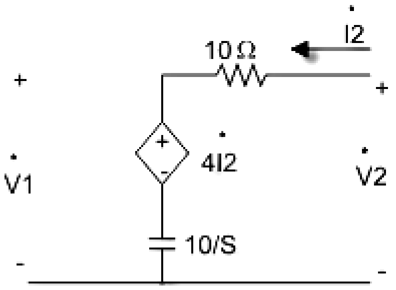


$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{I_1} = 5S + \frac{10}{S}$$

۲- محاسبهٔ Z_{12} :

$$Z_{12}=\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\Bigg|_{\dot{I}_1=0}$$

* چون $\dot{I}_1=0$, پس از $5S$ اهم جریانی عبور نمی کند و کل ولتاژ $\dot{V}_1$ روی شاخه موازی (منبع وابسته $4I_2$ و خازن $\frac{10}{S}$) می افتد .



$$\dot{V}_1=4\dot{I}_2+\frac{10}{S}\dot{I}_2$$

$$Z_{12}=\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}=4+\frac{10}{S}$$

۳- محاسبهٔ Z_{21} :

$$Z_{21}=\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\Bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

* مانند حالت قبل KVL می نویسیم :

$$\dot{V}_2=\underbrace{4\dot{I}_2}_{0}+\frac{10}{S}\dot{I}_1$$

$$Z_{21}=\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}=\frac{10}{S}$$

۴- محاسبهٔ Z_{22} :

$$Z_{22}=\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\Bigg|_{\dot{I}_1=0}$$

$$\dot{V}_2=10\dot{I}_2+4\dot{I}_2+\frac{10}{S}\dot{I}_2$$ KVL در خروجي:

$$\Rightarrow \dot{V}_2=\dot{I}_2\left(14+\frac{10}{S}\right)$$

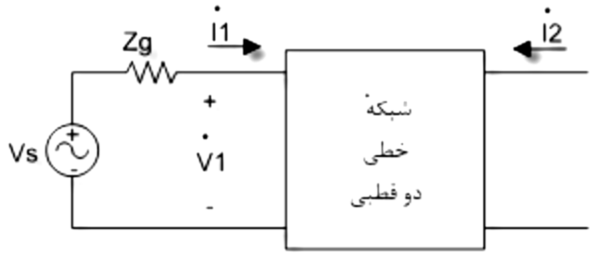
$$\Rightarrow Z_{22}=\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}=\left(14+\frac{10}{S}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_1\\ \dot{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5S+\frac{10}{S} & 4+\frac{10}{S}\\ \frac{10}{S} & 14+\frac{10}{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

$$[\,Z\,]=\begin{bmatrix}5S+\frac{10}{S} & 4+\frac{10}{S}\\ \frac{10}{S} & 14+\frac{10}{S}\end{bmatrix}$$

تعیین معادل تونن شبکهٔ دو قطبی با معلوم بودن پارامترهای امپدانس :

شبکهٔ خطی دو قطبی را در نظر گرفته , آنرا به منبع عملی با مقاومت داخلی Z_g و منبع ایده آل $\dot{V}_S$ وصل می کنیم . قبلاً دیدیم که معادلات پارامترهای امپدانس از رابطهٔ زیر به دست می آید .

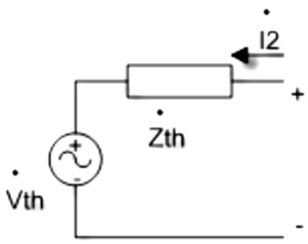


$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Z_{11}\,\dot{I}_1 + Z_{12}\,\dot{I}_2 & (1)\ \text{معادلهٔ} \\ \dot{V}_2 = Z_{21}\,\dot{I}_1 + Z_{22}\,\dot{I}_2 & (2)\ \text{معادلهٔ} \end{cases}$$

* حال KVL ورودی را می نویسیم .

$$\dot{V}_S = \dot{V}_1 + Z_g\,\dot{I}_1 \qquad (3)\ \text{معادلهٔ}$$

از آنجائیکه هدف , تعیین معادل تونن است , انتظار داریم در خروجی معادلی مانند شکل زیر برای مدار فوق داشته باشیم . در خروجی معادلی مانند شکل زیر برای مدار فوق داشته باشیم :



$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{th} + Z_{th}\,\dot{I}_2 \qquad (4)\ \text{معادلهٔ}$$

از چهار معادلهٔ فوق پارامترهای $\dot{V}_{th}$ و Z_{th} را می خواهیم به دست آوریم (معادلهٔ پارامتری)

معادلهٔ 3 را در معادلات 1 و 2 قرار داده , سپس معادله ای مانند 4 به دست می آوریم .

$$3 \rightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_S - Z_g\,\dot{I}_1$$

$$\dot{V}_S - Z_g\,\dot{I}_1 = Z_{11}\,\dot{I}_1 + Z_{12}\,\dot{I}_2$$

$$\left(Z_{11} + Z_g\right)\dot{I}_1 = \dot{V}_S - Z_{12}\,\dot{I}_2$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_S - Z_{12}\,\dot{I}_2}{Z_{11} + Z_g}$$

* این معادله را در 2 قرار می دهیم :

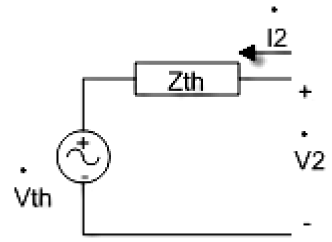
$$\dot{V}_2 = Z_{21}\left(\frac{\dot{V}_S - Z_{12}\,\dot{I}_2}{Z_{11}+Z_g}\right) + Z_{22}\,\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{11}-Z_g}\,\dot{V}_S + \left(Z_{22} - \frac{Z_{21}\,Z_{12}}{Z_{11}+Z_g}\right)\dot{I}_2$$

❋ این معادله شبیه معادلهٔ 4 است که با یکدیگر هم ارز قرار می دهیم :

$$\dot{V}_{th} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}+Z_g}\,\dot{V}_S$$

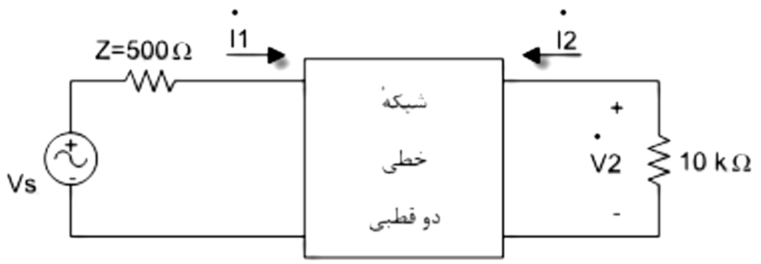
$$Z_{th} = Z_{22} - \frac{Z_{21}\,Z_{12}}{Z_{11}+Z_g}$$



مثال ۴) یک تقویت کنندهٔ امیتر مشترک دارای پارامترهای Z به صورت زیر است :

$$Z_{11} = 10^3(\Omega) \quad \otimes \quad Z_{12} = 10(\Omega) \quad \otimes \quad Z_{21} = -10^6(\Omega) \quad \otimes \quad Z_{22} = 10^4(\Omega$$

مطلوب است , تعیین ضرایب تقویت ولتاژ , جریان و قدرت , همچنین امپدانس ورودی و خروجی , سپس تعیین معادل تونن و تعیین ماکزیمم قدرتی که می توان از مدار دریافت نمود .



❋ معادلهٔ مشخصه

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Z_{11}\,\dot{I}_1 + Z_{12}\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_1 = Z_{21}\,\dot{I}_1 + Z_{22}\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

❋ معادلات ناشی از KVL ورودی خروجی مدار

$$\begin{cases} \dot{V}_S = \dot{V}_1 + Z_g\,\dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 = -Z_L\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = 10^3\,\dot{I}_1 + 10\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = -10^6\,\dot{I}_1 + 10^4\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_S = 500\,\dot{I}_1 + \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 = -10^4\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

* پس از حل :

$$\begin{cases}\dot{V}_1 = 0.75\dot{V}_S \\ \dot{V}_2 = -250\dot{V}_S\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{V}_S}{2000} \\ \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{V}_S}{40}\end{cases}$$

$$G_V = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{-250\dot{V}_S}{0.75\dot{V}_S} = -333.3$$

$$G_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = 50$$

$$G_P = \frac{-\frac{1}{2}\dot{V}_2\ \dot{I}_2^*}{\frac{1}{2}\dot{V}_1\ \dot{I}_1^*} = 16700$$

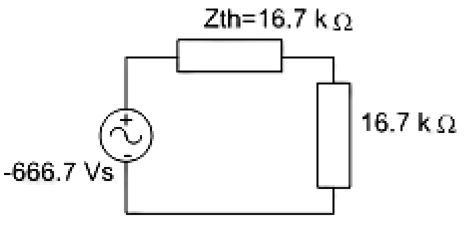
$$Z_{in} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = 1500(\Omega)$$

$$Z_{out} = Z_{th} = Z_{22} - \frac{Z_{12}\ Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \ \Rightarrow Z_{out} = 16.7(k\Omega)$$

بهرهٔ قدرت هنگامی حداکثر است که :

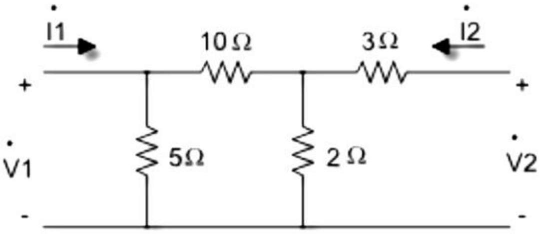
$$\dot{Z}_L = \dot{Z}_{out} = 16.7(k\Omega)$$

$$\dot{V}_{th} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}\dot{V}_S = -666.7V_S$$



$$P_{\max} = 17045(w)$$

مثال ۵) مطلوب است تعیین پارامترهای Z مدار زیر :

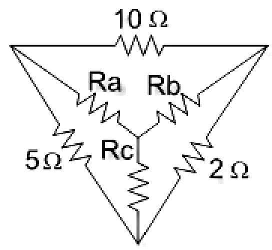


حل) مثلث موجود را به ستاره تبدیل می کنیم :

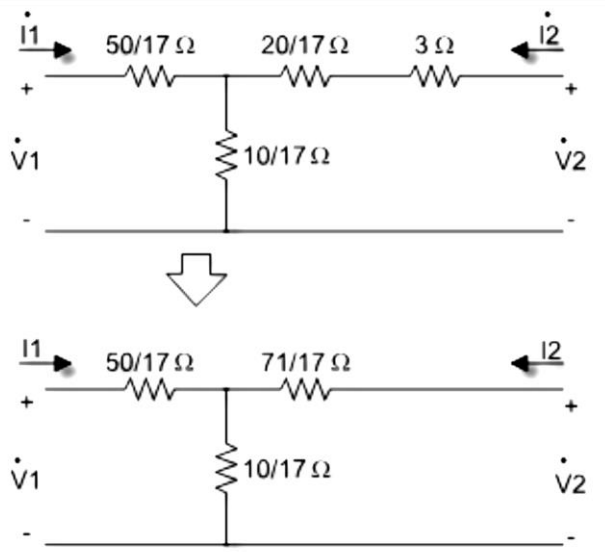
$$R_a = \frac{10 \times 5}{10+5+2} = \frac{50}{17}$$

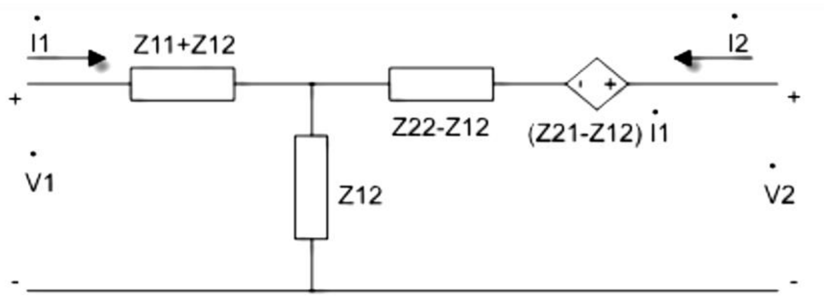
$$R_b = \frac{10 \times 2}{10+5+2} = \frac{20}{17}$$

$$R_C = \frac{5 \times 2}{10+5+2} = \frac{10}{7}$$



مدار به صورت زیر تبدیل می شود :





❋ با توجه به مدار معادل :

$$Z_{12} = \frac{10}{17}$$

$$Z_{11} - Z_{12} = \frac{50}{17} \Rightarrow Z_{11} = \frac{60}{17}$$

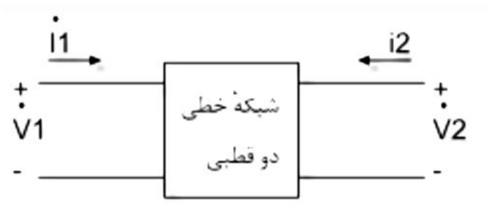
$$Z_{22} - Z_{12} = \frac{17}{17} \Rightarrow Z_{22} = \frac{81}{17}$$

$$Z_{21} - Z_{12} = 0 \Rightarrow Z_{21} = Z_{12} = \frac{10}{17}$$

* مدار دو جانبه است , زیرا $Z_{21} = Z_{12}$ است .

$$\left(Z_{21} - Z_{12}\right)\dot{I}_1 \qquad \dot{Z} = \begin{bmatrix} \frac{60}{17} & \frac{10}{17} \\ \frac{10}{17} & \frac{81}{17} \end{bmatrix}$$

پارامترهای هایبرید :



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = h_{11}\dot{I}_1 + h_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = h_{21}\dot{I}_1 + h_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

h_{11}: امپدانس ورودی , اتصال کوتاه

$$h_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2 = 0}$$

h_{12}: عکس ضریب تقویت ولتاژ , مدار باز

$$h_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

h_{21}: ضریب تقویت جریان , اتصال کوتاه

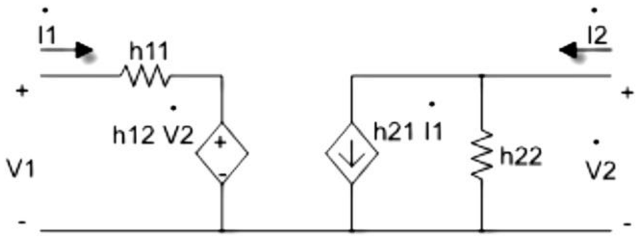
$$h_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2 = 0}$$

h_{22}: ادمیتانس خروجی مدار باز

$$h_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

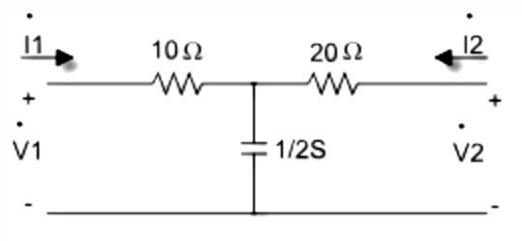
مدارمعادل پارامترهای هایبرید :



* مدار فوق شبیه معادل BJT ترانزیستور با اتصال دو قطبی می باشد .

$$\begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix}$$

مثال ۶) در مدار شکل زیر مطلوب است , تعیین پارامترهای هایبرید :



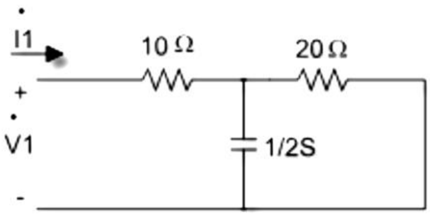
حل) معادلهٔ مشخصهٔ h را می نویسیم :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = h_{11}\,\dot{I}_1 + h_{12}\,\dot{V}_2 \\ \dot{I}_1 = h_{11}\,\dot{I}_1 + h_{12}\,\dot{V}_2 \end{cases}$$

۱- تعیین h_{11} :

$$h_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\Bigg|_{\dot{V}_2 = 0}$$

* معادل مدار در حالت $\dot{V}_2 = 0$ عبارت است از :



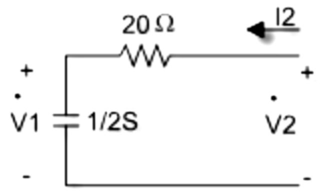
$$h_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \left(20 \,||\, \frac{1}{2S}\right) + 10 = \frac{\frac{20}{2S}}{20 + \frac{1}{2S}} + 10 = \frac{20}{40S+1} + 10$$

$$h_{11} = \frac{400S + 30}{40S + 1}$$

۲- تعیین h_{12} :

$$h_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\Bigg|_{\dot{I}_1 = 0}$$

※ معادل مدار فوق در حالت $\dot{I}_1 = 0$ یعنی ولتاژ $\dot{V}_1$ دو سر خازن می افتد :



$$h_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\frac{1}{2S}}{\frac{1}{2S}+20}\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \frac{1}{40S+1}\dot{V}_2$$

$$\boxed{\Rightarrow h_{12} = \frac{1}{40S+1}}$$

۳- تعیین h_{21} :

$$h_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\Bigg|_{\dot{V}_2 = 0}$$

※ حالت مداری مانند حالت 1 است .

$$\dot{I}_2 = -\frac{\frac{1}{2S}}{\frac{1}{2S}+20}\times \dot{I}_1 \Rightarrow \boxed{h_{21} = -\frac{1}{40S+1}}$$

۴- تعیین h_{22} :

$$h_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\Bigg|_{\dot{I}_1 = 0}$$

※ شکل مداری مانند حالت 2 است :

$$\dot{V}_2 = \left(20+\frac{1}{2S}\right)\dot{I}_2$$

$$h_{22} = \frac{1}{20+\frac{1}{2S}} \Rightarrow \boxed{h_{22} = \frac{2S}{40S+1}}$$

$$\left[\, h \,\right] = \begin{bmatrix} \frac{400S+30}{40S+1} & \frac{1}{40S+1} \\ \frac{-1}{40S+1} & \frac{2S}{40S+1} \end{bmatrix}$$

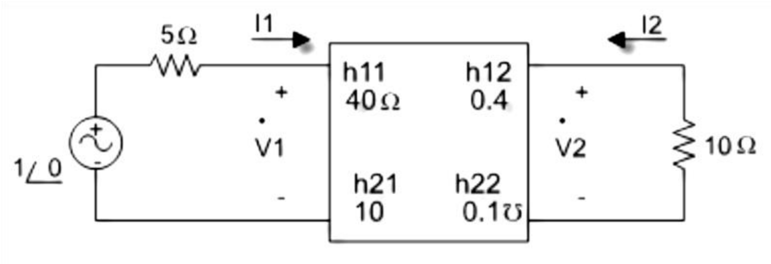
نکته : شرط هم پاسخی شبکه به کمک پارامترهای هایبرید این است که $h_{12}=h_{21}$ باشد .

مثال ۷) در مدار مقابل مطلوب است تعیین قدرت متوسط :

الف) تأمین شده توسط منبع سینوسی یک ولتی .

ب) تحویل شده به مقاومت ۱۰ اهم .

ج) تلف شده در مقاومت ۵ اهم .



❋ معادله مشخصهٔ هایبرید .

$$\begin{aligned}&\_1\\&-2\end{aligned}\begin{cases}\dot{V}_1=40I_1+0.4V_2\\ \dot{I}_2=10\dot{I}_1+0.1\dot{V}_2\end{cases}$$

❋ قانون اهم در خروجی

❋ KVL در خروجی

$$\begin{aligned}&\_3\\&-4\end{aligned}\begin{cases}\dot{V}_2=-10\dot{I}_2\\ \dot{V}_1=1-5\dot{I}_1\end{cases}$$

$$5\ \to\ 3\quad\Rightarrow \dot{I}_2=-\frac{\dot{V}_2}{10}$$

$$\begin{aligned}4\ \to\ 1\quad&\Rightarrow\Big|\ 1-5\dot{I}_1=40\dot{I}_1+0.4\dot{V}_2\\ 5\ \to\ 2\quad&\Rightarrow\Big|\ -\frac{\dot{V}_2}{10}=10\dot{I}_1+0.1\dot{V}_2\end{aligned}$$

$$\dot{I}_1=\frac{1}{25}(A)=0.04(A)\ \xrightarrow{\text{معادلة }(4)}\ \dot{V}_1=0.8(V)$$

$$\dot{V}_2=-2(V)\ \xrightarrow{\text{معادلة }(5)}\ \dot{I}_2=0.2(A)$$

الف (حل $P_{av}=\frac{1}{2}\times V_S\,\dot{I}_1^*=\frac{1}{2}\times1\times0.04\ \Rightarrow P_{av}=20\ (mw)$

ب (حل $P_{10\Omega}=\frac{1}{2}R\,I_{\max}^2=\frac{1}{2}\times10\times0.2^2\ \Rightarrow P_{10\Omega}=0.2\,(w)$

ج (حل $P_{5\Omega}=\frac{1}{2}R\,I_{\max}^2=\frac{1}{2}\times5\times0.04^2\ \Rightarrow P_{5\Omega}=4\ (mw)$

تمرین های تکمیلی

۱ - ولتاژ $X(t)=100\sin 314t$ به مداری شامل مقاومت 25Ω و خازن $80\mu f$ به طوری سری وصل شده. مطلوب است
الف- معادله جریان لحظه ای
ب- قدرت مصرفی
ج- مقدار اختلاف پتانسیل دو سر خازن در لحظه ای که جریان نصف مقدار بیشینه اش می باشد.
حل: راکتانس خازنی برابر است با:

$$X_c=\frac{1}{\omega c}=\frac{1}{314\times 80\times 10^{-6}}=39.8\Omega$$

بنابراین امپدانس کل

$$\dot{Z}=R-jX_c=25-j39.8=47\angle 57^\circ$$

مقدار بیشینه جریان می شود.

$$I_m=\frac{V_m}{Z}=\frac{100}{47}=2.13A$$

الف- بنابراین مقدار جریان لحظه ای به دست می آید:

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\theta)$$
$$i(t)=2.13\sin(314t+67.95^\circ)$$

ب- توان مصرفی نیز به دست می آید:

$$P=I_e^2R=\left(\frac{2.13}{\sqrt{2}}\right)^2\times 25=56.7w$$

ج- ولتاژ دو سر خازن ۹۰ درجه از جریان عقب تر است. معادله ولتاژ دو سر خازن می شود:

$$V_c(t)=V_{cm}\sin(314+57.95^\circ-90)$$
$$V_{cm}=I_mX_c=2.13\times 39.8=84.8V$$
$$V_c(t)=84.8\sin(314t-32.05^\circ)$$

با توجه به اینکه جریان نصف مقدار بیشینه اش است. پس:

$$I=0.5\times 2.13=1.065A$$

در معادله جریان لحظه ای قرار می دهیم تا زمان متناسب با مقدار جریان به دست آید.

$$1.065=2.13\sin(314t+57.95^\circ)$$
$$314t+57.95^\circ=\sin^{-1}(0.5)$$
$$314t+57.95^\circ=30^\circ\ or\ 150^\circ$$
$$\begin{cases}314t+57.95^\circ=30^\circ & \rightarrow\ 314t=-27.95^\circ\\ 314t+57.95^\circ=150^\circ & \rightarrow\ 314t=92.05^\circ\end{cases}$$

مقدار به دست آمده را در معادله ولتاژ لحظه ای دو سر خازن قرار می دهیم.
عبارت اول یعنی $314t=-27.95^\circ$ را قرار می دهیم:

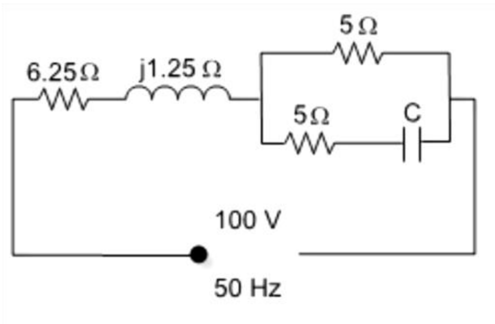
$$V_c = 84.8\sin(-27.95^\circ - 32.05^\circ)$$
$$= 84.8\sin(-60^\circ)$$
$$V_c = -73.5v$$

و عبارت دوم یعنی $314t = 92.05^\circ$ را در معادله لحظه ای ولتاژ دو سر خازن قرار داده و خواهیم داشت:

$$V_c = 84.8\sin(92.05^\circ - 32.05^\circ)$$
$$= 84.8\sin(60^\circ)$$
$$V_c = 73.5v$$

پس ولتاژ دو سر خازن در جریان نصف مقدار بیشینه 73.5 ولت می باشد.

۲- در مدار شکل زیر ظرفیت خازن چقدر خواهد بود اگر جریان کل و ولتاژ کل هم فاز باشند. پس جریان کل و توان مصرفی را بـه دسـت آورید.



حل: امپدانس کل مدار برابر است با:

$$\dot{Z} = (6.25 + j1.25) + (5) \parallel (5 - jX_c)$$
$$\dot{Z} = 6.25 + j1.25 + \frac{5(5 - jX_c)}{5 + 5 - jX_c}$$
$$\dot{Z} = 6.25 + j1.25 + \frac{250 + 5X_c^2}{100 + X_c^2} - j\frac{25X_c}{100 + X_c^2}$$
$$\dot{Z} = \left(6.25 + \frac{250 + 5X_c^2}{100 + X_c^2}\right) + j\left(1.25 - \frac{25X_c}{100 + X_c^2}\right)$$

برای اینکه جریان و ولتاژ هم فاز باشند مدار باید در حالت همنوایی باشد. پس مقدار موهومی امپدانس را صـفر قـرار مـی دهـیم تـا مـدار خاصیت اهمی خالص پیدا کند:

$$1.25 - \frac{25X_c}{100 + X_c^2} = 0$$
$$X_c = 10\Omega$$
$$\frac{1}{\omega c} = X_c$$
$$c = \frac{1}{2\pi\, f\, X_c} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 10}$$

$$c = 318\ \mu f$$

$$Z = 6.25 + \frac{250 + 5X_c^2}{100 + X_c^2}$$

$$Z = 6.25 + \frac{250 + 5 \times 10^2}{100 + 10^2}$$

$$Z = 10\ \Omega$$

که مدار اهمی خالص می باشد. جریان مدار برابر است با:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{10}$$

$$I = 10A$$

$$P = I^2 R = 10^2 \times 10$$

$$p = 1000\ w = 1\ kw$$

۳- یک مدار RLC سری به منبع ولتاژی با مقدار ثابت و فرکانس متغیر وصل شده است. جریان مدار در فرکانس $\omega_0 = 600\ rad/\sec$ بیشینه می شود و در فرکانس $\omega_0 = 400\ rad/\sec$ به نصف مقدار بیشینه افت می کند. اگر مقاومت مدار $3\ \Omega$ باشد مطلوب است مقادیر L و C

حل: جریان در مدار همنوایی بیشینه می شود. که مقدار آن برابر است با:

$$I_0 = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}$$

نسبت این جریان به جریان بیشینه برابر است با:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}$$

$$X_L = X_c \rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 c}$$

$$\frac{1}{c} = \omega_0^2 L$$

در معادله $\frac{I}{I_0}$ به جای $\frac{1}{c}$ مقدار فوق را قرار داده سپس از $(\omega_0 L)^2$ در پرانتز فاکتور می گیریم:

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

همچنین ضریب کیفیت مدار همنوای سری برابر است با:

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}$$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

مقادیر عددی را در معادله قرار داده تا Q به دست آید.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{400}{600}-\frac{600}{400}\right)^2}}$$

$$Q=2.1$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}$$

$$2.1=\frac{600\times L}{3}$$

$$L=10.5\ mH$$

همچنین

$$Q=\frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$2.1=\frac{1}{600\times 3\times C}$$

$$C=268\ \mu f$$

۴- ولتاژ $v(t)=250\sin\omega t+50\sin\left(3\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+20\sin\left(5\omega t+\frac{5\pi}{6}\right)$ به مدار RL سری با مقاومت $20\ \Omega$ و خود القایی $0.05\ H$ وصل شده است. مطلوب است: $\left(\omega=314\ {rad}/{s}\right)$

الف- جریان لحظه ای

ب- مقادیر موثر ولتاژ و جریان

ج- قدرت تامین کل

د- ضریب قدرت

حل: برای هارمونی اصلی:

$$X_1 = \omega L = 314 \times 0.05 = 15.7\Omega$$
$$Z_1 = R + jX_1 = 20 + j15.7 = 25.4\angle 38.1°\Omega$$

برای هارمونی سوم:

$$X_3 = 3\omega L = 3 \times 15.7 = 47.1\Omega$$
$$Z_1 = R + jX_3 = 20 + j47.1 = 55.5\angle 67°\Omega$$

برای هارمونی پنجم:

$$X_5 = 5\omega L = 5 \times 15.7 = 78.5\Omega$$
$$Z_5 = R + jX_5 = 20 + j78.5 = 81\angle 75.7°$$

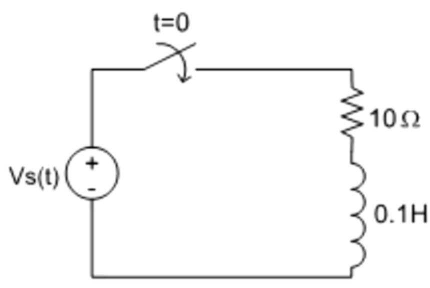
معادله جریان لحظه ای عبارتست از:

$$i = \frac{v}{Z}$$
$$i(t) = \frac{250}{25.4}\sin(\omega t - 38.1°) + \frac{50}{55.5}\sin(3\omega t + 60° - 67°) + \frac{20}{81}\sin(5\omega t + 150° - 75.7°)$$
$$i(t) = 9.85\sin(\omega t - 38.1°) + 0.9\sin(3\omega t - 7°) + 0.26\sin(5\omega t - 74.3°)$$

مقدار rms جریان از معادله زیر به دست می آید:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{3m}^2}{2} + \frac{I_{5m}^2}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{9.85^2}{2} + \frac{0.9^2}{2} + \frac{0.26^2}{2}}$$
$$I_{rms} = 7 \ (A)$$
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{250^2}{2} + \frac{50^2}{2} + \frac{20^2}{2}}$$
$$V_{ms} = 181 \ (V)$$
$$P = I_{rms}^2 R = 7^2 \times 20 = 980 \ (w)$$
$$\cos\Phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{rms}\ I_{rms}} = \frac{980}{181 \times 7}$$
$$\cos\Phi = 0.77$$

۵- ولتاژ سینوسی با فرکانس $50Hz$ و مقدار بیشینه 400 ولت به مدار RL سری به مقاومت 10Ω و خود القایی $0.1H$ وصل شده است. مطلوب است معادله جریان لحظه ای بعد از اتصال کلید، انرژی اولیه مدار صفر است.
0.02 ثانیه پس از اتصال کلید، جریان را محاسبه کنید.



حل: پاسخ کامل مدار را می نویسیم:

$$v(t) = 400\sin(314t)$$

$$i(t)=i(\infty)+\left[i(0)-i(\infty)\right]e^{-\frac{1}{\tau}t}$$
$$i(o)=0\ (A)$$
$$i(\infty)=\frac{V}{Z}=\frac{400\angle 0}{10+j0.1\times 2\pi\times 50}=\frac{400\angle 0}{10+j31.4}=\frac{400\angle 0}{31.95\angle 72.3}$$
$$i(\infty)=12.14\sin\left(314t-72.3°\right)\ (A)$$
$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{0.1}{10}=0.01\ (s)\ \rightarrow\ \frac{1}{\tau}=100\ \ (s^{-1})$$
$$i(t)=12.14\sin\left(314t-72.3°\right)+12.14\sin 72.3\,e^{-100t}$$

معادله جریان لحظه ای:

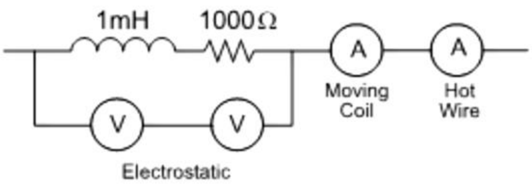
$$i(t)=12.14\left[\sin\left(314t-72.3°\right)+0.95e^{-100t}\right]$$

در لحظه $t=0.02s$ قرار می دهیم:

$$i\left(0.02\right)=12.14\left[\sin\left(314\times 0.02-72.3°\times\frac{\pi}{180}\right)+0.95e^{-100\times 0.02}\right]$$
$$i\left(0.02\right)=-10\ (A)$$

۶- جریان $i(t)=0.5+0.3\sin\omega t-0.2\sin 2\omega t$ از مدار شکل زیر عبور می کند. اگر $\omega=10^6\ rad/s$ باشد، هر دستگاه اندازه گیری چه مقداری را قرائت می کند.

حل: دستگاه اندازه گیری قاب گردان مقدار متوسط و دستگاه اندازه گیری حرارتی مقدار rms را قرائت می کنند. ولتمتر الکترواستاتیکی وابسته به جریان الکتریکی نیست و مقدار ولتاژ rms را نشان می دهد.



مقدار جریان لحظه ای عبارت است از:

$$i(t)=0.5+0.3\sin\omega t-0.2\sin 2\omega t$$
$$=I_0+I_{1m}\sin\omega t+I_{2m}\sin 2\omega t$$

در یک پریود کامل توابع سینوسی مقدار متوسط صفر است پس:

$$I_{av}=I_0=0.5\ (A)$$

در نتیجه مقداری که دستگاه اندازه گیری قاب گردان قرائت می کند، $0.5A$ می باشد.

حال:

$$I_{rms}=\sqrt{I_0^2+\left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(0.5)^2+\left(\frac{0.3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{0.2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{0.315}=0.561\ (A)$$

پس مقداری که دستگاه اندازه گیری حرارتی قرائت می کند $0.561\ A$ می باشد.

مقداری که ولتمتر الکترواستاتیکی در مقاومت $1000\ \Omega$ نشان می دهد، عبارت است از:

$$V_R = 0.561 \times 1000 = 561\ (V)$$

مقداری که ولتمتر الکترواستاتیکی در مقاومت $1000\ \Omega$ نشان می دهد، بطریق زیر تعیین می شود.

مقدار لحظه ای ولتاژ دو سر القاء گر $1\ mH$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L\frac{di}{dt} \\ &= 1\times 10^{-3}\frac{d}{dt}(0.5 + 0.3\sin\omega t - 0.2\sin 2\omega t) \\ &= 10^{-3}\omega(0.3\cos\omega t - 0.4\cos 2\omega t) \end{aligned}$$

$$\omega = 10^6\ rad/s$$

$$v_L(t) = 300\cos(10^6 t) - 400\cos(2\times 10^6 t)$$

مقداری که در ولتمتر الکترواستاتیکی در دو سر القاء گر $1mH$ قرائت می شود، مقدار rms، V_L است.

$$V_L = \sqrt{\left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{400}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{500}{\sqrt{2}} = 354\ (V)$$

۷- سه مقاومت اهمی خالص 100Ω بصورت سه فاز (الف) ستاره و (ب) مثلث به ولتاژ $400v$ و $50Hz$ وصل شده انـد. مطلـوب اسـت محاسبه قدرت اخذ شده از منبع در هر حالت الف و ب. اگر در حادثه ای یکی از مقاومت ها اتصال باز شود، مقدار قدرت اخذ شده از منبع برای دو مقاومت متصل باقی مانده به شبکه را حساب کنید.

حل:

اتصال ستاره

ولتاژ فازی و جریان فازی برابر است با:

$$V_{ph} = \frac{400}{\sqrt{3}}\ (A)$$

$$I_{ph}\frac{V_{ph}}{R} = \frac{400}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{100} = \frac{4}{\sqrt{4}}\ \ (A)$$

قدرت اخذ شده از منبع برابر است با:

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\Phi$$

در اتصال ستاره جریان $I_L = I_{ph}$ و از آنجا که فقط مقاومت اهمی به مدار متصل است $\cos\Phi = 1$ پس:

$$P = \sqrt{3}\times 400 \times \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$P = 1600\ (w) = 1.6\ (kw)$$

اتصال مثلث:

ولتاژ فازی و جریان فازی به دست می آید:

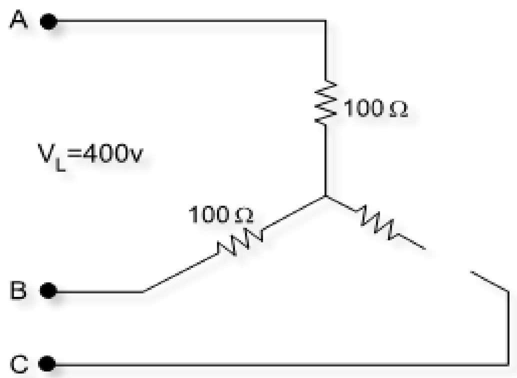
$$V_{ph} = V_L = 400 \ (V)$$
$$I_{ph} = \frac{V_{ph}}{R} = \frac{400}{100} = 4 \ (A)$$
$$I_L = \sqrt{3} I_{ph} = 4\sqrt{3} \ (A)$$

قدرت اخذ شده از منبع:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\Phi$$
$$= \sqrt{3} \times 400 \times 4\sqrt{3} \times 1$$
$$P = 4800 \ (w) = 4.8 \ (kw)$$

نکته: چنانچه مشاهده می شود $P_{\Delta} = 3P_{Y}$ هنگامی که یکی از مقاومت ها قطع شود.

اتصال ستاره:



هنگامی که یکی از مقاومت ها قطع می شود، مدار در حالت سه فاز باقی نمی ماند، اما شامل دو مقاومت $100 \ \Omega$ می شود که به ولتاژ $400 \ (V)$ وصل شده است. پس جریان خط برابر است با:

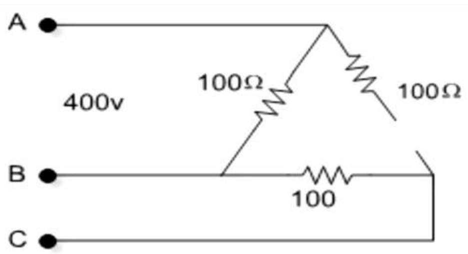
$$I = \frac{400}{200} = 2 \ (A)$$

قدرت جذب شده توسط دو مقاومت می شود:

$$P = VI = 400 \times 2$$
$$P = 800 \ (w) = 0.8 \ (kw)$$

در نتیجه، در اثر قطع یک مقاومت، قدرت مصرفی به نصف کاهش می یابد.

اتصال مثلث:



در این اتصال جریان های دو مقاومت باقی ماند، همچنان $120°$ با یکدیگر اختلاف فاز خود را حفظ می کنند.

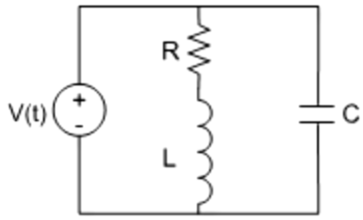
$$\text{جریان هر مقاومت} = \frac{400}{100} = 4 \ \ (A)$$

قدرت مصرفی در هر دو مقاومت خواهد شد:

$$P = 2I^2R = 2\times 4^2 \times 100$$
$$P = 32000 \quad (w) = 3.2 \ \ (kw)$$

در نتیجه: در این حالت، وقتی یک مقاومت قطع می شود، قدرت مصرفی به یک سوم کاهش می یابد.

۸- در مدار شکل زیر در چه فرکانسی جریان کل مدار به مقدار R وابسته نیست و مقدار جریان را به دست آورید.



$$\dot{I} = \dot{y}\dot{v}$$
$$\dot{y} = \frac{1}{-jX_c} + \frac{1}{R+jX_L} = j\omega c + \frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$
$$\dot{y} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} + j\left(\omega c - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)$$
$$y = \left|\dot{y}\right| = \sqrt{\left[\frac{R}{R+(\omega L)^2}\right]^2 + \left[\omega c - \frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2}$$
$$y^2 = \frac{R^2}{\left[R^2+(\omega L)^2\right]^2} + (\omega c)^2 + \frac{(\omega L)^2}{\left[R^2+(\omega L)^2\right]^2} - \frac{2(\omega c)(\omega L)}{R^2+(\omega L)^2}$$
$$y^2 = \frac{R^2+(\omega L)^2}{\left[R^2+(\omega L)^2\right]^2} - \frac{2\omega^2 LC}{R^2+(\omega L)^2} + (\omega c)^2$$
$$y = \sqrt{\frac{1-2\omega^2 LC}{R^2+(\omega L)^2} + (\omega c)^2}$$

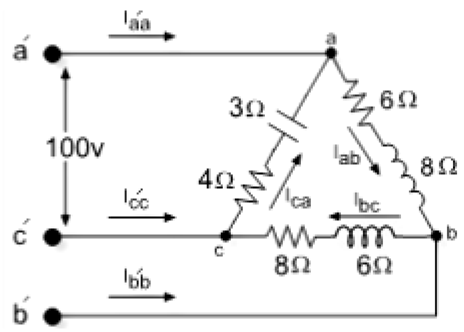
برای اینکه جریان مستقل از R باشد پس جمله اول عبارت داخل رادیکال را صفر می گیریم:

$$\frac{1-2\omega^2 LC}{R^2+(\omega L)^2} = 0$$
$$\omega^2 = \frac{1}{2LC} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}LC} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}LC}$$

در این صورت جریان کل مدار برابر است با:

$$y = \omega c \quad \Rightarrow \quad Z = X_C$$
$$I = \omega CV$$

۹- بار نامتعادل با اتصال مثلث مطابق شکل زیر بسته شده. مطلوب است جریان های فازی، جریان های خطی و قدرت مصرفی کل اگر سیستم فازی abc باشد.



حل: ولتاژهای فازی عبارتند از:

$$V_{ab} = 100\angle 0° = 100 + j0 \ (v)$$
$$V_{bc} = 100\angle -120° = -50 - j86.6 \ (v)$$
$$V_{ca} = 100\angle 120° = -50 + j86.6 \ (v)$$

جریان های فازی به دست می آیند:

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{100 + j0}{6 + j8} \quad \Rightarrow \quad I_{ab} = 6 - j8 = 10\angle -53.13° \ (A)$$
$$I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{-50 - j86.6}{8 + j6} \quad \Rightarrow \quad I_{bc} = -9.2 - j.93 = 10\angle -156.87° \ (A)$$
$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{-50 + j86.6}{4 - j3} \quad \Rightarrow \quad I_{ca} = -18.39 + j7.86 = 20\angle 156.87° \ (A)$$

جریان های خطی به دست می آیند:

$$I_{a'a} = I_{ab} - I_{ca} = (6 - j8) - (-18.38 + j7.86) \quad \Rightarrow \quad I_{a'a} = 24.39 - j15.86 = 29.1\angle -33° \ (A)$$
$$I_{b'b} = I_{bc} - I_{ab} = (-9.2 - j3.93) - (6 + j8) \quad \Rightarrow \quad I_{b'b} = -15.2 + j4.07 = 15.73\angle 165.5° \ (A)$$
$$I_{c'c} = I_{ca} - I_{bc} = (-18.39 + j7.86) - (-9.2 - j3.93) \quad \Rightarrow \quad I_{c'c} = -9.19 - j11.69 = 14.94\angle 52° \ (A)$$

نکته: برای کنترل مقادیر باید داشته باشیم

$$\sum I = I_{a'a} + I_{b'b} + I_{c'c} = 0 + j0$$

قدرت مصرفی بار در هر فاز می شود:

$$P_{ab} = I_{ab}^2 R_{ab} = 10^2 \times 6 \qquad \begin{cases} P_{ab} = 600 \ (w) \\ P_{bc} = 800 \ (w) \\ P_{ca} = 1600 \ (w) \end{cases}$$

$$P_{bc} = I_{bc}^2 R_{bc} = 10^2 \times 8$$

$$P_{ca} = I_{ca}^2 R_{ca} = 20^2 \times 4$$

$$P_T = \sum P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = 600 + 800 + 1600 \quad \Rightarrow \quad P_T = 3000 \ (w)$$

توان راکتیو در هر فاز می شود:

$$Q_{ab} = I_{ab}^2 X = 10^2 \times 8 \qquad \begin{cases} Q_{ab} = 800 \quad (VAR) \\ Q_{bc} = 600 \quad (VAR) \\ Q_{ca} = -1200 \ (VAR) \end{cases}$$

$$Q_{bc} = I_{bc}^2 X = 10^2 \times 6$$

$$Q_{ca} = I_{ca}^2 X = 20^2 \times (-3)$$

$$Q_T = \sum Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} \quad \Rightarrow \quad Q_T = 200 \quad (VAR)$$

قدرت ظاهری کل مدار می شود:

$$S = P + jQ$$

$$S = 3000 + j200 = 3006.7 \angle \cos^{-1} 0.996 \ \ (VA)$$